CHAPITRE01 : INTRODUCTION

Logique Mathématique

L'enseignant : Dr. SAADAOUI Kheir

Université de M'sila

Introduction :

Objectifs de l'enseignement :

Acquérir les fondements du raisonnement mathématique, Acquérir les fondements de la théorie des ensembles et acquérir les éléments de la rédaction des preuves mathématiques.

Eléments du langage mathématiques :

⋄ **Axiome.** Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.
Ainsi, par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes (« les cinq postulats d'Euclide »), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : «par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».
Un autre exemple d'axiomes est fourni par les (cinq) axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome affirme que : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur de n est $n+1$), alors $P = N$ ». Cet axiome est appelé « l'axiome d'induction » ou encore ń l'axiome de récurrence ».
Ces énoncés ont en commun d'être « évidents » pour tout le monde.
⋄ **Proposition (ou assertion ou affirmation).** Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » et « tout carré de réel est un réel positif » sont deux propositions. Il est facile de démontrer que la première est fausse et la deuxième est vraie. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.
⋄ **Théorème.** Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas démontrée comme telle). Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des

cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grands d'entre eux (théorème de Pythagore, . . .). C'est d'ailleurs ce dernier point de vue que nous adopterons dans les chapitres ultérieurs (mais pas dans ce premier chapitre où le mot « proposition » aurait alors deux significations différentes).

⋄ **Corollaire.** Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème. Par exemple, dans le chapitre « continuité », le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles, est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un corollaire de ce théorème affirme alors que si une fonction définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

⋄ **Lemme.** Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

⋄ **Conjecture.**Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer. Les conjectures suivantes sont célèbres :

♦ (conjecture de Fermat) Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ (cette conjecture date du $XVII^e$ siècle et il a été démontré récemment que ce résultat était vrai).

⋄ **Définition.** Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet. On doit avoir conscience que le mot « axiome » est quelquefois synonyme de « définition ». Par exemple, quand vous lirez « définition d'un espace vectoriel », vous pourrez tout autant lire « axiomes de la structure d'espace vectoriel » et vice-versa.

Rédaction de preuves mathématiques

1. Le raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant :

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Un résultat connu comme étant vrai (c'est à dire un théorème) ne peut entraîner qu'un autre résultat vrai. Cette règle est connue sous le nom de « modus ponens ».
C'est le raisonnement de base que vous reproduirez un grand nombre de fois. Et même, vous tiendrez ce raisonnement tellement de fois (ou encore, vous serez tellement souvent dans la situation où l'hypothèse P est vraie) que vous risquez à terme de commettre une confusion entre la phrase simple « $P \Rightarrow Q$ est vraie » et la phrase plus complète « P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie ». Seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie.
Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow ... \Rightarrow S \Rightarrow T$ est vraie, et on a donc montré que T est vraie.

2. Le raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse ou encore si P est vraie). Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand $\overline{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Maintenant, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier a^2 (qui est à l'évidence supérieur à 2), le nombre premier 2 apparaît à un exposant pair (si $a = 2^{\alpha} \times ...alors,\, a^2 = 2^{2\alpha}$) alors qu'il apparaît à un exposant impair dans $2b^2$ ($si\ b = 2^{\beta} \times ...alors,\, 2b^{2\beta+1} \times ...$) . Si l'on admet l'unicitéde la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à 2 (unicité qui sera démontrée plus tard dans ce cours), l'égalité des nombres a^2 et $2b^2$ est donc impossible. Par suite, l'hypothèse faite ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) est absurde et on a montré (par l'absurde) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.Le raisonnement par contra-position

Le schéma est le suivant :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est une proposition vraie.

Exemple. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrons que ($kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1$). Supposons que $k \neq 1$ ou $k' \neq 1$. Alors, on a ($k \geq 2\ et\ k' \geq 1$) ou ($k \geq 1 etk' \geq 2$). Dans les deux cas, on a $kk' \geq 2$ et en particulier, $kk' \neq 1$. Donc,

$$(k \neq 1\ ou\ k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1)$$

. Par contra-position, on a montré que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1\ et\ k' = 1).$$