Algèbre 1

Chapitre 1 : Notions de logique

- *Table de vérité, quantificateurs, types de raisonnements.*

Chapitre 2 : Ensembles et applications.

- *Définitions et exemples.*
- *Applications : injection, surjection, bijection, image directe, image réciproque, restriction et prolongement.*

Chapitre 3: Relations binaires sur un ensemble.

- *Définitions de base : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.*
- *Relation d'ordre : Définition. Ordre total et partiel.*
- *Relation d'équivalence : classe d'équivalence.*

Chapitre 4: Structures algébriques.

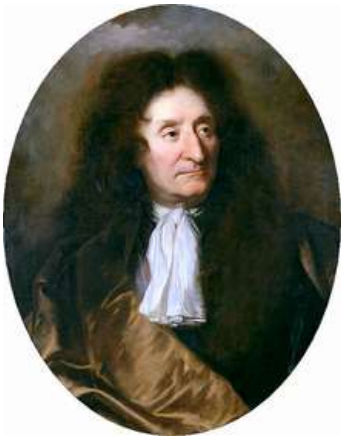
- *Loi de composition interne. Partie stable. Propriétés d'une loi de composition interne.*
- *Groupes : Définition. Sous-groupe. Exemples. Homomorphisme de groupes-isomorphisme de groupes.*
- *Anneau : Définition. Sous anneaux. Règles de calculs dans un anneau. Eléments inversibles, diviseurs de zéro. Homomorphisme d'anneaux. Idéaux.*
- *Corps : Définitions. Traiter le cas d'un corps fini à travers l'exemple Z/pZ ou p est premier.*

Chapitre 5: Anneaux de polynômes.

- *Polynôme. Degré.*
- *Construction de l'anneau des polynômes.*
- *Arithmétique des polynômes*
- *Divisibilité-Division euclidienne-Pgcd et PPCM de deux polynômes-Polynômes premiers entre eux-Décomposition en produit de facteurs irréductibles.*
- *Racines d'un polynôme. Racines et degré -Multiplicité des racines.*

Support de Cours

Rien ne sert de courir ; il faut partir à point.



Jean de La Fontaine

(né les 8 juillets 1621 à Château-Thierry, et mort le 13 avril 1695 à Paris)

Avant-Propos.

Ce document sert de support du cours ***Algèbre 1*** *donné en M.I à l'Université M'sila.*

Ces notes contiennent sans aucun doute des erreurs. Nous encourageons donc nos lecteurs à exercer leur sens critique durant leur lecture, et leur serions reconnaissants de bien vouloir nous signaler tout problème de cette nature qu'ils remarqueraient.

Chapitre 1

NOTIONS DE LOGIQUE

*À la limite de la philosophie, la logique est une branche fondamentale des mathématiques qui permet d'établir la **valeur de vérité** de propositions et de construire des **raisonnements mathématiques**.*

Ce document constitue une initiation à cette branche primordiale des mathématiques. Nous définirons les notions de proposition et d'opérateur, construirons des tables de vérité, expliquerons les notions d'implication, d'implication réciproque et d'équivalence avant d'aborder les différents types de raisonnements que l'on peut suivre en mathématique.

1. Définition

Une proposition logique (ou assertion) est une affirmation formée d'un assemblage de symboles et de mots, portant sur des objets mathématiques, à laquelle on peut clairement attribuer la valeur vraie ou la valeur faux.

On note P une proposition.
Par définition P satisfait les 3 principes (ou axiomes) suivants :

- ***Principe d'identité*** *: P est P*
  Autrement dit si P est vrai alors P est vrai et si P est faux alors P est faux.
- ***Principe de non contradiction*** *: P ne peut pas à la fois être vrai et faux*
- ***Principe du tiers exclus*** *: Soit P est vrai, soit P est faux.*
  Il n'existe pas d'autre valeur de vérité en logique mathématique.

Ces trois principes constituent le fondement de tout raisonnement mathématique. Le dernier point mérite que l'on s'y attarde un instant :

***Soit P la proposition « Le carré d'un nombre réel est strictement positif »**.*
Alors ? Vrai ou faux ?
L'intuition première serait de répondre "ça dépend du nombre", c'est le cas pour la plupart des nombres mais c'est faux pour zéro (car 0^2 n'est pas > 0).

Le problème est que cette réponse est en contradiction avec le principe du tiers exclus. Il faut donc attribuer clairement à cette proposition la valeur vrai ou la valeur faux.

*Étant donné qu'il existe au moins un nombre (ici zéro) pour lequel cette proposition est fausse, on dira que **la proposition P est fausse**.*

1.1. Quelques exemples

P_1 *: « Le nombre de lettres dans l'alphabet français est 10. »*

*La proposition **P_1** est fausse.*

P_2 *: « 2 + 2 = 4 »*

*La proposition **P_2** est vraie.*

P_3 *: « $x > 1$ »*

P_3 *n'est pas une proposition logique complète car elle contient une variable libre x. On ne sait pas ce qu'est x (un point ? un nombre entier ? un vecteur ? une étoile de l'univers ?). On ne peut donc pas attribuer de valeur de vérité à la proposition **P_3**.*

P'_3 *: « Soit x un nombre réel, alors $x > 1$ »*

*La proposition **P'_3** est fausse. En effet **P'_3** est une proposition logique car on a défini la variable x comme étant un nombre réel. Mais elle est fausse car par exemple 0 est un nombre réel et $0 < 1$.*

*On utilise ici un contre-exemple pour prouver que la proposition **P'_3** est fausse.*

(Ce type de raisonnement sera approfondi plus tard).

A retenir

*Les propositions logiques ne peuvent prendre que deux valeurs : **VRAI** ou **FAUX** (d'où le nom de logique bivalente)*

*Il faut bien faire la distinction entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est soit **VRAI** soit **FAUX**).on dira que **la proposition P est fausse***

2. *Opérateurs de base*

Les opérateurs permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'une ou de plusieurs propositions initiales.

Commençons par le premier (et le plus simple !) d'entre eux, l'opérateur « NON ».

2.1. La négation (non) : *Apprenons **à dire non !***

*Soit **P** une proposition. On définit une proposition « **non P** » que l'on note « **¬A** » (avec une sorte de petit L allongé vers le bas) ou encore par* $\overline{P}$ **.**

*Si **P** est vraie alors* $\overline{P}$ *est fausse.*

*Si **P** est fausse alors* $\overline{P}$ *est vraie.*

> *Pour ceux qui font de la programmation, l'opérateur « NON » (noté ¬ en maths) est souvent noté « ! » en informatique*

On peut établir la table de vérité de l'opérateur de négation à partir de sa définition.

Définition : *Une table de vérité est un tableau définissant la valeur d'une fonction logique pour chacune des combinaisons possibles des entrées.*

Explication : *Dans la première colonne, je place toutes les valeurs que peut prendre A (c'est à dire Vrai ou Faux). Dans la seconde colonne, je place la valeur de vérité de* $\bar{A}$ *correspondante.*

*Par convention et pour faciliter la lecture de grandes tables, on écrit **F** pour la valeur FAUX et **V** pour la valeur VRAI*

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Il est important de bien comprendre comment construire une table de vérité, nous nous en servirons de nombreuses fois dans ce cours.

Ce connecteur est assez intuitif dans la mesure où nous l'utilisons quotidiennement.

Quelques exemples :

*P : « Alger est la capitale de la Algérie » (ca valeur est **V**)*
$\bar{P}$ *: « Alger n'est pas la capitale de la Algérie » (ca valeur est **F**)*
Q : « π est un nombre entier » (F)
$\bar{Q}$ *: « π n'est pas un nombre entier » (V)*
R : « 5 est un nombre impair » (V)
$\bar{R}$ *: « 5 est un nombre pair » (F)*

Ce premier opérateur doit maintenant vous paraître assez simple. Pour construire des raisonnements logiques on a besoin d'utiliser des opérateurs permettant de lier deux propositions logiques entre elles (on les appelle des ***opérateurs binaires****).*

2.2. La conjonction « et », noté « ∧ ».

Soient P et Q deux propositions.
*On définit une nouvelle proposition « P ET Q » que l'on note «**P** ∧ **Q** »*
Cette nouvelle proposition est

Vraie *lorsque* ***P*** *et* ***Q*** *sont vraies en même temps*

Fausse *dans tous les autres cas.*

*On déduit de cette définition la table de vérité de la proposition «**P** ∧ **Q** »*

P	***Q***	***P ∧ Q***
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Les deux premières colonnes permettent de lister tous les cas possibles pour les valeurs de vérité de ***P*** *et de* ***Q****. La dernière colonne associe la valeur de vérité de la proposition «**P** ∧ **Q**».*

Il est important de bien comprendre la table de vérité de l'opérateur « ***ET*** *» car il est utilisé dans de nombreux raisonnements.*

Quelques exemples :

Exemple 1 : « 5 est un nombre inférieur à 10 **et** 5 est pair »

Soit ***P*** *: « 5 est un nombre inférieur à 10 »* ***P*** *est vraie*

Soit ***Q*** *: « 5 est pair »* ***Q*** *est fausse*

*La proposition A est la proposition «**P** ∧ **Q** »*

D'après la table de vérité de l'opérateur binaire « ET », on en déduit que ***la proposition A est fausse****.*

Exemple 2 : *« La lettre A est une voyelle et T est une consonne. »*

En résonnant de même, on en déduit que ***la proposition B est vraie****.*

2.3 La disjonction « ou », noté « ∨ ».

Le deuxième opérateur binaire que nous allons étudier est l'opérateur « OU ».

Soient P et Q deux propositions.
On définit une nouvelle proposition « P ou Q » que l'on note «P ∨ Q »
Cette proposition est :

Fausse *lorsque* ***P*** *et* ***Q*** *sont fausses en même temps*

Vraie *sinon*

P	**Q**	**P ∨ Q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Autrement dit, la proposition « P ∨ Q» est vraie uniquement si P ou Q est vraie (ou les deux !).

Exemple : *« 5 est un nombre inférieur à 10 OU 5 est pair »*
Quelle est la valeur de vérité de cette proposition ?

Correction :

Soit ***P*** *: « 5 est un nombre inférieur à 10 ». Est vraie*
Soit ***Q****: « 5 est pair ». Est fausse*
La proposition " ***P*** *∨* ***Q****»*

D'après la table de vérité de l'opérateur « OU », la proposition de l'exemple est ***vraie***

Les opérateurs binaires « NON », « ET », et « OU »
sont les plus importants en mathématiques
car ils permettent de définir tous les autres opérateurs.

Nous voilà au cœur du sujet ! En effet les implications et les équivalences sont utilisées dans la grande majorité des démonstrations en mathématiques. Bien les comprendre permet donc d'éviter des erreurs de raisonnement dans une copie... mais aussi dans la vie !

2.4 Notion d'implication « $\Longrightarrow$ »

L'implication est un opérateur binaire (c'est à dire, qui lie deux propositions entre elles).

Soient deux propositions P et Q.
On note $\boldsymbol{P \Longrightarrow Q}$ *(et on lit P implique Q)*

Plusieurs formulations pour une même notion

$P \Rightarrow Q$ se lit aussi :

- ✓ *Si P alors Q*
- ✓ *Il suffit que P pour que Q*
- ✓ *Il est nécessaire que Q pour que P*
- ✓ *Il faut que Q pour que P*

> Ainsi, à chaque fois que vous entendez dans le langage courant l'une des formulations, c'est en fait une implication

Exemple :
« Il suffit qu'il soit là pour que je sois joyeux. » correspond à « Il est là » $\Rightarrow$ « Je suis joyeux»

« Il pleut. » $\Rightarrow$ « Le sol est mouillé. ». Il pleut alors le sol est mouillé, cela veut dire bien qu'il est impossible qu'il pleuve et que le sol ne soit pas mouillé.

« Si je suis fatigué, je vais me reposer.» C'est à dire que « Je suis fatigué. » $\Rightarrow$ « Je vais me reposer. »

Soient P et Q deux propositions.
On définit une nouvelle proposition « $P \Longrightarrow Q$ » (que l'on lit P implique Q)
Cette proposition est :

***Fausse** lorsque **P** est Vraie et **Q** est fausses*

***Vraie** sinon*

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Autrement dit, la proposition « $P \Longrightarrow Q$» est fausse uniquement si P est Vraie et Q est fausse).

2.4.1 *Implication réciproque « $\Leftarrow$ »*

*Encore un petit quelque chose. P et Q sont toujours deux propositions. La proposition Q $\Rightarrow$ P est appelée l'**implication réciproque** de la proposition P $\Rightarrow$ Q. Retenez cette expression, on va s'en resservir dans deux lignes !*

2.5 Equivalence « $\Leftrightarrow$ »

Le symbole de l'équivalence est $\Leftrightarrow$. Une double flèche qui n'est pas sans rappeler la flèche de l'implication vue juste au-dessus.

Soient P et Q deux propositions.
On définit une nouvelle proposition « P $\Leftrightarrow$ Q » que l'on lit « P équivaut à Q »)
Ou « P si et seulement si Q »
*C'est aussi « l'implication P $\Rightarrow$ Q **et** l'implication réciproque Q $\Rightarrow$ P »*

Cette proposition est :

***Vraie** lorsque P et Q ont la même valeur de vérité (toutes deux vraies, ou toutes deux fausses).*

***Fausse** sinon*

P	**Q**	**P $\Leftrightarrow$ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Pour démontrer une équivalence, on utilise souvent la règle de la double implication :

- ✓ *On démontre dans un premier temps une implication,*
- ✓ *puis dans un second temps on démontre l'implication réciproque*

Évitez les confusions !

Il ne faut pas confondre implications et équivalences.
À chaque fois que vous devez donner la valeur de vérité d'une équivalence vérifiez bien la valeur de vérité de la double implication.

2.6 Propriétés :

1. $(P_1 \Leftrightarrow P_2) \Leftrightarrow (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$
2. $\overline{\overline{P_1}} \Leftrightarrow P_1$
3. $P_1 \vee P_1 \Leftrightarrow P_1$
4. $P_1 \vee P_1 \Leftrightarrow P_1$
5. $\overline{P_1 \vee P_2} \Leftrightarrow \overline{P_1} \wedge \overline{P_2}$
6. $\overline{P_1 \wedge P_2} \Leftrightarrow \overline{P_1} \vee \overline{P_2}$
7. $P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3) \Leftrightarrow (P_1 \wedge P_2) \wedge P_3$
8. $P_1 \vee (P_2 \vee P_3) \Leftrightarrow (P_1 \vee P_2) \vee P_3$
9. $P_1 \wedge (P_2 \vee P_3) \Leftrightarrow (P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3)$
10. $P_1 \vee (P_2 \wedge P_3) \Leftrightarrow (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)$
11. $\overline{(P_1 \Rightarrow P_2)} \Leftrightarrow P_1 \wedge \overline{P_2}$
12. $P_1 \Rightarrow P_2 \Leftrightarrow \overline{P_2} \Rightarrow \overline{P_1}$ « **La loi de contraposition** »

Démonstration

✓ *Démontrons la propriété 1 :* $\overbrace{(P_1 \Leftrightarrow P_2)}^{(\mathbf{1})} \Leftrightarrow \overbrace{(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)}^{(\mathbf{2})}$

On utilise la table de vérité.

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$	$P_2 \Rightarrow P_1$	**(1)**: $P_1 \Leftrightarrow P_2$	**(2) :** $(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$	**(1) ⇔ (2)**
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	***V***
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	***V***
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	***V***
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	***V***

3. Les quantificateurs

Soit P la proposition « 8 est un nombre pair ». On peut remplacer le nombre 8 par un autre nombre quelconque afin de former de nouvelles propositions. On pourra par exemple écrire la proposition P(6) « 6 est un nombre pair » qui est vraie, ou la proposition P(3) « 3 est un nombre pair » qui est fausse.

On écrira alors la forme générale de cette proposition P(x) : « x est un nombre pair », x est appelé ***argument*** *de la proposition P. La valeur de vérité de la proposition P(x) dépend de x.*

Le problème est que je ne sais pas ce qu'est x dans la proposition P(x). Dans notre exemple, x est un nombre il faut le préciser car sinon notre proposition n'a pas de sens (par exemple P(ABC) : « le triangle ABC est un nombre pair » n'a pas de sens).

On a donc inventé des quantificateurs pour indiquer que l'on prend notre x parmi un ensemble déterminé.

3.1. Le quantificateur universel « ∀ »

On note « pour tout x élément de E, la proposition P(x) est vraie » ainsi « \forall x \in \Omega, P(x) »

Oulà ! C'est quoi tous ces symboles ?!

Du calme, du calme. On s'habitue rapidement à lire les quelques symboles mathématiques.

- ✓ *Le symbole ∀ (un A retourné) se lit "**quelque soit**". C'est un quantificateur, il indique que la propriété est vraie pour tous les objets satisfaisants la condition qui suit.*
- ✓ *x est un objet mathématique (un nombre, un point, un vecteur...).*
- ✓ *Le symbole ∈ signifie « **appartient à** ». C'est un opérateur qui permet de dire que x appartient à un ensemble précisé.*

*La notation ∀ vient de l'allemand **Alle** qui signifie « tous » en français.*

.Exemple :

Traduire la proposition sous sa forme mathématique équivalente (en utilisant le quantificateur et le connecteur logique adéquat).

*P : « Pour tout x nombre réel, il suffit que x soit supérieur ou égal à 5 **pour que** x^2 soit supérieur ou égal à 25 »*

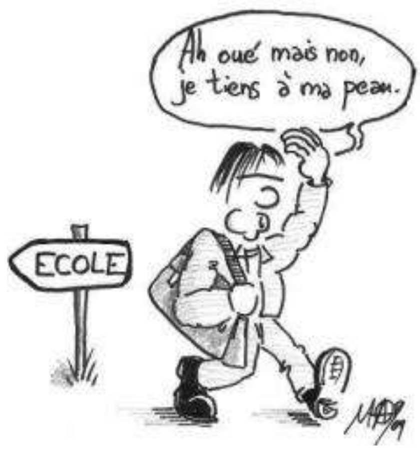
Correction :

La formulation « il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie » se traduit par P ⇒ Q
Cette équivalence est vraie pour tout x nombre réel, on utilise donc le quantificateur ∀.

$$P(x): \underbrace{\forall}_{Quantificateur} x \in \mathbb{R}, x \geq 5 \underbrace{\Rightarrow}_{Connecteur} x^2 \geq 25$$

3.2. Le quantificateur existentiel « ∃ »

*La proposition **Q** : « Tous les étudiants sont présents ».*
Essayez de déterminer $\bar{Q}$ (dans une phrase française). Attention ! Il y a un piège !



*Le contraire de «Tous les étudiants sont présents» **n'est pas** «Tous les étudiants sont absents» !*
*En effet, il suffit qu'un seul étudiant soit absent pour que la proposition **Q** soit fausse.*

On dira donc que la proposition contraire de Q est « Au moins un étudiant absent »

*Il nous faut un autre quantificateur pour traduire « il existe au moins un ». On pourrait noter ce quantificateur $(non\ \forall)$, car il est simplement la négation du quantificateur universel. Mais pour simplifier la notation, on utilisera le symbole **∃** (un E à l'envers).*

Et oui ∃ vient de l'allemand Existieren (« exister » en français).

∃ s'utilise exactement de la même façon que ∀.

Exemple :

$P(x)$: $\exists x \in \mathbb{R}$ $tel\ que$ $x^2 = 1$

La proposition P se lit « Il existe au moins un nombre réel x dont le carré est égal à 1. ».

Voyez comme la notation mathématique est plus pratique !

3.3 Plusieurs quantificateurs

On peut utiliser deux quantificateurs (ou plus) dans une même proposition. Dans ce cas l'ordre des quantificateurs est important.

Exemple : *Traduisez en français les propositions P et Q et donnez leur valeur de vérité :*

$P(x)$: $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x < y$ *« N l'ensemble des entiers naturels »*

$Q(x)$: $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x < y$

Correction :

La proposition P signifie « Pour tout entier naturel x, il existe un entier naturel y strictement supérieur à x. »La proposition P est **vraie**

La proposition Q signifie « Il existe un entier naturel strictement inférieur à tous les entiers naturels »La proposition Q est **fausse**. *Pour le prouver, on peut utiliser un contre-exemple. En effet il n'existe aucun entier naturel strictement inférieur à 0.*

Ces deux propositions si proches en apparence n'ont donc absolument rien à voir !

Retenez donc que changer la nature ou l'ordre des quantificateurs change le sens de la proposition.

3.4 Propriétés

1. $\overline{(\forall x P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \overline{P(x)})$
2. $\overline{(\exists x P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \overline{P(x)})$

Exemple **:** *Donner la négation de la proposition de l'inclusion « $A \subset B$ »*

Correction :

La proposition $A \subset B$ *s'écrit* « $\forall x ; x \in A \Longrightarrow x \in B$ »

Donc La négation de $A \subset B$ *s'écrit* $\overline{A \subset B}$ *où* $A \not\subset B$ *qui revient à chercher* $\overline{\forall x ; x \in A \Longrightarrow x \in B}$.
On utilise la propriété 1 :

Il vient : $\overline{\forall x ; x \in A \Longrightarrow x \in B} \Leftrightarrow \exists x ; \overline{x \in A \Longrightarrow x \in B}$ *« on utilise* $\overline{(P_1 \Rightarrow P_2)} \Leftrightarrow P_1 \wedge \overline{P_2}$ *»*

$\exists x ; \overline{x \in A \Longrightarrow x \in B} \Leftrightarrow \exists x ; x \in A \; et \; x \notin B$

On résumé : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x ; x \in A \Longrightarrow x \in B$

Et $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x ; x \in A \; et \; x \notin B$

4. Les types de raisonnement

Nous avons maintenant tous les outils en main pour réaliser des raisonnements mathématiques complets.

*Un raisonnement permet d'établir une proposition à partir d'une ou de plusieurs propositions initiales admises (ou précédemment démontrées) en suivant les règles de la logique. Nous allons dans cette dernière partie détailler trois "**types" de raisonnement**, trois "**méthodes**" pour démontrer une proposition :*

- *Trouver un exemple ou un contre-exemple*
- *Démontrer la contraposée*
- *Raisonner par l'absurde*

Ces différentes formes de raisonnements devront s'appliquer dans des cas bien particuliers.

4.1. Exemple et contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition de la forme «$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, P(x) est vraie », on cherche un x pour lequel P(x) est vraie. C'est donner un ***exemple****.*

Exemple : P : «$\exists(x, y, z) \in \mathbb{N}^{\mathbf{3}} :\ x^2 = y^2 + z^2$. Démontrer que P est vraie

Correction : Soient x = 5, y = 4, z = 3.

x, y et z vérifient $x^2 = y^2 + z^2$ (car 25 = 16 + 9)

Donc la proposition P est vraie.

Pour montrer qu'une proposition de la forme «$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, P(x) est fausse», on montre que sa négation «$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$, $\overline{P(x)}$ est vraie ». C'est donner un ***contre-exemple****.*

*Exemple : Soit P la proposition «$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$**,** est un nombre premier »*
Démontrez que P est fausse.

Correction **:** *Pour démontrer que P est fausse on va montrer que $\bar{P}$ est vraie.*

$\bar{P}$ est la proposition « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ n'est pas un nombre premier ».

Soit n=3. Et $n^2 + 1 = 10$
10 n'est pas un nombre premier.

n est un ***exemple*** *de la proposition $\bar{P}$.*
n est un ***contre-exemple*** *de la proposition* ***P****.*

Donc la proposition P est fausse.

4.2. La contraposée

J’espère que vous vous souvenez de la table de vérité de l'implication ! Comment ça non ?! Je vous laisse la retrouver (dans votre esprit si possible sinon plus haut sur cette page) avant de passer à l'exercice suivant...

Exercice : *Soient P et Q deux propositions. Montrer que* $(P \Longrightarrow Q)$ *équivaut à* $(\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$

Correction :

Vous l'avez deviné, on utilise une nouvelle fois une table de vérité pour justifier cette équivalence.

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$	$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*

Donc $(P \Longrightarrow Q) \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{équivaut à}} (\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$

4.2.1 Définition :

La proposition $(\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$. *Est appelée* **proposition contraposée** *de la proposition* $(P \Longrightarrow Q)$

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes, ce qui signifie que l'on peut démontrer l'une pour démontrer l'autre. On souhaite par exemple montrer que $(P \Longrightarrow Q)$. *Le raisonnement par contraposée consiste à prouver que* $(\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$.

4.2.2 Exemple et exercice

Exemple :

Pour démontrer que « S'il pleut, alors le sol est mouillé », je vais démontrer que « Si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas ».

Exercice : *Démontrez la proposition P :* $\forall n \in \mathbb{N}\ si\ n^2\ est\ pair\ \Longrightarrow n\ est\ pair.$

Indication 1 : *Soit n un entier naturel. Donc deux cas :*

- ✓ *n est pair :* $\exists n \in \mathbb{N} : n = 2k\ avec\ k \in \mathbb{N}$
- ✓ *n est impair:* $\exists n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1\ avec\ k \in \mathbb{N}$

Correction :

On réalise cette démonstration par contraposition. Ainsi plutôt que de montrer que si n^2 est pair, alors n est pair. Nous allons montrer que si ***n est impair alors n^2 est impair****.*

n est impair : $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$ *avec* $k \in \mathbb{N}$ *(d'après l'indication)*
donc

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$ *(On élève au carré) alors* $n^2 = 2(2k^2 + k) + 1$ *(on factorise)*
(k est un entier naturel, donc $(k^2 + k)$ est aussi un entier naturel)

Finalement : $n^2 = 2h + 1 \; avec \; h = (2k^2 + k) \in \mathbb{N}$ *est impair*

On a monté que si ***n est impair*** $\overbrace{\boldsymbol{alors}}^{\Rightarrow}$ ***n^2 est impair****. Donc* $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{si\; n^2\; est\; pair \;\Rightarrow n\; est\; pair}$

On obtient le résultat demandé.

4.3 Le raisonnement par l'absurde

A quoi bon mettre de l'absurdité dans un raisonnement logique ?!

Drôle d'idée en effet ! Mais rassurez-vous, le raisonnement par l'absurde (comme son nom ne l'indique pas) n'a rien d'absurde. Il est même tout ce qu'il y a de plus logique !

Ce raisonnement repose sur le principe du Tiers-exclus, à savoir que si une proposition n'est pas fausse, alors elle est vraie.

*Imaginons par exemple que vous savez que quelque chose est vrai, mais vous ne savez pas le démontrer. En raisonnant par l'absurde vous allez commencer par admettre par hypothèse que cette chose est fausse. Puis en suivant les règles de la logique vous allez développer les conséquences de cette hypothèse et aboutir à une contradiction irréfutable (comme 1 = 2, ou 2 et 4 sont premiers entre eux). Vous allez en déduire que votre hypothèse de départ est nécessairement fausse, c'est à dire que la chose que vous vouliez démontrer n'est pas fausse, donc qu'elle est vraie.**

4.3.1 Définition

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique. Il consiste

- ✓ *soit à démontrer qu'une proposition P est vraie en prouvant l'absurdité de la proposition $\bar{P}$*
- ✓ *soit à démontrer qu'une proposition P est fausse en déduisants logiquement des conséquences absurdes*

Voyons maintenant le raisonnement par l'absurde dans toute sa splendeur à travers l'un de ses exemples les plus classiques : l'irrationalité de $\sqrt{2}$ *. «*$\boldsymbol{P} : \sqrt{\mathbf{2}} \notin \mathbb{Q}$ *»*

4.3.2 Exemple

On souhaite démontrer que la proposition P est vraie.

$\boldsymbol{P}$ *: «*$\sqrt{\mathbf{2}} \notin \mathbb{Q}$*», «*$\sqrt{\mathbf{2}}$ *est un nombre irrationnel »*

On raisonne par l'absurde. On va donc montrer que la proposition $\overline{\boldsymbol{P}}$ *est absurde.*
$\overline{\boldsymbol{P}}$ *Se traduit par «*$\sqrt{\mathbf{2}} \in \mathbb{Q}$*» ou bien «* $\sqrt{\mathbf{2}}$ *est un nombre rationnel ».*
Si $\sqrt{\mathbf{2}} \in \mathbb{Q}$ *, il peut se mettre sous la forme d'une fraction. C'est à dire qu'il existe* ***p*** *appartenant à* $\mathbb{Z}$ *et il existe* ***q*** *appartenant à* $\mathbb{Z}$ *tel que* $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ *avec* ***p*** *et* ***q*** *premiers entre eux.*
On simplifie cette égalité :

$$\mathbf{2} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{q}^2} \quad \text{(On élève au carré)}$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{q}^2 = \boldsymbol{p}^2 \quad \text{(Par produit de } q^2\text{)}$$

Donc ***p²*** *est pair, donc* ***p*** *est pair (Démonstration par contraposée du paragraphe précédent)*
Donc $\exists\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}\boldsymbol{k}$ *(propriété vue précédemment)*
En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient : $\mathbf{2}\boldsymbol{q}^2 = (\mathbf{2}\boldsymbol{k})^2 \Rightarrow \boldsymbol{q}^2 = (\mathbf{2}\boldsymbol{k})^2 = \mathbf{2}\boldsymbol{k}^2$
Donc ***q²*** *est pair, donc* ***q*** *est pair ce qui est impossible car* ***p*** *est pair et que* ***p*** *et* ***q*** *sont premiers entre eux.*

On aboutit à une contradiction.

Donc la proposition $\overline{\boldsymbol{P}}$ *est* ***fausse****.*

Donc $\sqrt{\mathbf{2}}$ *est un nombre irrationnel.*

Dans le cas où la proposition à démontrer est de la forme $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$*, raisonner par l'absurde consiste à démontrer que la proposition* $\boldsymbol{P} \wedge \overline{\boldsymbol{Q}}$ *est fausse. Pour se faire, on suppose que* ***P*** *est vraie et que* ***Q*** *est fausse, on développe les conséquences et on montre que l'on arrive à une contradiction.*