Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S1) : 2022/2023
B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 01

Sérier 01 (Les nombres réels et complexes)

Exercice 1. Montrer que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \left|x+y\right| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \left||x| - |y|\right| \leq |x-y|$
3. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : 2|xy| \leq x^2 + y^2$ (Pour quelles valeurs de x et y on a l'égalité)
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \max\{x, y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min\{x, y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

Exercice 2. On pose $S_n := \sum_{i=0}^{n} 3^i$, $P_n := \prod_{i=2}^{n} 4^i$. Calculer

$$S_0,\ S_3,\ P_2,\ P_4,\ \sum_{i=2}^{3}\prod_{j=0}^{i} j3^j.$$

Exercice 3. Soit $[x]$ la partie entière de x. Montrer que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Longrightarrow [x] \leq [y]$ (Est ce que $x < y \Longrightarrow [x] < [y]$?)
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} : [x+n] = [x] + n$ (Est ce que $[x+y] = [x] + [y], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$?)
3. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right] = 4n + 1$$

Exercice 5.

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas le carré d'un entier naturel, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.
2. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 6. Montrer que

1. $(\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq x \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = 0$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} < \varepsilon$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \Longrightarrow x = 0$

Exercice 7. Soient A et B deux ensemble non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. $A \subset B \Longrightarrow (\sup A \leq \sup B \wedge \inf A \geq \inf B)$
2. $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$
3. Si $A \cap B \neq \phi$, alors : $\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}$, $\inf A \cap B \geq \max\{\inf A, \inf B\}$ (Donner un exemple où les inégalités sont stricts).

Exercice 8. Soient A, B des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A := \{-x \;/\; x \in A\}, \quad A + B := \{x + y \;/\; x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que

1. $\sup(-A) = -\inf A$, $\inf(-A) = -\sup A$
2. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

Exercice 9. Déterminer le sup, l'inf, le max et le min (lorsqu'ils existent) des ensembles suivants :

$$A = [0, 1] \cup [2, 3[, \; B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 < 0\}, \; C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x - 6 < 0\}$$

Exercice 10. Déterminer le sup, l'inf, le max et le min (lorsqu'ils existent) des ensembles suivants : $A_1 = \{1 + \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_2 = \{1 - \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_3 = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_4 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \;/\; n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_5 = \{cos(n\pi) \;/\; n \in \mathbb{N}\}$, $A_6 = \{cos(\frac{n\pi}{2}) \;/\; n \in \mathbb{N}\}$, $A_7 = \{\frac{1}{x} / \; 1 < x < 2\}$, $A_8 = \{-\frac{1}{x} \;/\; 1 < x < 2\}$.

Exercice 11. On pose $A = \{x^2 + y^2 \;/\; x, y \in \mathbb{R}, xy = 1\}$

1. Montrer que A est minoré et Calculer $\inf A$.
2. Est ce que A est majoré ?.

Exercice 12. Calculer le sup et (ainsi le max s'il existe) des ensembles suivants

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Exercice 13. Mettre les nombres complexe suivants sous forme algébrique $(a + ib)$:

$$\frac{1}{5 + 3i}, \; \frac{1}{(1 + i)(1 + i\sqrt{3})}$$

Exercice 14. Calculer les racines troisièmes de 1.

Exercice 15.

1. Donner la forme exponentielle des nombres complexes : $1 + i$, $1 + i\sqrt{3}$.
2. Calculer la partie réelle est imaginaire de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2022}$

Exercice 16.

1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \frac{1+z}{1-z} = i\mathbb{R} \Longleftrightarrow |z| = 1$
2. Résoudre l'équation : $z^3 = \overline{z}$

Exercice 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$A = \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$$

$$B = \sin\theta + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta)$$

Solutions (Série 01)

Exo 1 :

1) L'inégalité triangulaire (c'est fait au cours)

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$

D'où $\quad |x| - |y| \leq |x-y| \quad \cdots ①$

Par rôle symétrique, on a aussi $\quad |y| - |x| \leq |y-x| = |x-y| \cdots ②$

De ① et ②, on déduit que $\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|}$

3) Par récurrence sur n.

4) On a $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$

D'où $\quad \boxed{2|xy| \leq x^2 + y^2}$

5) • Si $x \geq y$ alors $\max\{x,y\} = x$ et $\min\{x,y\} = y$ et on a

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(x-y)}{2} = x = \max\{x,y\} \quad \Bigg\| \quad \frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = y = \max\{x,y\}$$

• Si $x \leq y$ alors (De la même façon)

6) On a $|x| = \left|\frac{(x+y)+(x-y)}{2}\right| \leq \frac{|x+y| + |x-y|}{2}$

La même chose pour y : $|y| \leq \frac{|x+y| + |x-y|}{2}$

Donc $\quad |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

Exercice 02 : C'est claire

Exercice 03 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

1) • 1^er méth : On a $[x] \leq x \leq y$, comme $[x] \in \mathbb{Z}$

alors $[x] \leq [y]$

• 2^ème méth : On a par déf $\begin{cases} x-1 < [x] \leq x \\ y-1 < [y] \leq y \end{cases}$

Par soustraction, on obtient :

$$x - 1 - y < [x] - [y] < x - (y-1)$$

D'où $[x] - [y] < +1 + \overbrace{x-y}^{\leq 0} < 1$

comme $[x]-[y] \in \mathbb{Z}$ alors $\boxed{[x]-[y] \leq 0}$

* $x < y \not\Longrightarrow [x] < [y]$ Car pour $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$

On a $\boxed{x < y \text{ et } [x] = [y] = 0}$

2) * On a $[x] \leq x < [x] + 1$

D'où $[x] + n \leq x + n < [x] + n + 1$

Donc $\boxed{[x+n] = [x] + n}$

* Si $x, y \in \mathbb{R}$ alors l'égalité $[x+y] = [x] + [y]$ n'est pas toujours vraie. Il suffit de choisir : $x = y = \frac{1}{2}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{Z}$ alors : $[x] = x$, $[-x] = -x$ $(-x \in$

  D'où $[x] + [-x] = 0$

- Si $x \notin \mathbb{Z}$ alors : $\begin{cases} x-1 < [x] < x \\ -x-1 < [-x] < -x \end{cases}$

D'où $-2 < [x] + [-x] < 0$

Comme $[x] + [-x] \in \mathbb{Z}$, alors $\boxed{[x] + [-x] = -1}$

Ex04 : ~~So~~

$$\boxed{[x] = m \iff m \leq x < m+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que

$$4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2$$

On a $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n}$ ... (*)

et on a $\quad n^2 \leq n^2 + n < n^2 + n + n + 1 = (n+1)^2$

Donc

$$2n < 2\sqrt{n^2+n} < 2(n+1)$$

Donc (*) $\Longrightarrow$ $\boxed{4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2}$

Donc $\left[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right] = 4n+1$

Ex05 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq k^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Par absurd : Supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Donc $\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*$ tq : $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$. D'où $p^2 = n q^2$

Comme les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de p^2 et q^2 sont paires, alors par l'unicité de la décomp n doit être le carré d'un entier (Contradiction)

2) On déduit que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

D'après la question précédente : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

Par absurd : Si $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ alors

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$$

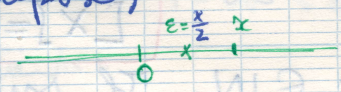
Donc $\sqrt{6} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5\right) \in \mathbb{Q}$

(Contradiction)

Exo6 :

1) Par absurd (Par contraposé)

Supposons que $x > 0$



(Si $x < 0$ c'est évident)

Alors $\exists\, \varepsilon = \frac{x}{2} > 0$: $\varepsilon = \frac{x}{2} < x$ (Contrad)

2) Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

On a $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$

On choisit $n = \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}_{\in \mathbb{N}^*} > \frac{1}{\varepsilon}$.

D'où $\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$

3) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et montrons $x = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (Question 2)

D'où $\boxed{0 \leq x < \varepsilon}$ (car $\frac{1}{n} < \varepsilon$)

Donc $x = 0$ (Question 1)

2ème méth : Par absurde ; Si $x > 0$ alors pour $n = \left[\frac{1}{x}\right] + 1 > \frac{1}{x}$

On a $\frac{1}{n} < x$ Contradiction

Ex 07 :

* $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
* Si M est un majorant de A alors $\sup A \leq M$
* $\sup A$ est ~~un ma~~ aussi majorant de A : $\forall x \in A : x \leq \sup A$

(même chose pour le inf)

1) Supposons que $A \subset B$.

* Montrons que $\sup A \leq \sup B$

Il suffit de montrer que $\sup B$ est un majorant de A

Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$ alors $x \in B$ et donc $x \leq \sup B$

D'où $\sup B$ est un majorant de A. Donc $\boxed{\sup A \leq \sup B}$

* Montrons que $\inf A \geq \inf B$.

Il suffit de montrer que $\inf B$ est un minorant de A.

Soit $x \in A$. D'où $x \in B$ et donc $x \geq \inf B$

Donc $\boxed{\inf A \geq \inf B}$

2) Montrons que $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

* On a $\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases}$. D'où $\begin{cases} \sup A \leq \sup A \cup B. \\ \sup B \leq \sup A \cup B \end{cases}$

D'où $\boxed{\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup A \cup B}$ ---- (1)

* Et on a : $\forall x \in A \cup B : x \in A \vee x \in B$

D'où $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$. Donc $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$

D'où $\boxed{\sup A \cup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}}$ ---- (2)

De (1) et (2), on déduit le résultat.

3) Si $A\cap B \neq \emptyset$. On a

$$\begin{cases} A\cap B \subset A \\ \wedge \\ A\cap B \subset B \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} \sup A\cap B \leq \sup A \\ \wedge \\ \sup A\cap B \leq \sup B \end{cases}$$

Donc $\boxed{\sup A\cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}}$ ($\min\{a,b\} = a \vee b$)

(Même chose pour le inf)

Exemple pour les inégalités strict :

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$

Ex 08 :

$$\alpha = \sup A \underset{\text{caractéristique}}{\overset{\text{propriété}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \forall x \in A : x \leq \sup A \ (\sup A \text{ majorant}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : \cancel{x_0 < \varepsilon > \sup A} \ \sup A - \varepsilon < x_0 \ (\text{le plus petit}) \end{cases}$$

1) * Montrons que $\sup(-A) = -\inf A = \alpha$

- Montrons que $-\inf A$ est majorant de $-A$.

  Soit $y \in -A$. alors $\exists x \in A : y = -x$

  D'où, comme $x \geq \inf A$, alors $y = -x \leq -\inf A$

- Montrons que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y_0 \in -A : y_0 - \varepsilon \leq -\inf A$.

  Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété caractéristique de inf

  $\exists x_0 \in A : \cancel{(x_0 < \varepsilon)} \inf A + \varepsilon > x_0$

  D'où $-\inf A - \varepsilon < -x_0$

  (Il suffit de choisir $y_0 = -x_0 \in -A$)

* Pour $\inf(-A) = -\sup A$ (c'est pareil)

2) Similaire à la question 1)

2) On démontre que $\inf(A+B) = \inf A + \inf B = \alpha$

- On démontre que α est un minorant de $A+B$

Soit $z \in A+B$. Alors $\exists x \in A, \exists y \in B : z = x+y$

et on a $x \geq \inf A$, $y \geq \inf B$. Donc $\boxed{z = x+y \geq \inf A + \inf B = \alpha}$

- On démontre que : $\forall \varepsilon > 0, \exists z_0 \in A+B : z_0 < \alpha + \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors : $\begin{cases} \exists x_0 \in A : x_0 < \inf A + \varepsilon/2 \\ \exists y_0 \in B : y_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

D'où $\exists z_0 := x_0 + y_0 \in A+B : z_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon = \alpha + \varepsilon$

Par conséquent : $\boxed{\inf(A+B) = \inf A + \inf B}$

Ex 09 :

* $A = [0,1[\cup [2,3[$

- $\sup A = \max\{\sup [0,1[, \sup [2,3[\} = \max\{1,3\} = 3$

On a $3 \notin A$. Donc $\boxed{\max A \text{ n'existe pas}}$

- $\inf A = \min\{\inf [0,1[, \inf [2,3[\} = \min\{0, 2\} = 0$

On a $0 \in A$. Donc $\boxed{\min A = 0}$

* $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - x - 6 < 0\}$

On a $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

D'où $x^2 - x - 6 < 0 \iff -2 < x < 3$

Donc $B =]-2, 3[$. $\sup B = 3$, $\inf B = -2$

$\max, \min \nexists$

* $C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x - 6 < 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x < 3\}$

$= \{-1, 0, 1, 2\}$, $\sup C = \max C = 2$, $\inf C = \min C = -1$

Exercice 10 :

1) $A_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : \; 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$ $\quad$ (car $n \geqslant 1$)

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* : \; 1 < 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$

- On a A_1 est majoré par 2 et on a $2 = 1 + \frac{1}{1} \in A_1$

Donc $\boxed{\sup A_1 = \max A_1 = 2}$

- Et on a A_1 est minoré par 1.

Montrons que $1 = \inf A$

Il suffit de verifier la propriété caractéristique

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \; \exists x_0 \in A_1 : \; x_0 < 1 + \varepsilon \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $x_0 = 1 + \frac{1}{n} \in A_1$: $\boxed{x_0 = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon}$???

On a $\cancel{1} + \frac{1}{n} < \cancel{1} + \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Pour $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, on a : $x_0 = 1 + \frac{1}{n} \in A_1$

et $x_0 = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$.

Donc ~~sup~~ $\boxed{\inf A_1 = 1}$.

et on a $1 \notin A_1$ car $1 < 1 + \frac{1}{n}, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\boxed{\min A_1 \text{ n'existe pas}}$

2) $A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : \; 0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$

De la même manière, on démontre que

$\inf A_2 = \min A_2 = 0$.

$\sup A_2 = 1$ $\quad$ $\max A_2 \nexists$ $\quad$ (car $1 \notin A_2$)

3) $A_3 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$= \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{2n} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{2n+1} \;/\; n \in \mathbb{N} \right\}}_{B}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 1 < 1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{2}$

De la même manière. On montre que $\boxed{\sup A = \frac{3}{2},\ \inf A = 1}$

et on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 < -1 + \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$$

D'où $\sup B = 0$ et $\inf B = -1$

D'après l'ex 07 : $\sup A_3 = \max\{\sup A, \sup B\} = \frac{3}{2}$

$\inf A_3 = \min\{\inf A, \inf B\} = -1$

et on a $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2\times 1} \in A \subset A_3$. Donc $\boxed{\max A_3 = \frac{3}{2}}$

$-1 < (-1)^n + \frac{1}{n}$. D'où $-1 \notin A_3$. Donc $\boxed{\min A_3 \nexists}$

4) $A_4 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$ et $0 < \frac{1}{n^2} \leqslant 1$

Donc $\quad 0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant 2$

- On a Donc 2 est un majorant de A_4

et on a $2 \in A_4$ Car $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2}$. D'où $\max A_4 = 2$

- et on a 0 est un minorant de A_4.

Montrons que $0 = \inf A_4$. On vérifie la propriété caract

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $x_0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \in A_4$ tq $x_0 < 0 + \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. et on a $\frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$,

On choisit : $n = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$. D'où $\boxed{x_0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n} < \varepsilon}$

Donc $0 = \inf A_4$. Comme $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

alors $0 \notin A_4$. D'où $\boxed{\min A_4 \nexists}$

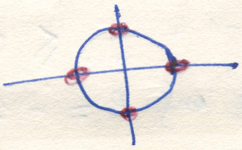
5) $A_5 = \{\cos n\pi \, / \, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

$\sup A_5 = \max A_5 = 1$, $\min A_5 = \inf A_5 = -1$

6) $A_6 = \{\cos(\frac{n\pi}{2}) \, / \, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 0, -1\}$ $\left(\begin{array}{ll} n = 4k & \\ n = 4k+1 & k \in \mathbb{N} \\ n = 4k+2 & \\ n = 4k+3 & \end{array}\right)$

$\max A_6 = \sup A_6 = 1$

$\inf A_6 = \min A_6 = -1$



7) $A_7 = \{1/x \, / \, 0 < x < 1\}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < x < 1 \iff 1 < \frac{1}{x} < +\infty \iff \frac{1}{x} \in]1, +\infty[$

D'où A_7 n'est pas majoré et sup, max $\nexists$

et $\inf A_7 = \min A_7 = 1$.

8) $A_8 = \{-\frac{1}{x} \, / \, 1 < x < 2\}$. On a $A_8 = (-A_7)$

D'après la question 1) de l'exo 1, on a

$\sup(A_8) = -\inf A_7 = -1 = \max A_8$

$\inf A_8$, $\min A_8$ n'existe pas.

Exercice 11 : 1) On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$, avec $xy = 1$:

$x^2 + y^2 \geq 2xy = 2$.

D'où 2 est minorant de A. et On a $2 \in A$ car $2 = 1^2 + 1^2$ et $1 \times 1 = 1$

D'où $\boxed{\min A = 2 = \inf A}$

2) Soit $M \in \mathbb{R}^*$. Pour $x = M$, $y = \frac{1}{M}$. On a $x \cdot y = 1$

$A \ni x^2 + y^2 = M^2 + \frac{1}{M^2} > M$. Donc M n'est pas majorant de A. D'où A n'est pas majoré.

Exo 12 : $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

On a $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2}$ est un majorant de A.

vérifions que $\sqrt{2} = \sup A$: Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{Q} : \boxed{\sqrt{2} - \varepsilon < x_0 < \sqrt{2}}$ et on a $x_0^2 < 2$

D'où $\sqrt{2} = \sup A$. et on a $\sqrt{2} \notin A$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $\max A \nexists$

(Même chose pour B)

Ex 13 : Il suffit de multiplier par les conjugués :

$5 - 3i$ et $(1-i)(1 - i\sqrt{3})$

E 14 : Calculons les racines $3^{\text{ème}}$ de 1. On résout l'éq $z^3 = 1$

Soit $r, \theta \in \mathbb{R}$ tq : $z = r e^{i\theta}$. $z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1 = 1 e^{i \cdot 0}$

D'où $\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi \end{cases}$. Donc $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 + 2k\pi \vee \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

Donc $z = e^{i \cdot 0} = \boxed{1} \vee z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \vee z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

Ex 15 1) $|1 + i| = \sqrt{2}$: $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$|1 + i\sqrt{3}| = 2$, $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2022} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{2022} e^{i \times 2022(\pi/3 - \pi/4)}$ $= e^{2022 i \frac{\pi}{12}}$

et on a $\frac{2022}{12}\pi = \frac{1011}{6}\pi = \frac{1011}{12} 2\pi$

$= \left(\frac{3}{12} + 84\right) 2\pi = \frac{\pi}{2} + 2 \times (84)\pi$

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 12 \\ \underline{96} & 84 \\ 51 & \\ \underline{48} & \\ 3 & \end{array}$$

Donc $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2022} = \underbrace{(\sqrt{2})^{2022}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{1011}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= \boxed{2^{1011} \times i}$

EXO 16 : 1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ($z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$)
($z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$)

On a $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff \frac{1+z}{1-z} = -\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}$

$\iff (1+z)(1-\overline{z}) = -(1-z)(1+\overline{z})$

$\iff 1 \cancel{+z} - \overline{z} - z\overline{z} = -1 \cancel{+z} - \overline{z} + z\overline{z}$

$\iff \underbrace{z\overline{z}}_{|z|^2} = 1 \iff |z| = 1$

2) On résout l'eq : $z^3 = \overline{z}$. Soit $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ tq

$z = \rho e^{i\theta}$. Donc $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$, $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$

D'où $z^3 = \overline{z} \iff \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta} \iff \rho^4 e^{4i\theta} = 1 = e^{i \cdot 2k\pi}$

D'où $\rho = 1$ et $\theta \in \left\{ 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3}{2}\pi \right\}$

Donc $z = 1$ ou $z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ou $z = e^{i\pi} = -1$ ou $z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

EXO 7 : On a $A + iB = (\cos\theta + i\sin\theta) + \cdots + (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$= e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{in\theta}$

Pour $\theta = 2k\pi$ ($e^{i\theta} = 1$) alors $A + iB = n$. D'où $A = n$ et $B = 0$

Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, alors

$$A + iB = e^{i\theta} \cdot \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{\cancel{e^{\frac{in\theta}{2}}}\left(e^{-\frac{in\theta}{2}} - e^{+\frac{in\theta}{2}}\right)}{\cancel{e^{\frac{i\theta}{2}}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{\frac{i\theta}{2}} \frac{-2i\sin\frac{n\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Donc $A = \mathrm{Re}(A+iB) = \cos\frac{\theta}{2} \frac{\sin n\theta/2}{\cos\theta/2}$

$B = \mathrm{Im}(A+iB) = \sin\frac{\theta}{2} \frac{\sin n\theta/2}{\sin\theta/2}$