Chapitre 3

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Définitions de base

Définition 3.1 (Relation binaire) *Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E. On notera $x\mathcal{R}y$ le fait que la propriété est vraie pour le couple $(x, y) \in E \times E$.*

Exemple 3.1
1. *L'inégalité $\leq$ est une relation sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.*
2. *La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.*
3. *La relation de divisibilité sur les entiers relatifs : $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m$ divise n.*

Définition 3.2 *Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.*
1. *$\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$;*
2. *$\mathcal{R}$ est symétrique si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;*
3. *$\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$;*
4. *$\mathcal{R}$ est transitive si pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.*

3.2 Relation d'equivalence

Définition 3.3 (Relation d'equivalence) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 3.2 *La relation $\mathcal{R}$ « être parallèle » est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites affines du plan :*
1. *réflexivité : une droite est parallèle à elle-même ;*
2. *symétrie : si D est parallèle à D' alors D' est parallèle à D ;*
3. *transitivité : si D parallèle à D' et D' parallèle à D'' alors D est parallèle à D''.*

Exemple 3.3 *On considère la relation suivante sur* $\mathbb{Z}$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2k.$$

1. $\mathcal{R}$ *est réflexive, car* $\exists k = 0 \mid x - x = 2k = 0$, *donc* $x\mathcal{R}x$.
2. *Supposons que* $x\mathcal{R}y$, *alors* $\exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2k \Rightarrow y - x = 2k'$ *avec* $k' = -k \in \mathbb{Z}$. *Donc,* $y\mathcal{R}x$. *D'où,* $\mathcal{R}$ *est symétrique.*
3. *Supposons que* $x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z$. *Alors,* $(\exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2k)$ *et* $(\exists k' \in \mathbb{Z} \mid y - z = 2k')$ *avec l'addition nous trouvons* $x - z = 2k''$ *avec* $k'' = (k + k') \in \mathbb{Z}$. *Donc,* $x\mathcal{R}z$. *D'où,* $\mathcal{R}$ *est transitive. Alors,* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

Définition 3.4 *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur un ensemble* E. *On appelle classe d'équivalence d'un élément* $x \in E$ *l'ensemble des éléments de* E *en relation avec* x *par* $\mathcal{R}$, *notée par* $\mathcal{C}(x)$ *ou bien* $\overline{x}$

$$\overline{x} = \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}.$$

Définition 3.5 *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur un ensemble* E. *L'ensemble quotient de* E *par* $\mathcal{R}$ *est l'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathcal{R}$, *notée* $E/\mathcal{R}$

$$E/\mathcal{R} = \{\overline{x} \mid x \in E\}.$$

Exemple 3.4 *Dans l'exemple précédent on a*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\} \\ &= \{y \in E \mid x - y = 2k\} \\ &= \{x - 2k : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{..., x-4, x-2, x, x+2, x+4, ...\}. \end{aligned}$$

$\overline{0} = \{y \in E \mid 0\mathcal{R}y\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$, $\overline{1} = \{y \in E \mid 1\mathcal{R}y\} = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$ *et* $\overline{2} = \overline{0}$. *Alors,* $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{x} \mid x \in E\} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

Proposition 3.1 *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *Alors*

1. *Une classe d'équivalence est un sous-ensemble de l'ensemble* E, *c.à.d*
$$\forall x \in E, \overline{x} \subset E.$$
2. *Une classe d'équivalence n'est jamais vide, c.à.d*
$$\forall x \in E, \overline{x} \neq \phi.$$
3. *L'intersection de deux classes d'équivalence distinctes est vide, c.à.d*
$$\forall x, y \in E, \overline{x} \cap \overline{y} = \phi$$
4. $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

Théorème 3.1 *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *Les classes d'équivalence* $(\overline{x})_{x \in E}$ *constituent une partition de* E

$$E = \underset{x \in E}{\cup} \overline{x}.$$

3.3 Relation d'ordre

Définition 3.6 (Relation d'ordre) *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.*

Exemple 3.5 .

1. *L'inégalité $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.*
2. *La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E est une relation d'ordre : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.*

Définition 3.7 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.*
Deux éléments x et y de E sont dits comparables si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Définition 3.8 (L'ordre total et l'ordre partiel) *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.*
Si deux éléments quelconques x et y sont toujours comparables on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total et l'ensemble E est dit totalement ordonné. Sinon (c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables x et y), on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel et l'ensemble E est dit partiellement ordonné.

Exemple 3.6 .

1. *$\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.*
2. *La divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel.*

Définition 3.9 *Soient $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E et M, m deux élément de E.*

1. *M est un majorant d'une partie A de E si $x\mathcal{R}M$ pour tout $x \in A$;*
2. *m est un minorant d'une partie A de E si $m\mathcal{R}x$ pour tout $x \in A$.*

Exemple 3.7 .

1. *L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité "/" sur $\mathbb{N}$;*
2. *$\mathcal{P}(E)$ est minoré par ϕ et majoré par E pour la relation d'inclusion $\subset$.*