CHAPITRE 02 : THÉORIE DES ENSEMBLES

L'enseignant : Saadaoui Kheir

Produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles est un ensemble de couples (c'est à dire un ensemble dont chaque élément est un couple), est la même chose est vraie de tout sous-ensemble d'un produit cartésien. Il est techniquement important de savoir qu'on peut aussi procéder dans le sens inverse : tout ensemble de couples est un sous-ensemble du produit cartésien de deux ensembles. En d'autre terme : si $\mathbb{R}$ est un ensemble tel que tout élément de $\mathbb{R}$ soit un couples, alors il existe deux ensembles A et B tel que $\mathbb{R} = A \times B$.

Définition 1 : Étant donnés deux ensembles X et Y, l'ensemble

$$\{z| (\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \ et \ x \in X \ et \ y \in Y)\}$$

s'appelle le produit de X et de Y et se désigne par $X \times Y$.

La relation $z \in X \times Y$ est donc équivalente à «z est un couple et $pr_1 z \in X$ et $pr_2 z \in Y$» les ensembles X et Y sont appelé le *premier* et *le second ensemble facteur* de $X \times Y$.

Proposition 1 : Si A', B' sont des ensembles non vide, la relation $A' \times B' \subset A \times B$ *et équivalente à* «$A' \subset A \ et \ B' \subset B$».

En premier lieu, la relation $z \in A' \times B'$ *et équivalente à* «z est un couple et $pr_1 z \in A'$ et $pr_2 z \in B'$» donc; sans hypotèse sur A' et B', la relation «$A' \subset A$ et $B' \subset B$» entaîne $A' \times B' \subset A \times B$. Réciproquement, montrons d'abords que, si $B' \neq \emptyset$ (sans hypothèse sur A'), la relation $A' \times B' \subset A \times B$ entraîne $A' \subset A$. Soit x un élément de A'; puisque $B' \neq \emptyset$, il y a un objet y qui est un élément de B' on a $(x, y) \in A' \times B'$, d'où $(x, y) \in A \times B$ et par suite $x \in A$; cela montrer que $A' \subset A$. On a voit de même que si $A' \neq \emptyset$, la relation $A' \times B' \subset A \times B$ entraîne $B' \subset B$, d'où la proposition.

Proposition 2 : Soient A et B deux ensembles. La relation $A \times B = \emptyset$ est *équivalente à* «$A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$».

En effet, la relation $z \in A \times B$ entraîne $pr_1 z \in, A \ et \ pr_2 z \in B$ donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$; inversement, la relation «$x \in A$ et $y \in B$» entraîne $(x, y) \in A \times B$, donc $A \times B \neq \emptyset$. Autrement dit, la relation $A \times B \neq \emptyset$ est équivalente à «$A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$>>; d'où la

proposition.
si A, B, C sont des ensembles, on pose :

$$(A \times B) \times C = A \times B \times C$$

Un élément $((x, y), z)$ de $A \times B \times C$ s'écrit aussi (x, y, z) et s'appelle un *triplet*. De même, si A, B, C, D sont des ensembles, on pose $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D.Etc.$

Ensembles des parties

Si A et B sont des ensembles, la *différence* entre A et B, plus souvent connue comme la *complment** de B *relatif* à A, est l'ensemble $A - B$ définir par

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

. Notez que, dans cette définition, il n'est pas nécessaire de supposer que $B \subset A$. Afin de présenter les faits fondamentaux sur la complémentation d'une façon aussi simple que possible, nous supposons néanmoins (dans ce chapitre seulement) que tout les ensembles dont il est question sont sous-ensemble d'un et même ensemble E et que tous les compléments (à moins qu'il ne soit spécifierautrement) sont pris relativement à E. Dans de telles situation (et elle est sont toute à fait courantes) il est plus facile de se rappeler l'ensemble fondamentale E que de continuer à l'écrire, et cela rend possible de simplifier la notation. Un symbole souvent utilisé pour la complément, provisoirement absolu (par opposition avec le complément relatif), de A et A'. A l'aide de ces symboles, les faits fonda-mentant sur la complémentation peuvent être énoncés comme suite :

$$(A')' = A,$$
$$\emptyset' = E, \qquad E' = \emptyset,$$
$$A \cap A' = \emptyset, \qquad A \cup A' = E,$$
$$A \subset B \textit{ si et seulement si } B' \subset A'$$

Les assertions les plus importants les compléments sont ce qui est connu sous le nom de *loi de De morgan* : $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (Nous verrons bientôt que les lois

de De Morgan sont vraies pour les unions et les intersections de collections d'ensembles plus *Complèments et parties* vastes que les seules paires.) Les faits sur la complémentation impliquent que les théorèmeè de la théorie des ensembles se présentent d'habitude par deux. Si dans une inclusion, ou dans une équation faisant intervenir des unions, des intersections, et des compléments, de sous-ensemble de E, nous remplaçons chaque ensemble par sont complément, nous échangeons unions et intersections , et nous renversons le sens des inclus, on obtient un autre théorème. On se réfère parfois à ce fait sous le nom de *principe de la dualité* pour les ensembles.
Voici quelque exercices simples sur la complémentation.

$$A - B = A \cap B'$$
$$A \subset B \textit{ si et seulement si } A - B = \varnothing.$$
$$A - (A - B) = A \cap B.$$
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$
$$(A \cap B) \subset (A \cap C) \cup (B \cap C').$$
$$(A \cup C) \cap (B \cup C') \subset A \cup B.$$

En d'autre terme, si E est un ensemble, alors il existe un ensemble (collection) $\mathcal{P}$ telle que si $X \subset E$ alors $X \in \mathcal{P}$. l'ensemble $\mathcal{P}$ décrit ci-dessus peut être plus vaste qu'il n'est souhaité ; il peut contenir des éléments autres que les sous -ensembles de E. Il est facile d'y remédier ; il suffit d'appliquer l'axiome de sélection pour former l'ensemble $\{X \in \mathcal{P} : X \subset E\}$. (Se rappeler que "$X \subset E$") signifier la même chose que "pour toute x (si $x \in X$, *alors* $x \in E$)".
Puisque, pour toute X une condition nécessaire et suffisante pour que X appartienne à cet ensemble est que X soit un sous-ensemble de E, il en résulte que si nous changeons de notation et appelons à nouveau cet ensemble $\mathcal{P}$, alors

$$\mathcal{P} = \{X : X \subset E\}$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ est appelé l'ensemble *des parties* de E; l'axiome d'extensionalité en garantie l'unicité. Le fait que $\mathcal{P}$ dépend de E est souligné en écrivons $\mathcal{P}(E)$ au lieu de seulement $\mathcal{P}$.

Parce que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est tré grand en comparaison de E il n'est pas facile de donner des exemples. Si $E = \varnothing$, la situation est assez claire ; l'ensemble $\mathcal{P}(\varnothing)$ est le singleton $\{\varnothing\}$. Les ensembles des parties des singletons et des paires sont également facile à décrire ; nous avons

$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$ *et* $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Définition ensembliste des relation. Définition ensembliste des applications.

a. Généralités

Soient E et F deux ensembles.

Définition On appelle **relation** (ou **correspondance**) de l'ensemble E vers l'ensemble F toute triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$, appeler **graphe** de la relation. E porte le nom de **source** ou **ensemble de départ**, ou encore **ensemble de définition**, et F porte le nom de **but** ou **ensemble d'arrivée** de la relation $\mathcal{R}$. On dit que $a \in E$ est en relation avec $b \in F$ si et seulement si $(a, b) \in \Gamma$, ce que l'on note encore $a \mathcal{R} b$; a est dit un **antécédent** de b , et b une **image** de a par la relation $\mathcal{R}$. En fin, si $E = F$, la relation $\mathcal{R}$ porte le nom de relation **sur** (l'ensemble) E.

L'ensemble des relation E vers F s'identifie donc à l'ensemble $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Application d'un ensemble dans un autre

a. Généralités sur les applications

Soient E et F deux ensembles.

Définition Une relation f de E vers F est appellée **application, relation fonctionnelle** ou **fonction** de E vers (ou à valeurs dans) F si toute élément x de E est en relation avec un et un seul élément y de F; cet élément est noté $f(x)$ et porte le nom **d'image** ou **valeur** de la fonction en x (on parle aussi de **transformé** de x par f).

On la *note*[1]

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ou encore plus brièvement $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : E \longrightarrow F$.

L 'ensemble des applications de E vers F, se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Cardinalité des ensembles :

Nous donnons ici que quelques remarques initiatiques (à titre culturel) et sans justification (axcepté le théorème de Cantor).

On dit qu'un ensemble E est **équipotent** à un ensemble F ou que E et F ont même *cardinal*[1] (ou encore que E et F ont **même puissance**) s'il existe une bijection de E sur F. On admet qu'il existe des ensembles appelés **cardinaux** (ou **nombres cardinaux**), tel que toute ensemble E donné soit équipotent à un et un seul d'entre eux ; ce cardinal est appelé cardinal ou puissance de E, et on le note $Card(E)$. Ainsi, si E est équipotent à F , on a $Carde(E) = Card(F)$. Si E est équipotent à une partie de F, ce qui équivaut à l'existence d'une injection de E dans F, on note $Carde(E) \leq Card(F)$; et si de plus, il n'existe pas de surjection de E sur F, on écrit $Carde(E) < Card(F)$

on admettra que l'équipotence a les même propriété qu'une relation d'équivalence (sur la classe des ensembles), et que $\leq$ a les même propriétés qu'une relation d'ordre (sur la classe du cardinaux).

Théorème de Cantor :

Théorème : Pour toute ensemble E, on a $Card(E) < Card(\mathcal{P}(E))$.

Démonstration : L'application de E entre $\mathcal{P}(E)$ définir par $x \mapsto \{x\}$, est injective et on a $Card(E) \leq Card(\mathcal{P}(E))$. Il suffit donc de prouver qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ considérons une application f de E dans $\mathcal{P}(E)$ et posons $Y = \{x \in E / x \notin f(x)\}$, alors y est une partie de E , donc un élément de $\mathcal{P}(E)$ qui n'est pas atteint par f car :

- si $x \notin Y$ alors $x \in f(x)$ et $f(x) \neq Y$.
- si $x \in Y$ alors $x \notin f(x)$ et $f(x) \neq Y$.

Ainsi f n'est pas surjective et $Card(E) < Card(\mathcal{P}(E))$

De plus, en montre que , $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}$

, et ainsi $Card(E) < 2^{Card(E)}$.

Le théorème de Cantor permet de construire des ensembles infinis "de plus en plus grands" ; il permet aussi d'affirmer qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables, en effet on a $\mathcal{N}_0 = Card(\mathbb{N}) < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\mathcal{N}_0}$.

Les ensemble E qui, comme $\mathbb{R}$, vérifient $Card(E) = 2^{\mathcal{N}_0}$ sont dit avoir la **Puissance du continu.**

Le problème de l'existence d'un ensemble ayant un cardinal strictement compris entre $\mathcal{N}_0$ et $2^{\mathcal{N}_0}$ est indécidable.

Supposer la non-existence d'un tel ensemble, c'est posé **l'hypothèse du continu** (on note, dans ce cas, $2^{\mathcal{N}_0} = \mathcal{N}_1$ (**aleph un**)); sous cette hypothèse, $\mathbb{R}$ ne possède que deux types de sous-ensemble : les ensembles dénombrables et les ensembles ayant la puissance du continu.

Donnons pour terminer le cardinal de certains ensembles. On a si n désigne un entier naturel non nul quelconque :

• $Card(\mathbb{N}^n = Card(\mathbb{Z}^n)) = Card(\mathbb{Q}^n)) = \mathcal{N}_0;$

• $Card(\mathbb{R}^n = Card(\mathbb{C}^n)) = Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\mathcal{N}_0}(= \mathcal{N}_1 > \mathcal{N}_0);$

• $Card(\mathcal{P}(\mathbb{R}) = Card(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})) = 2^{2^{\mathcal{N}_0}}(= 2^{\mathcal{N}_1} > \mathcal{N}_1).$