Corrigé type " Série n° 03 Algèbre I

Exo1 : $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1.$

①

(i) La reflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x \mathcal{R} x.$

(ii) La symétrie : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \Rightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow y \mathcal{R} x.$

(iii) La transitivité :

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ \wedge \\ y^2 - 1 = z^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = z^2 - 1 \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

Donc, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

② $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\overline{x} : x \in \mathbb{R}\}.$

On a $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \mathcal{R} x\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 1 = x^2 - 1\} = \{x, -x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Alors, $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}.$

Exo2 : $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = kn.$

① La reflexivité : On sait que $\forall x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 = 0 . n$, avec $k = 0 \in \mathbb{Z}$
Donc, $x \mathcal{R} x.$

② La symétrie : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y = kn \Rightarrow y - x = (-k).n = k'.n$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$
Donc, $y \mathcal{R} x.$

③ La transitivité :

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \wedge \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k_1 . n \mid k_1 \in \mathbb{Z} \\ y - z = k_2 . n \mid k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
; La sommation membre à membre ~~donne~~ donne :

$$x - z = (k_1 + k_2) n = k_3 . n \text{ avec } k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $x \mathcal{R} z.$

Scanned by CamScanner

② Pour $n=3$: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z} : y \mathcal{R} x\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + 3k\}$

$= \{x + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En particulier : $\overline{0} = \{y \in \mathbb{Z} : y \mathcal{R} 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

$\overline{1} = \{y \in \mathbb{Z} : y \mathcal{R} 1\} = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 1$.

$\overline{2} = \{y \in \mathbb{Z} : y \mathcal{R} 2\} = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 2$.

(b)

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} \overline{0} = \overline{3m} \\ \overline{1} = \overline{3m+1} \\ \overline{2} = \overline{3m+2} \end{cases} \quad \text{car } \forall m \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 0 \mathcal{R} (3m) \\ 1 \mathcal{R} (3m+1) \\ 2 \mathcal{R} (3m+2) \end{cases}.$$

En effet $\forall m \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} 0 - (3m) = 3(-m) \\ 1 - (3m+1) = 3(-m) \\ 2 - (3m+2) = 3(-m) \end{cases}, \quad -m \in \mathbb{Z}.$$

(c)

On a
$$\begin{cases} \overline{0} \cap \overline{1} = \phi \\ \overline{1} \cap \overline{2} = \phi \\ \overline{0} \cap \overline{2} = \phi \end{cases}, \text{ car } \begin{cases} 0 \not\mathcal{R} 1 \\ 1 \not\mathcal{R} 2 \\ 0 \not\mathcal{R} 2 \end{cases}$$

En effet
$$\begin{cases} 0 - 1 = -1 \neq 3k_1 \\ 1 - 2 = -1 \neq 3k_2 \\ 0 - 2 = -2 \neq 3k_3 \end{cases} / \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

On sait que $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{x} : x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\overline{x} : x = 3m\} \cup \{\overline{x} : x = 3m+1\} \cup \{\overline{x} : x = 3x+2\}$.

$= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Po2

Scanned by CamScanner

Ex04

$$(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(a,b,c) \Leftrightarrow (|x-a| \leq b-y \text{ et } z=c).$$

① (i) La réflexivité : $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(x,y,z) \Leftrightarrow (|x-x|=0 \leq y-y=0 \text{ et } z=z)$
alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

(ii) L'anti-symétrie : Supposons $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(a,b,c)$ et $(a,b,c)\,\mathcal{R}\,(x,y,z)$
Ceci implique $\left[\left(|x-a| \leq b-y \ (*) \text{ et } \underset{(**)}{|a-x| \leq y-b}\right) \text{ et } z=c\right]$
Alors, $(*)+(**)$ donne : $x=a$, on remplace $x=a$ dans $(*)$ et $(**)$ on trouve $y=b$
Donc, $(x,y,z)=(a,b,c)$. D'où, $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.

(iii) La transitivité : Supposons $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(a,b,c)$ et $(a,b,c)\,\mathcal{R}\,(\alpha,\beta,\gamma)$
Ceci implique $[(|x-a| \leq b-y \ (*) \text{ et } |a-\alpha| \leq \beta-b \ (**)) \text{ et } z=c=\gamma]$
alors, $(*)+(**)$ donne $(|x-a|+|a-\alpha| \leq b-y+\beta-b \text{ et } z=c=\gamma)$.
et comme $(|x-\alpha| = |x-a+a-\alpha| \leq |x-a|+|a-\alpha| \leq y+\beta \text{ et } z=\gamma)$
implique $(x,y,z)\,\mathcal{R}\,(\alpha,\beta,\gamma)$. Donc, $\mathcal{R}$ est transitive.
D'où, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^3$.

② $\mathcal{R}$ n'est pas total car $\exists\, (x,y,z)=(0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c)=(0,0,3) \in \mathbb{R}^3$
tels que $(0,0,2) \not\mathcal{R}\, (0,0,3)$ et $(0,0,3) \not\mathcal{R}\, (0,0,2)$.

Ex05

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2.$$

①
(i) La réflexivité : On sait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x \leq x \\ y \leq y \end{cases}$
$\Rightarrow (x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y) \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive.

(ii) L'anti-symétrie : Supposons $(x_1,y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1,y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ \wedge \\ x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \wedge \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2). \text{ Donc } \mathcal{R} \text{ est}$$
Anti-symétrique

Scanned by CamScanner

(iii) La transitivité : Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}(x_1,y_1)\mathcal{R}(x_2,y_2)\\ \wedge \\ (x_2,y_2)\mathcal{R}(x_3,y_3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \\ \wedge \\ x_2 \leq x_3 \wedge y_2 \leq y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_3 \\ \wedge \\ y_1 \leq y_3\end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)\mathcal{R}(x_3,y_3).$$

Donc, $\mathcal{R}$ est transitive. D'où, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

② $(2,4)$ et $(3,1)$ ne sont pas comparables car $(2,4)$ et $(3,1)$ ne vérifient pas la relation $\mathcal{R}$. En effet $\begin{cases} 2 \leq 3 \\ \wedge \\ 4 \not\leq 1\end{cases}$ et $\begin{cases} 3 \not\leq 2 \\ \wedge \\ 1 \leq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(2,4) \not\mathcal{R} (3,1) \\ \wedge \\ (3,1) \not\mathcal{R} (2,4)\end{cases}$

③ L'ordre est partiel car $\exists\, a=(2,4)$ et $b=(3,1) \,/\, a \not\mathcal{R} b \wedge b \not\mathcal{R} a$.

④

$t=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un majorant de $A \iff \forall a \in A : a \mathcal{R} t$.

$$\Rightarrow \begin{cases}(1,2)\mathcal{R}(x,y)\\ \wedge \\ (3,1)\mathcal{R}(x,y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\leq x \wedge 2 \leq y. \\ \wedge \\ 3 \leq x \wedge 1 \leq y.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \wedge \\ y \geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Maj}}(A) = \{(x,y) : x \geq 3 \wedge y \geq 2\}.$$

Scanned by CamScanner