1. Contraintes dans le sol

1.1. Notion de contrainte

1.1 Définition Soit dS une facette passant par un point P de normale unitaire n et de vecteur unitaire tangent t et df la résultante des forces appliquées en P, on admet que si dS tend vers zéro, df/dS tend vers une limite appelée contrainte σ en P (Figure 1). La contrainte est représentée par un vecteur σ dont on donne les composantes (σ, τ) dans le système d'axes (σ_n, σ_t) (noté aussi (n, t)) lié à la facette. On notera ses composante (σ_{ii}, σ_{ij}) dans un repère quelconque (i,j). L'intensité d'une contrainte ou de ses composantes est exprimée en Pascal. En mécanique des sols, on utilisera couramment le kPa et le MPa : 1 kPa = 1 kN/m^2 = 0,01 bar Par convention on comptera les compressions positives et les tractions négatives en mécanique des sols (MDS) et le contraire en mécanique des milieux continus (MMC) et dans les logiciels de calcul. Il est fondamental de bien distinguer les compressions des tractions, les sols ne supportant pas ou très peu les contraintes de traction.

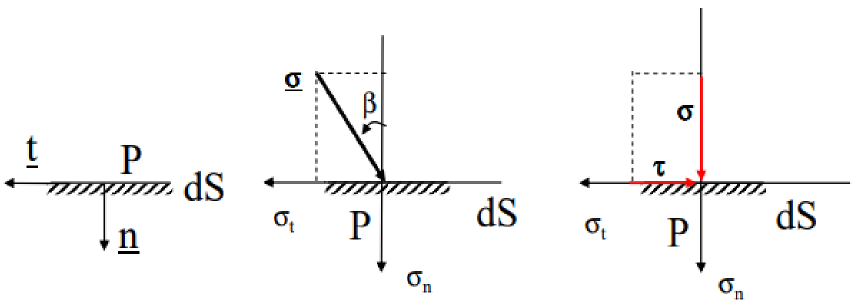


Figure 1 : Définition d'une contrainte selon la mécanique des sols.

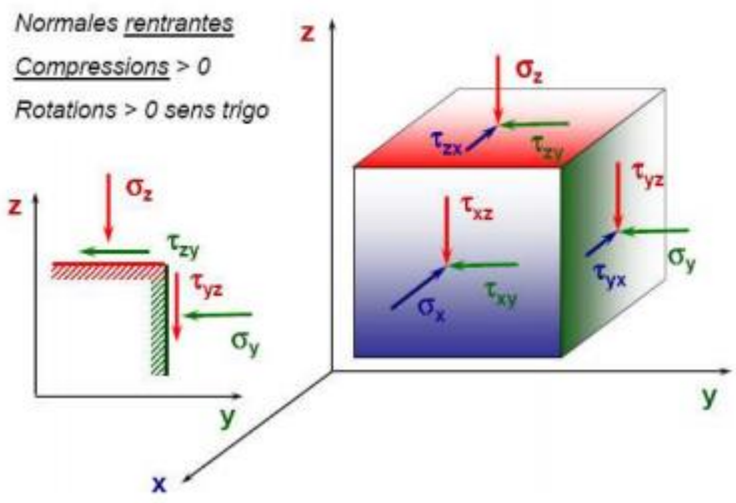


Figure 2. Convention dans le plan Oxyz adoptée dans ce support de cours

Considérons un élément de sol dans le plan Oxyz (Figure 2). Dans le plan Oxyz, on adoptera la convention qui consiste à compter les contraintes positives si elles sont orientées suivants les directions négatives des axes Ox, Oy et Oz. Si on écrit la matrice représentant l'état de contrainte dans le plan Oyz (en mécanique des sols, on pourra souvent traiter un problème 3D en le réduisant à un problème 2D par des raisons de symétrie), on obtient la matrice suivante :

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Dans le plan lié à la facette (σ_n , σ_t), on adoptera une convention un peu différente de la norme de la mécanique des sols pour simplifier (Figure 3), la contrainte normale rentrante est comptée positivement et la contrainte tangentielle faisant un angle de +π/2 avec la normale rentrante est comptée positivement (c'est l'inverse pour la norme de la mécanique des sols).

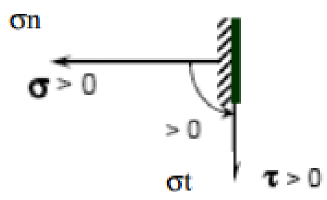


Figure 3. Convention dans le plan lié à la facette adoptée dans ce support de cours

On admettra qu'il y a réciprocité des contraintes de cisaillement : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (cela se démontre en faisant l'équilibre des moments élémentaires sur une facette). La matrice qui définit un état de contrainte est donc une matrice symétrique.

1.2. Exemple

On considère la matrice σ qui s'applique au point M dans le plan (x, y) :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans le plan Oxy, on a vu que l'on compte positivement les contraintes si elles sont orientées suivants les directions négatives des axes Ox et Oy. On obtient donc dans le plan Oxy, la représentation suivante (Figure 4) :

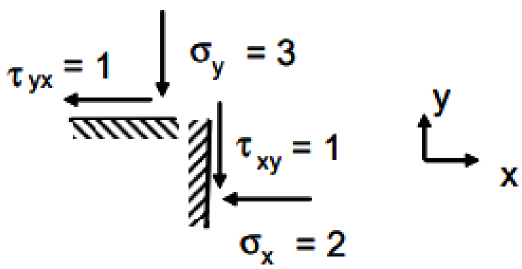


Figure 4. Représentation de la contrainte dans le plan Oxy

Dans le plan lié à la facette, on obtiendra la représentation suivante (Figure 5) :

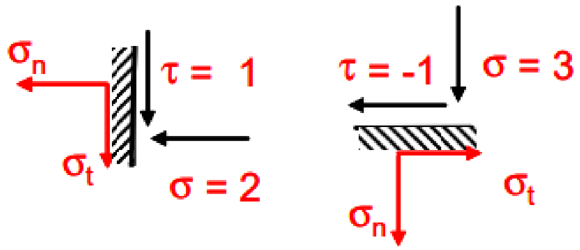


Figure 5. Représentation de la contrainte dans le plan lié à la facette

On voit sur cet exemple que bien que les contraintes tangentielles soient de même signe dans le plan physique, elles sont de sens opposé dans le plan lié à la facette.

1.3 Contraintes et Directions principales

Soit une matrice des contraintes dans l plan Oxy définie par : $\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}$ avec : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

On peut toujours trouver une base du plan (n_1, n_2) telle que la matrice des contraintes soit diagonale dans la base (n_1, n_2).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

En mathématiques, on appelle valeurs propres les valeurs de la diagonale (σ_1 et σ_2) de la matrice diagonalisée.

Dans le plan, il existe donc deux directions principales sur lesquelles les contraintes sont normales à la facette (Figure 6). Ces contraintes sont appelées contraintes principales et notées : σ_1, σ_2. ($\sigma_1 > \sigma_2$)

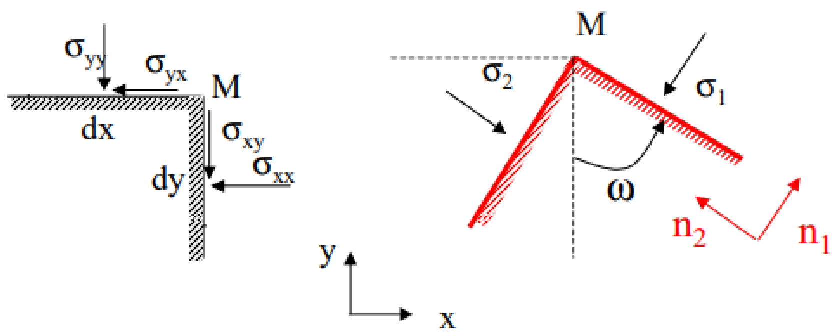


Figure 6. Directions principales et contraintes principales

La détermination des valeurs propres d'une matrice symétrique σ (c'est-à-dire les contraintes principales) se fait en résolvant l'équation suivante :

det $(\sigma - \lambda I) = 0$ où λ est un scalaire et I est la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

det $(\sigma - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy} \cdot \tau_{yx} = 0$

Le déterminant consiste à faire le produit en croix des valeurs de la matrice

Déterminer les contraintes principales revient donc dans le cas d'une matrice 2×2 à résoudre une équation du second degré. Les contraintes principales étant les valeurs pour lesquelles le polynôme $(\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy} \cdot \tau_{yx}$ s'annule. Les deux valeurs trouvée σ_1 et σ_2 sont donc appelées contraintes principales et numérotées par convention telles que $(\sigma_1 > \sigma_2)$.

Pour une matrice 3×3, il faudra résoudre une équation du troisième degré.

1.4 Application

Si nous reprenons l'exemple du paragraphe 1.2, on aura :

det $(\sigma - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1^2 = 0 \Leftrightarrow - \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$

Ce polynôme s'annule pour les deux racines suivantes : $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Donc par convention, les deux contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \sigma_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

1.5 Application en mécanique des sols

Le sol est assimilé à un milieu continu. La facette élémentaire est une coupure fictive à travers les grains et les vides (Figure 7). Une facette élémentaire est définie par un vecteur normal « n » sortant de la facette et un vecteur « t » tangent à la facette et faisant un angle de $+\pi/2$ par rapport à « n ».

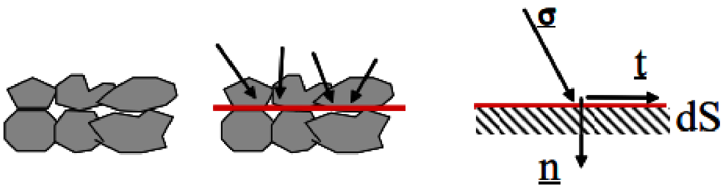
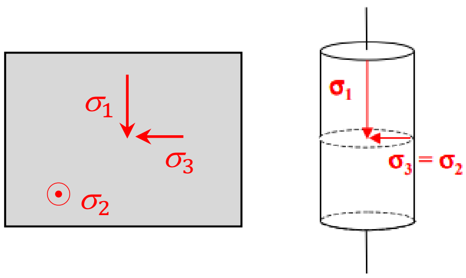


Figure 7. Définition d'une facette en mécanique des sols

En mécanique des sols, les problèmes en 3D peuvent souvent être ramenés à des problèmes 2D (grandeur infiniment grande par rapport aux deux autres ou symétrie de révolution) de telle sorte que la matrice 3x3 des contraintes dans l'espace peut être simplifiée par la matrice 2x2 des contraintes dans le plan (Figure 8).



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Figure 8. Simplification des problèmes en mécaniques des sols