Université Mohamed Boudiaf - Msila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
1ère année math
Année Universitaire 2022/2023

(Série d'exercices N° 1)

Exercice n°1 : Soient P, Q et R trois propositions. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
2. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{(P \wedge \overline{Q})} \wedge \overline{(Q \wedge \overline{P})})$
3. $(P \wedge \overline{(Q \wedge R)}) \Leftrightarrow ((P \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge \overline{R}))$

Exercice n°2 : Ecrire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1. f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
2. Le graphe de la fonction f coupe la droite d'équation $y = x$.
3. L'équation $sin\ x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
4. Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

Exercice n°3 : Nier les formules suivantes :

1. $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$.
2. $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq y < 3$.
3. $\exists x \in \mathbb{R} \mid cos(x) = 0$ et $\exists x \in \mathbb{R} \mid sin(x) = 0$.
4. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in D_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon)$.

Exercice n°4 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y > 0$;
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.

Exercice n°5 : Montrer les formules suivantes :

1. $|x| < 0.1 \Rightarrow |2x^2 - x| < 0.12$ (Raisonnement direct).
2. Pour tout entier n, $n^2 + 3n$ est pair (Cas par cas).
3. $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ est pair $\Rightarrow n$ est pair (Contraposée).
4. $\sqrt{2}$ est irrationnel (L'absurde).
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$ (L'absurde).
6. $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$ (Récurrence).
7. $a; b; c; d$ des nombres réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, a-t-on toujours $ac \leq bd$? (Contre-exemple).

Exercice n°6 :(Devoir maison)

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que
$$((\exists k \in \mathbb{N} \mid b = ka) \text{ et } (\exists k \in \mathbb{N} \mid a = kb)) \Rightarrow (a = b)$$
2. Démontrer par récurrence les égalités
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Demontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carre d'un entier.