Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S1) : 2022/2023 — B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 01

Sérier 02 (Les suites réelles)

Exercice 1. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

Exercice 2.

1. Montrer que toute suite stationnaire est convergente.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si $(u_n)_n$ est convergente alors elles est stationnaire.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n),\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin(n^2),\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n},\qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}\quad (a>0)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

(**ind.** $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),\quad 1+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

Exercice 4. En utilisant le théorème d'encadrement, montrer que les suites suivantes sont convergentes.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k},\quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx],\ (x\in\mathbb{R}).$$

Exercice 5. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, $\forall n\geq 1$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
2. Montrer qu'elle est majoré (**Ind.** $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}:=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, $\forall k\geq 2$.)
3. Déduire.

Exercice 6. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=1/2 \\ u_{n+1}=u_n^2+\frac{3}{16}, \quad n\geq 1\end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}:\frac{1}{4}<u_n\leq\frac{1}{2}$
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_n$ et déduire sa nature
3. Calculer $\lim_{n\to\infty}u_n$ et déduire $\inf\{u_n/\ n\in\mathbb{N}\}$ et $\sup\{u_n/\ n\in\mathbb{N}\}$

Exercice 7. Soient $a > 0$ et $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$
2. Supposons que $(u_n)_n$ est convergente. Calculer sa limite ℓ
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n - \ell \geq 0$
4. Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et conclure sa nature.
5. A l'aide de la machine donner une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Exercice 8. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \quad n \geq 2 \end{cases}$$

1. Calculer $u_n - u_{n-1}$ en fonction de n pour $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9. On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Calculer $u_0,\ u_1,\ u_2,\ v_0,\ v_1,\ v_2$.
2. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
3. On note par e leurs limite. Montrer que e n'est pas rationnel.

Exercice 10. Montrer que les suites suivantes ne sont pas convergentes

$$(-1)^n, \quad \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right], \quad \sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$$

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_n$ est décroissante
2. Montrer que la suite extraite $(u_{2n+1})_n$ est croissante
3. Calculer $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_{2n+1})$
4. Déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice 12. En utilisant le critère de Cauchy, montrer que la suite de terme générale $(-1)^n$ n'est pas convergente

Exercice 13.
1. Montrer que la suite de terme générale $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, n'est pas de Cauchy. (**Ind.** Choisir $p = N$ et $q = 2N$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$).
2. Déduire.
3. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et déduire sa limite.
4. Même questions pour la suite $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$.

حلول السلسلة رقم -2-

Exercice 01

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell} \Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$

$\Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

* $u_n = \frac{n}{2n+1}$, $\ell = \frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N\in\mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

On a $|u_n - \ell| = \left| \frac{-1}{2n+1} \right| = \frac{1}{2n+1}$.

D'où $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ ---- (*)

On choisit $N = \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1}_{\in\mathbb{N}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ ---- (**)

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, On a $n \geq N \xRightarrow{(**)} n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$

$\xRightarrow{(*)} |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

* $u_n = \frac{\sin n}{n}$, $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|u_n - \ell| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{----} (*)$$

et On a $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (**)

On choisit $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (***)

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$, On a $n \geq N \xRightarrow{***} n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\xRightarrow{**} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$\xRightarrow{*} |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

* $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|u_n - \ell| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \cdots (*)$$

et on a $\quad \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon \iff n \geq \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 \quad \cdots (**)$

On choisit $\quad N = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 2022 > \frac{1}{4\varepsilon^2} \quad \cdots (***)$

Donc $\quad n \geq N \xRightarrow{(***)} n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2}$

$$\xRightarrow{(**)} \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon \xRightarrow{(*)} |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exercice 02 :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire :

c-à-d : $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n = c^{te} \in \mathbb{R} \quad (\text{ou } u_{n+1} - u_n = 0)}$

Soit $\varepsilon > 0$: On a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$n \geq N \implies |u_n - c| = 0 \leq \varepsilon$.

Donc (u_n) est convergente et sa limite est c.

2) Soit $(u_n)_n \subset \mathbb{Z}$ et convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq N : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

et on a, $\forall n \geq N : |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| \leq \frac{2}{3} < 1$

Comme $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, alors $\boxed{u_{n+1} - u_n = 0}$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 3 : Calculons les limites suivantes :

* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$

* $\lim \frac{1}{n}\sin(n^2)=0$ (car $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$ et $|\sin n^2|\le 1, \forall n$)

* $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{2n^2+(-1)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)}=\dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln a}=1$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$. On a $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

D'où $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1}$

* On a $u_n=\dfrac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

On a $(k+1)^3=k^3+1+3k^2+3k$. D'où

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(1+3k^2+3k\right)$$

$$(n+1)^3-1^3=n+3\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+3\left(1+2+3+\cdots+n\right)$$

$$=n+3\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{3n}{2}(n+1)$$

D'où $1+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{3}\left((n+1)^3-1-n-\dfrac{3n}{2}(n+1)\right)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Donc $\lim u_n=\dfrac{1}{6}\dfrac{\cancel{n}(\cancel{n}+1)(2\cancel{n}+1)}{\cancel{n^3}}=\dfrac{2}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

Exercice 04

* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. On a pour $1 \leq k \leq 1$:

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'où $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$

Ce que donc $$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

En passant à la limite : $1 \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 1$. D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

et donc $(u_n)_n$ est convergente.

* $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} [kx]$. On a D'après la déf de $[\cdot]$:

$$kx - 1 < [kx] \leq kx$$

D'où $$\sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < \sum_{k=1}^{n} [kx] \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) x$$

$$\frac{n(n+1)}{2} x - n < \sum_{k=1}^{n} [kx] \leq \frac{n(n+1)}{2} x$$

D'où $$\frac{\frac{n^2+n}{2} x - n}{n^2} < u_n \leq \frac{(n^2+n) x}{2 n^2}$$

En passant à la limite : $\boxed{\frac{x}{2} \leq \lim u_n \leq \frac{x}{2}}$

Donc $\boxed{\lim u_n = \frac{x}{2}}$ et $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice 05 : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$

1) Montrons que (u_n) est croissante.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

Donc (u_n) est croissante (strictement croissante)

2) Montrons que $(u_n)_n$ est majorée.

On a pour $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

D'où $u_n = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Donc $(u_n)_n$ est majoré

3) Comme (u_n) est croissant et majorée alors, elle est convergente

Exercice 06 = $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} \end{cases}$

1) Par récurrence : Pour $n=0$, on a $\frac{1}{4} < u_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Supposons que $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $\frac{1}{4} < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

On a $\frac{1}{16} < u_n^2 \leq \frac{1}{4}$. D'où $\frac{1}{16} + \frac{3}{16} < u_n^2 + \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{16}$

D'où $\boxed{\frac{1}{4} < u_{n+1} \leq \frac{7}{16} \leq \frac{1}{2}}$

2) On a pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{3}{16}$. On étudie le signe de $x^2 - x + \frac{3}{16}$. $\Delta = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{3}{4}$.

x		$1/4$	u_n	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	
	+	0	−		−	0	+

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. $(u_n) \searrow$

Comme (u_n) est minorée et decroissant : Alors elle est convergente

3) Comme (u_n) est convergente alors $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

D'où $\quad l = l^2 + \frac{3}{16}$ et donc $l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$.

D'où $\quad l = \frac{1}{4}$ ou $l = \frac{3}{4}$. Or $u_n \leq \frac{1}{2}$, alors $l \leq \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{l = \frac{1}{4}}$ $\left(\text{car } \frac{3}{4} > \frac{1}{2}\right)$

$u_0 \geq u_1 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots \geq l$

et on a $\boxed{\inf\{u_n / n \in \mathbb{N}\} = \lim u_n = \frac{1}{4}}$

et $\boxed{\sup\{u_n / n \in \mathbb{N}\} = u_0 = \frac{1}{2}}$

Exo 8 $\quad u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$

1) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} - u_n) = -\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (u_{n-1} - u_{n-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(u_1 - u_0)$$

$$= \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)}.$$

$$\left(u_n - u_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a\right)$$

2) On a : $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_1 - u_0) + u_0$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a) + \cdots + (b-a) + a$$

$$= a + (b-a)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= a + (b-a)\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{0}\right) \longrightarrow a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{2b}{3} - \frac{a}{3}$$

Exercice 07 : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $a > 0$.

1) Par récurrence : Pour $n=0$: $u_0 = 1 > 0$

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

On a $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overset{>0}{u_n} + \overset{>0}{\frac{a}{u_n}}\right) > 0$

2) Si $(u_n)_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

D'où $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, ce qui donne $\ell^2 = a$

Donc $\ell = \pm\sqrt{a}$. Comme $u_n > 0$, $\forall n$, alors $\ell \geqslant 0$

D'où $\boxed{\ell = +\sqrt{a}}$

3) Il suffit de montrer que $u_{n+1} - \ell \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}\right)$

$= \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2u_n}a - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2u_n}\left(a - u_n^2\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{2u_n}}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{a} - u_n\right)}_{\leqslant 0}\underbrace{\left(\sqrt{a} + u_n\right)}_{\geqslant 0} \leqslant 0$

5) On calcule u_1, u_2, u_3. On trouve que

$u_3 - \sqrt{2} < 10^{-4}$

Donc la valeur approche de $\sqrt{2}$ est $u_3 = \ldots$

Exercice 08 : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

1) ———

2) Montrons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

* Monotonie de $(u_n)_n$: On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

Donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.

* Monotonie de (v_n). On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1-n}{(n+1)!} < 0, \ \forall n \geq 2.$$

Donc $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

* $\lim_{n \to +\infty} |v_n - u_n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
et par conséquent elles convergent vers la même limite e

3) Par absurde :

Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, i.e. $e = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

Comme $u_n < v_n$ et $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 2}$ sont strictement monotones

alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < e = \frac{p}{q} < v_n = u_n + v_n$ ... (*)

On choisit $n = q!$ et on multiplie (*) par $q!$, on obtient :

$$\underbrace{q!\,u_q}_{m} < (q-1)!\,p < \underbrace{q!\,u_q}_{m} + 1$$

On a $m = q!\,u_q = \sum_{k=0}^{q} \underbrace{\frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$. D'où $(q-1)!\,p \in \mathbb{N}$ et $m < (q-1)!\,p < m+1$

Contradiction

Exercice 10 :

Si $(u_n)_n$ est convergente, alors toute sous-suite est convergente vers la même limite de (u_n).

* $u_n = (-1)^n$, On a les sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ sont constantes et convergentes respectivement vers $1, -1$ qui sont differentes. Donc $(u_n)_n$ est divergent

* $u_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$

On a $u_{2n} = n - [n] = n - n = 0$. Donc $u_{2n} \longrightarrow 0$

et on a $u_{2n+1} = n + \frac{1}{2} - \left[n + \frac{1}{2}\right]$

$= n + \frac{1}{2} - n$ car $\underset{[x]}{\underline{\underline{n}}} < n + \frac{1}{2} < n+1$

$\boxed{u_{2n+1} = \frac{1}{2}}$. Donc $u_{2n+1} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}$

Les deux limite des sous suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont different Donc (u_n) est divergente.

* $u_n = \sin\left(\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}\right)$. On pose $\varphi(n) = (4n)^2$, $\psi(n) = (4n+1)^2$

alors $u_{\varphi(n)} = \sin\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi n) = 0$. Donc $u_{\varphi(n)} \longrightarrow 0$

$u_{\psi(n)} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc $u_{\psi(n)} \longrightarrow 1$

Donc (u_n) est divergent

Exercice 11 : ~~(u_n) est de Cauchy~~

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1) Montrons que (u_{2n}) est décroissante.

On a $u_{2(n+1)} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$

$$= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$

2) Montrons que (u_{2n+1}) est décroissante.

On a $u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

$$= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$$

3) On a $u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

4) Comme les deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors $(u_n)_n$ l'est aussi.

Exercice 12 $(u_n)_n$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : q \geq p \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Mais on a pour $\varepsilon = 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists p = 2N$, $q = 2N+1$

tq $q \geq p \geq N$ et $|u_p - u_q| = |(-1)^{2N} - (-1)^{2N+1}| = 2 > \varepsilon = 1$

Donc $((-1)^n)_n$ n'est pas de Cauchy et donc elle est divergente.

Exercice 13

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, On a $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\exists\ p = N$, $q = 2N$ tq $q \geq p \geq N$ et

$$|u_q - u_p| = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Donc (u_n) n'est pas de Cauchy.

2) On en deduit que $(u_n)_n$ est divergente.

3) On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$. D'où (u_n) est strictement croissante. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(Si non elle sera bornée et donc convergente)

4) C'est pareil.