CHAPITRE 2

DISTRIBUTIONS : DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Dans ce chapitre on donne la définition d'une distribution, la dérivation, et quelques exemples et propriétés. D'abord, on donne une petite motivation.

La masse de Dirac sur $\mathbb{R}$, définie comme suit :

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \in A, \\ 0 & : \quad 0 \notin A, \end{cases} \tag{2.1}$$

et la fonction de Heaviside H définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \geq 0, \\ 0 & : \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

peuvent considérer comme des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$, i.e formes linéaires continues sur $\mathscr{K}(\mathbb{R})$.

I) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors : f et f' peuvent considérer comme des mesures de Radon. Ainsi : pour tout $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$. Pour ε assez petit, on considère la perturbation $f_\varepsilon(x) = f(x+\varepsilon)$ de f, elle aussi dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et Remarque 1.4) permis nous d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\varepsilon)\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \right] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

On a alors : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_\varepsilon - f}{\varepsilon} = f'$, dans $\mathscr{K}'(\mathbb{R}) = \mathscr{M}(\mathbb{R})$.

II) $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mais n'est pas dérivable au sens usuelle, on va chercher un autre sens de dérivation de H. Soit alors $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$.

D'autre part, pour Φ une primitive de φ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle H_\varepsilon - H, \varphi\rangle}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(x+\varepsilon)-H(x)}{\varepsilon}\varphi(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}H(x+\varepsilon)\varphi dx - \int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\varphi dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{-\varepsilon}^{+\infty}\varphi dx - \int_{0}^{+\infty}H(x)\varphi dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0}\varphi(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi(0)-\Phi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \\
&= \varphi(0) \\
&= \delta(\varphi).
\end{aligned}$$

On dit que H' existe au sens faible sur $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ et on écrit : $H' = \delta$.

II) Soit δ_ε la perturbation de δ pour ε assez petit. Alors : pour $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle \delta_\varepsilon - \delta, \varphi\rangle}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Cette limite existe seulement pour les fonctions dérivables, à support compact, i.e pour $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$. Alors : δ' n'est pas une mesure. Précisément, $\delta' \in (\mathscr{D}^1(\mathbb{R}))'$.

Ainsi de suite, $\delta'', \delta^3, \cdots$ appartient aux espaces $(\mathscr{D}^2(\mathbb{R}))', (\mathscr{D}^3(\mathbb{R}))', \cdots$.

L'espace qui comprend tous ces espaces est appelé espace des **distributions**, c'et le dual de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1 : *On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathscr{D}(\Omega)$. Autrement dit : un forme linéaire $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution si est seulement si : Pour toute compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que :*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : |\langle T, \varphi\rangle| \leq M.P_{K,m}(\varphi), \tag{2.3}$$

où $T(\varphi)$ est désigné par $\langle T, \varphi\rangle$ (crochet de dualité).

On note par $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur $\mathscr{D}(\Omega)$.

Définition 2.2 (***convergence dans** $\mathscr{D}'(\Omega)$*) : *On dit qu'une suite des distributions (T_j) est converge vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si :*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \lim_{j\to+\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Proposition 2.1 : *Soit (T_j) une suite des distributions. Supposons que la suite numérique $\langle T_j, \varphi\rangle$ converge vers une limite $\ell(\varphi)$. On définit un forme linéaire T comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T, \varphi\rangle = \ell(\varphi).$$

Alors : $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve: Il suffit d'appliquer Corollaire 1.2 du théorème de Banach-Steinhaus, en considérant l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ comme un espace de Fréchet, et $\mathbb{R}$ comme un espace de Banach (donc, localement convexe, métrisable). ■

Définition 2.3 (***ordre d'une distribution***) : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On sais que pour toute compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}, M > 0$ tels que*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : |\langle T, \varphi\rangle| \leq M.P_{K,m}(\varphi)$$

Si m est indépendant de K, on dit que la distribution T est d'ordre fini.
L'ordre de T est le plus petit m qui vérifie cette propriété.

Remarque 2.1 : *On peut montrer que distribution d'ordre m est un forme linéaire continue sur $\mathscr{D}^m(\Omega)$, l'inverse est aussi vrais. En effet, si on munit l'espace $\mathscr{D}^m(\Omega)$ de la structure topologique engendrée par la famille des semi-normes $P_{k,j}(\Omega)$ $(0 \leq j \leq m)$, on voit facilement que si T est une distribution d'ordre m sur Ω alors $T \in (\mathscr{D}^m(\Omega))'$ et l'inverse.*

On désigne par $\xi^m(\Omega)$ l'espace des distributions d'ordre m. On munit cet espace ou bien de la topologie forte, ou bien de la topologie faible (voir §1.3).

Remarque 2.2 : *Les mesures de Radon sur Ω sont les distributions d'ordre 0 sur Ω.*

Définition 2.4 (***Distribution positive***) : *On dit q'une distribution T sur Ω est positive si :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle \geq 0$$

Exemple 2.1 : *La fonctionnelle définit par $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ est la distribution nulle sur Ω.*

Exemple 2.2 : *Soit $c \in \mathbb{R}$ et T la fonctionnelle définit par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega c.\varphi(x)dx.$$

T est la distribution constante qui vau c sur $\mathscr{D}(\Omega)$, c'est une mesure de Radon.

En effet, soit $K \subset \Omega$ un compact et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Comme précédant :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega c.\varphi(x)dx\right| \\ &\leq |c|. \int_\Omega |\varphi(x)|dx \\ &= |c|. \int_K |\varphi(x)|dx \\ &\leq |c|.mes(K). \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \\ &= |c|.mes(K).P_{K,0}(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.3 : *La mesure de Dirac δ_a dans le point $a \in \mathbb{R}^n$ comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$

δ_a est mesure de Radon (en particulier : $\delta_0 = \delta$).

En effet, soit $K \subset \Omega$ un compact et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. On a deux cas :
si $a \in K$, on a $|\varphi(a)| \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$,
si $a \notin K$, on a $|\varphi(a)| = 0 \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$.
Alors :

$$\begin{aligned} |\langle \delta_a, \varphi\rangle| &= |\varphi(a)| \\ &\leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \\ &= P_{K,0}(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.4 : *Soit la distribution T défini pour toute point $a \in \mathbb{R}^n$ et pour toute $\alpha \in \mathbb{N}^n$ comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T, \varphi\rangle = D^\alpha \varphi(a)$$

T est une distribution d'ordre $m \leq |\alpha|$ (on peut montrer que $m = |\alpha|$).

En effet, soit $K \subset \Omega$ un compact et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Comme précédant :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= |D^\alpha \varphi(a)| \\ &\leq \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x\in K} \sup_{|\beta|\leq|\alpha|} |D^\beta \varphi(x)| \\ &= P_{K,|\alpha|}(\varphi). \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\psi(a) = 1$ (la fonction ψ existe d'après le lemme d'Urysohn, voir Théorème 1.6). On pose : $\varphi_0(x) = (x-a)^\alpha \psi(x)$ pour tous $x \in \Omega$. Alors : pour tous $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq |\alpha|$ on a :

$$\begin{aligned} D^\beta \varphi_0(x) &= \sum_{\gamma\leq\beta} C_\alpha^\beta D^\beta (x-a)^\alpha . D^{\beta-\gamma}\psi(x) \\ &= \sum_{\gamma\leq\beta} C_\alpha^\beta (x-a)^{\beta-\gamma} . D^{\beta-\gamma}\psi(x) \end{aligned}$$

Alors : $D^\beta\varphi_0(a) = 0$ *pour* $|\beta| < |\alpha|$ *et* $D^\beta\varphi_0(a) = 1$.
On déduit que $|\langle T, \varphi_0\rangle| = P_{K,|\alpha|}(\varphi_0)$*, donc :* T *est d'ordre* $|\alpha|$.

Exemple 2.5 : *Soit* $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$*. On peut associe à* f *une distribution* T_f *défini par :*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

La distribution T_f *est une mesure de Radon sur* Ω*. On écrit :* $|\langle T_f, \varphi\rangle| = |\langle f, \varphi\rangle|$ *pour* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

En effet, soit $K \subset \Omega$ *un compact et* $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$*. Alors :*

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x)\varphi(x)|dx \\ &= \int_K |f(x)\varphi(x)|dx \\ &\leq \sup_{x\in K}|\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx \\ &= \|f\|_{L^1(K)}.P_{K,0}(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.6 : *La fonction de Heaviside* H *définie par* (2.2) *appartient à* $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$*, elle défini une distribution sur* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$*, c'est une mesure de Radon.*

Exemple 2.7 : *Pour* $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^2)$*, on pose :*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3) : \langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y,0)dxdy$$

T *est une mesure de Radon, appelée la distribution à couche simple de densité* f.

En effet, soit $K \subset \Omega$ *un compact et* $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$*. On pose* $K' = K \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$*, ce qui est un compact de* $\mathbb{R}^2$*. Alors :*

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y,0)dxdy\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)\varphi(x,y,0)|dxdy \\ &= \int_{K'} |f(x,y)\varphi(x,y,0)|dxdy \\ &\leq \sup_{(x,y,z)\in K}|\varphi(x,y,z)| \int_{K'} |f(x,y)|dxdy \\ &= \|f\|_{L^1(K')}.P_{K,0}(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.8 : *Pour* $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^2)$*, on pose :*

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3) : \langle T, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,0)dxdy$$

T est une distribution d'ordre 1 appelé la distribution a couche double de densité f.

En effet, soit $K \subset \Omega$ un compact et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. On pose $K' = K \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, ce qui est un compact de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$
\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,0)dxdy\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,0)|dxdy \\
&= \int_{K'} |f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,0)|dxdy \\
&\leq \sup_{(x,y,z)\in K} |\varphi(x,y,z)| \int_{K'} |f(x,y)|dxdy \\
&= \|f\|_{L^1(K')}.P_{K,1}(\varphi).
\end{aligned}
$$

Maintenant, soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x,y,z) = 1$ sur un voisinage compact K_0 de $(0,0,0)$ (ψ existe d'après le lemme d'Urysohn, voir Théorème 1.6).
On pose : $\varphi_0(x,y,z) = z\psi(x,y,z)$. Donc : $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z}(x,y,0) = \psi(x,y,0) = 1$ sur $\overset{0}{K_0}$.
On déduit que $P_{K_0,1}(\varphi) \geq 1$.
Donc : T est d'ordre 1.

Exemple 2.9 : *La valeur principale de Cauchy $vp_{\frac{1}{x}}$ est une distribution d'ordre 1 défini comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}) : \langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

En effet, soit $a > 0$, $K \subset [-a, a]$ un compact et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$.
On pose : $\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)dt$. Donc : $\psi(0) = \varphi'(0)$ et $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)$ pour $x \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx &= \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \int_{-a}^{-\varepsilon}\left[\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\right]dx + \int_{\varepsilon}^{a}\left[\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\right]dx \\
&= \left[-\frac{\varphi(0)}{x}\right]_{-a}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{\varphi(0)}{x}\right]_{a}^{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \psi(x)dx \\
&= \int_{|x|>\varepsilon} \psi(x)dx.
\end{aligned}
$$

Donc : $\langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi\rangle = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \psi(x)dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)dx$.

En remarquant que $\displaystyle\int_{-a}^{a}\psi(x)dx$ *existe car* ψ *est continue. Alors :*

$$\begin{aligned}
|\langle vp_{\frac{1}{x}},\varphi\rangle| &= \left|\int_{-a}^{a}\psi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{-a}^{a}\int_{0}^{1}\varphi'(tx)dtdx\right| \\
&\leq \int_{-a}^{a}\int_{0}^{1}|\varphi'(tx)|dtdx \\
&\leq 2a\sup_{x\in K}|\varphi'(x)| \\
&= 2aP_{K,1}(\varphi)
\end{aligned}$$

Donc : $vp_{\frac{1}{x}}$ *est une distribution d'ordre inférieur où égale à* 1.

Si on peut écrire une distribution T sur Ω sous forme intégrale $\displaystyle\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx$, on dit que T est une distribution **régulière** et que f est la fonction associée au T, sinon on dit que T est une distribution **singulière**.

.

Par exemple, la fonction de Heaviside définit une distribution régulière, et la distribution de Dirac est une distribution singulière.

2.2 Quelque propriétés et résultats

Proposition 2.2 : *Soit* (f_j) *une suite de* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *telle que Pour tous* $j\in\mathbb{N}$ *:*

1. $f_j\geq 0$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)dx=1$,
2. $\operatorname{supp} f_j\subset B(0,\varepsilon_j)$ *où* $\displaystyle\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j=0$. *pour toute* $j\in\mathbb{N}$.

Alors : $f_j\to\delta$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\operatorname{supp} f_j\subset B(0,\varepsilon_j)$ on a :

$$\langle f_j,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)dx=\int_{B(0,\varepsilon_j)}f_j(x)dx=1,$$

$$\langle f_j,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f_j(x)\varphi(x)dx=\int_{B(0,\varepsilon_j)}f_j(x)\varphi(x)dx.$$

On déduit que :

$$
\begin{aligned}
|\langle f_j,\varphi\rangle - \langle \delta,\varphi\rangle| &= \left|\int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)\varphi(x)dx - \int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)\varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx\right| \\
&\leq \int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)|\varphi(x)-\varphi(0)|dx \\
&\leq \sup_{x\in\overline{B}(0,\varepsilon_j)} |\varphi(x)-\varphi(0)| \int_{B(0,\varepsilon_j)} |f_j(x)dx \\
&= \sup_{x\in\overline{B}(0,\varepsilon_j)} |\varphi(x)-\varphi(0)|.
\end{aligned}
$$

Pour toute $j\in\mathbb{N}$, il existe $x_j\in B(0,\varepsilon_j)$ tel que $\sup\limits_{x\in\overline{B}(0,\varepsilon_j)} |\varphi(x)-\varphi(0)| = |\varphi(x_j)-\varphi(0)|$ (car $\overline{B}(0,\varepsilon_j)$ est compact et φ est continue). De plus, on a : $\lim\limits_{j\to+\infty}\varphi(x_j)=\varphi(0)$. Donc :

$$0 \leq \lim_{j\to+\infty} |\langle f_j,\varphi\rangle - \langle \delta,\varphi\rangle| \leq \lim_{j\to+\infty} |\varphi(x_j)-\varphi(0)| = 0.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 2.1 ***(Lemme de Dubois-Reymond) :*** *Soit $f\in L^1_{Loc}(\Omega)$ et T_f la distribution définit par :*

$$\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega) : \langle T_f,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Les deux propriétaires suivantes sont équivalentes :

i) *$T_f = 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$,*

ii) *$f=0$ p.p. sur Ω.*

Par conséquent : si $f,g\in L^1_{Loc}(\Omega)$, alors $f=g$ p.p. sur Ω, si et seulement si $T_f=T_g$.

Preuve: L'implication **ii)** $\Rightarrow$ **i)** est immédiate, on va démontrer l'implication **i)** $\Rightarrow$ **ii)**.

Première méthode : Soit $K\subset\Omega$ un compact. On pose $\delta_K = d(K, C^{\Omega}_{\mathbb{R}^n})$. Soit $\varepsilon<\delta$ et χ_K la fonction caractéristique de K. Soit $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}\subset\mathscr{D}(\Omega)$, $0\leq\psi_j\leq 1, \psi_j=1$ sur K et $\operatorname{supp}\psi_j\subset B(0,\frac{\varepsilon}{j})$ (cette suite existe d'après lemme d'Usishon, voir Théorème 1.6). La suite $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ converge p.p. vers χ_K, il résulte que $(f.\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ converge p.p. vers $f.\chi_K$, de plus, on a : $|f.\psi_j|\leq f.\chi_K$. D'près théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13) on a :

$$\int_K f(x)dx = \int_\Omega f(x).\chi_K(x)dx = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega f(x).\psi_j(x)dx = 0$$

Puisque K est quelconque, on déduit d'après Théorème 1.11 que $f=0$ p.p. sur Ω.

Deuxième méthode : Soit $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de Ω (voir Proposition 1.12), on pose : $O_j = \overset{0}{K_j}$. On va montrer que $f=0$ sur tout ouvert $(O_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Soit $f_j = f|_{O_j}$, alors $f_j \in L^1(O_j)$ (car O_j est borné). De la densité de $\mathscr{D}(O_j)$ dans $L^1(O_j)$ pour $\varepsilon > 0$ il existe $\psi_\varepsilon^j \in \mathscr{D}(O_j)$ telle que $\|\psi_\varepsilon^j - f_j\|_{L^1(O_j)} < \varepsilon$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(O_j)$. Comme $\displaystyle\int_{O_j} f_j(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, on obtient :

$$\int_{O_j} \psi_\varepsilon^j(x)\varphi(x) = \int_{O_j} (\psi_\varepsilon^j(x) - f_j(x))\varphi(x)dx + \int_{O_j} f_j(x)\varphi(xdx) = \int_{O_j} (\psi_\varepsilon^j(x) - f_j(x))\varphi(x)dx.$$

Alors :

$$\left|\int_{O_j} \psi_\varepsilon^j(x)\varphi(x)dx\right| \leq \int_{O_j} |\psi_\varepsilon^j(x) - f_j(x)|.|\varphi(x)|dx \leq \varepsilon \sup_{x\in K_j} |\varphi(x)|.$$

Soit $\eta > 0$. On pose : $\varphi = \dfrac{\psi_\varepsilon^j}{\sqrt{\eta^2 + (\psi_\varepsilon^j)^2}} \in \mathscr{D}(O_j)$. On a : $|\varphi| \leq 1$ et $\psi_\varepsilon^j.\varphi = \dfrac{(\psi_\varepsilon^j)^2}{\sqrt{\eta^2 + (\psi_\varepsilon^j)^2}}$.
Donc : $\displaystyle\int_{O_j} \frac{(\psi_\varepsilon^j)^2}{\sqrt{\eta^2 + (\psi_\varepsilon^j)^2}} \leq \varepsilon$.
Faisons η tend vers 0, on obtient d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et 1.4) : $\displaystyle\int_{O_j} |\psi_\varepsilon^j| \leq \varepsilon$. Donc :

$$\|f_j\|_{L^1(O_j)} \leq \|f_j - \psi_\varepsilon^j\|_{L^1(O_j)} + \|\psi_\varepsilon^j\|_{L^1(O_j)} \leq 2\varepsilon, \forall\varepsilon > 0.$$

On déduit que $\|f_j\|_{L^1(O_j)} = 0$, i.e $f = 0$ p.p sur O_j, donc dans K_j, pour tout $j \in \mathbb{N}$.
Comme K_j est un recouvrement de Ω alors : $f = 0$ p.p. dans Ω. ■

Proposition 2.3 : *Soit (f_j) une suite de $L^1(\Omega)$ converge p.p. vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $f_j \leq g$ p.p. pour toute $j \in \mathbb{N}$. Alors : $f \in L^1(\Omega)$ et $f_j \to f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Preuve: Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a : $\langle f_j, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega f_j(x)dx$ et $\langle f, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x)dx$.
On sais d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13) que $f \in L^1(\Omega)$.
Considérons la fonction $h_j = f_j\varphi$. La suite (h_j) est de $L^1(\Omega)$, converge p.p. vers la fonction $h = f\varphi$, et comme φ est borné, il existe $M > 0$ tel que $h_j \leq Mg$ p.p. pour toute $j \in \mathbb{N}$. La fonction Mg appartient à $L^1(\Omega)$. En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13) on trouve :

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega h_j(x)dx = \int_\Omega h(x)dx, \text{ i.e } \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \langle f_j, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$. Alors : $f_j \to f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. ■

Remarque 2.3 *: Le théorème ci-dessus reste valable si on prend une suite dans $L^1_{loc}(\Omega)$.*

2.3 Dérivation

Avant de donner le définition de dérivée d'une distribution, on donne le résultat important suivant :

Proposition 2.4 *: Soit T une distribution sur Ω et soit T_i $(1 \leq i \leq n)$ la fonctionnelle linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$, définie comme suivante :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle T_i, \varphi \rangle = \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle .$$

Alors : T_i est une distribution sur Ω.

Preuve: Soit $K \subset \Omega$ un compact et soit $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Alors : $\psi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Donc : il existe $M > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq M.P_{K,m}(\psi) = M.P_{K,m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \leq M.P_{K,m+1}(\varphi)$$

. Alors :

$$|\langle T_i, \varphi \rangle| = |\langle T, \psi \rangle| \leq M.P_{K,m+1}(\varphi).$$

Donc : T_i est une distribution sur Ω. ■

Maintenant, on donne la définition suivante :

Définition 2.5 : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. La dérivée de T (par rapport au x_i) est la distribution définie comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \tag{2.4}$$

Remarque 2.4 : *D'après Proposition 2.4 et Définition 2.5 :*

1. *On peut montrer par récurrence que toute distribution est infiniment dérivable.*
2. *Si T est d'ordre m, alors : $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ est d'ordre $m+1$ au plus.*

Proposition 2.5 : *Soit T une distribution sur Ω. Alors :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Preuve: Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors :

$$\langle D^{\alpha_i} T, \varphi \rangle = -\langle D^{\alpha_i - 1} T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \cdots (-1)^{\alpha_i} \langle T, D^{\alpha_i} \varphi \rangle .$$

Finalement :
$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n} T, \varphi \rangle = (-1)^{\alpha_1} \cdots (-1)^{\alpha_n} \langle T, D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n} \varphi \rangle = (-1)^{\alpha} \langle T, D^{|\alpha|} \varphi \rangle$. ■

Proposition 2.6 : *Soit (T_j) une suite de distributions sur Ω. Si $T_j \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, alors : Pour toute multi-indice α on a : $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

On dit que l'opérateur de dérivation est un opérateur continue.

Preuve: Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors : $D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et on a :

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha T_j, \varphi\rangle - \langle D^\alpha T, \varphi\rangle| &= ||-1|^\alpha \langle T_j, D^\alpha\varphi\rangle - |-1|^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi\rangle| \\ &= ||-1|^\alpha (\langle T_j, D^\alpha\varphi\rangle - \langle T, D^\alpha\varphi\rangle|)| \\ &= |\langle T_j, D^\alpha\varphi\rangle - \langle T, D^\alpha\varphi\rangle| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0 . \end{aligned}$$

Donc : $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. ■

Exemple 2.10 : *Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que $f' \in L^1_{Loc}(]a,b[)$. On a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$, il existe a_0, b_0 tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a_0,b_0] \subset]a,b[$. Alors :*

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle \\ &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{a_0}^{b_0} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -[f(x)\varphi(x)]_{a_0}^{b_0} + \int_{a_0}^{b_0} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= f(a_0)\varphi(a_0) - f(b_0)\varphi(b_0) + \int_{a_0}^{b_0} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{a_0}^{b_0} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle T_{f'}, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Donc : $(T_f)' = T_{f'}$.

Exemple 2.11 : *Soit H la fonction de Heaviside définie dans (2.2).Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, il existe $a > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$. Alors :*

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^a \varphi'(x)dx \\ &= -[\varphi(x)]_0^a \\ &= \varphi(0) - \varphi(a) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Donc : $H' = \delta$.

Exemple 2.12 : *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\backslash\{a\})$. Supposons que f, f' admettant une discontinuité de type 1 (i.e les limites $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = f(a^+), \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = f(a^-), \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} = f'(x) = f'(a^+), \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f'(x) =$*

$f'(a^-)$ existent est finies). Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, il existe $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$ *et $-A < a < A$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-A}^{A} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-A}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{A} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[f(x)\varphi(x)]_{-A}^{a} + \int_{-A}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{a}^{A} + \int_{a}^{A} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= -f(a^-)\varphi(a) + \int_{-A}^{a} f'(x)\varphi(x)dx + f(a^+)\varphi(a) + \int_{a}^{A} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= (f(a^+) - f(a^-))\varphi(a) + \int_{-A}^{A} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= \langle T_{f'}, \varphi\rangle + (f(a^+) - f(a^-))\langle \delta_a, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Alors : $(T_f)' = T_{f'} + (f(a^+) - f(a^-))\delta_a$.

Le lemme suivant est important pour démontrer le théorème qui vient après.

Lemme 2.1 : *Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.*

1. *φ admet une primitive dans $\mathscr{D}(]a, b[)$ ssi $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$.*
2. *Si φ admet une primitive dans $\mathscr{D}(]a, b[)$, alors : cette primitive est unique.*

Preuve:

1. Supposons que φ admet une primitive $\psi \in \mathscr{D}(]a, b[)$. Alors :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \psi'(x)dx = \psi(b) - \psi(a) = 0.$$

   Réciproquement, on suppose que $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ et on pose : $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)dt$. Alors : $\psi' = \varphi$. On va montrer que $\operatorname{supp}\psi$ est compact. Comme $\operatorname{supp}\varphi$ est compact, il existe a_0, b_0 tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a_0, b_0] \subset]a, b[$. Donc : $\varphi = 0$ sur $]a, a_0[\cup]b_0, b[$.
   Soit $x \in]a, a_0[$. Alors : $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)dt = 0$.
   Soit $x \in]b_0, b[$. Alors : $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt = 0$. Alors : $\operatorname{supp}\psi \subset [a_0, b_0]$, donc : $\operatorname{supp}\psi$ est compact.
2. Soit $\psi_1, \psi_2 \in (]a, b[)$ deux primitives de φ. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\psi_1 = c + \psi_2$.
   Pour $x \notin (\operatorname{supp}\psi_1 \cup \psi_2)$ on a : $0 = \psi_1(x) = c + \psi_2(x) = c$.
   Donc : $\psi_1 = \psi_2$.

■

Théorème 2.2 : *Soit* $]a, b[$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.

1. *Les seuls distributions* T *sur* $]a, b[$ *telles* $T' = 0$ *sont les distributions constantes.*
2. *Pour toute* $T \in \mathscr{D}'(]a, b[)$, *il existe* $S \in \mathscr{D}'(I)$ *telle que* $S' = T$ *(toute distribution admet une primitive).*

Preuve:

1. Soit $\psi \in \mathscr{D}(]a, b[)$ telle que $\displaystyle\int_a^b \psi(x)dx = 1$. On pose : $\langle T, \psi\rangle = c$.

   Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a, b[)$. On pose : $\rho = \varphi - \psi. \displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$. Alors : $\rho \in \mathscr{D}(]a, b[)$ et on a :

   $$\int_a^b \rho(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \phi(x)dx. \int_a^b \varphi(x)dx = 0.$$

   Donc : ρ il existe $\theta \in \mathscr{D}(]a, b[)$ telle que $\theta' = \rho$. Alors :

   $$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \rho + \psi. \int_a^b \varphi(x)dx\rangle \\ &= \langle T, \theta' + \psi. \int_a^b \varphi(x)dx\rangle \\ &= \langle T, \theta'\rangle + \langle T, \psi\rangle. \int_a^b \varphi(x)dx \\ &= -\langle T', \theta\rangle + c. \int_a^b \varphi(x)dx \\ &= \int_a^b c.\varphi(x)dx \\ &= \langle c, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

2. Soit T une distribution sur $]a, b[$.

   Comme précédant, on pose $\theta' = \rho$, où $\rho = \varphi - \psi. \displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)dx = 1$ (en remarquant que θ est unique d'après Lemme 2.1).

   On pose : $\langle S, \varphi\rangle = -\langle T, \theta\rangle$. Alors : pour $K \in]a, b[$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K(]a, b[)$ il existe $m \in \mathbb{N}$, $K' = K \cup \operatorname{supp} \theta$ et $M > 0$ tels que :

   $$\begin{aligned} |\langle S, \varphi\rangle| &= |\langle T, \theta\rangle| \\ &\leq M_1 P_{K',m}(\theta) \\ &= M_1 \max\{\sup_{x\in K'} |\theta|, \sup_{x\in K', 1\leq k\leq m} |\theta^{(k)}|\} \end{aligned}$$

   En remarquant que :

$$\begin{aligned}
|\theta(x)| &= \int_a^x \rho(t)dt \\
&= \left|\int_a^x \varphi(t)dt + \int_a^x \psi(t)dt. \int_a^b \varphi(s)ds\right| \\
&= \int_a^x |\varphi(t)|dt + \int_a^x |\psi(t)|dt. \int_a^b |\varphi(s)|ds \\
&\leq \int_a^b |\varphi(t)|dt + \int_a^b |\psi(t)|dt. \int_a^b |\varphi(s)|ds \\
&= 2\int_a^b |\varphi(t)|dt \\
&\leq 2(b-a)\sup_{x\in K} |\varphi|,
\end{aligned}$$

et $\sup\limits_{x\in K', 1\leq k\leq m} |\theta^{(k)}| \leq M_2 \sup\limits_{x\in K, 0\leq k\leq m-1} |\varphi^{(k)}|$ (tenant en compte que $\varphi = 0$ en dehors de K).

On trouve alors : $|\langle S, \varphi\rangle| \leq MP_{K,m-1}(\varphi)$.

Maintenant, soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$. φ est la primitive de φ' dans $\mathscr{D}(]a,b[)$. Alors :

$\langle S', \varphi\rangle = -\langle S, \varphi'\rangle = \langle T, \varphi\rangle$.

Donc : S est une primitive de T.

■

Théorème 2.3 : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall i = 1\cdots n : \partial_i T = 0$. Alors : T est constante.*

Preuve: On a : $\partial_i T = 0$, donc T ne dépend que de $x_2, \cdots x_n$. Ainsi, proche à proche on preuve que T est constante. ■

2.4 Opérateurs sur les distributions

Définition 2.6 (***restriction d'une distribution***) : *Soit T une distribution sur Ω. Pour toute ouvert ω de Ω on définit la restriction T_U de T par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega) : \langle T_\omega, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

La restriction d'une distribution sur ω est une distribution sur ω car si on prend $K \subset \omega$ un compact, on a : $K \subset \Omega$, et pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\omega)$ on a : $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Il existe alors $M > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que : $|\langle T, \varphi\rangle| \leq MP_{K,m}(\varphi)$.

Définition 2.7 (***translation d'une distribution***) : *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. La translation $\tau_a T$ de vecteur a est défini par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle,$$

ou : $\tau_{-a}\varphi(x) = \varphi(x+a), \forall x \in \mathbb{R}^n$

Si on prend un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$ alors : $K_a = \{x + a, x \in K\}$ est un compact et $\tau_{-a}\varphi \in \mathscr{D}_{K_a}(\mathbb{R}^n)$. Donc : $\langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle$ a un sens, par conséquent $\tau_a T$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.13 : *Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On a :*
$\langle \tau_a\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi\rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle$. *Donc :* $\tau_a\delta = \delta_a$.

Définition 2.8 (***dilatation d'une distribution***) : *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$. La dilatation T_λ de rapport $\lambda \neq 0$ est défini par :* $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \langle T_\lambda, \varphi\rangle = |\lambda|^n \langle T, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle$,
ou : $\varphi_{\frac{1}{\lambda}}(x) = \varphi(\lambda x), \forall x \in \mathbb{R}^n$

Si on prend un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$ alors : $K_\lambda = \{\lambda x, x \in K\}$ est un compact et $\varphi_{\frac{1}{\lambda}} \in \mathscr{D}_{K_\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Donc : $\langle T, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle$ a un sens, par conséquent T_λ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.14 : *Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On a :*
$\langle \delta_\lambda, \varphi\rangle = |\lambda|^n \langle \delta, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle = |\lambda|^n \varphi(0) = |\lambda|^n \langle \delta, \varphi\rangle$. *Donc :* $\delta_\lambda = |\lambda|^n \delta$.

Définition 2.9 : *On désigne par $\check{\varphi}$ au φ_{-1}, ie :* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$.

1. *La symétrie de T est la distribution $\check{T}$ défini par :*
$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle.$$
2. *On dit que T est pair si $\check{T} = T$.*
3. *On dit que T est impair si $\check{T} = -T$.*
4. *On dit que T est homogène d'ordre m si pour tout $\lambda > 0$ on a :* $T_\lambda = \lambda^{-m} T$.

Exemple 2.15 :

1. *On a :* $\check{\delta} = \delta$, *i.e est une distribution pair.*
2. *Comme $\delta_\lambda = |\lambda|^n \delta$, on déduit que δ est homogène d'ordre n.*

Définition 2.10 (***produit d'une distribution par une fonction***) : *Soit T une distribution sur Ω, et $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. On définit $f.T$ par :*
$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : \langle f.T, \varphi\rangle = \langle T, f.\varphi\rangle.$$

Si on prend un compact $K \subset \Omega$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ alors : $f.\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Donc : $\langle T, f\varphi\rangle$ a un sens, par conséquent $f.T$ est une distribution sur Ω.

Remarque 2.5 :

1. *Si T est une distribution d'ordre m, et $f \in \mathscr{C}^\infty$, alors : $f.T$ est une distribution d'ordre inférieur ou égale m.*

2. *Généralement on ne peut pas défini le produit de deux distributions (voir exercice 2.7).*

Exemple 2.16 : *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *et* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. *On a :*
$\langle f.\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, f.\varphi\rangle = f(0).\varphi(0) = f(0).\langle \delta, \varphi\rangle$. *Donc :* $f.\delta = f(0).\delta$.

Proposition 2.7 : *Soit les deux suites* $(f_j) \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega), (T_j) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ *telles que* $f_j \to f$ *dans* $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *et* $T_j \to T$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$. *Alors :* $f_j.T_j \to f.T$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve: : Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Alors : $\operatorname{supp}(f_j\varphi) \subset K$ et $\operatorname{supp}(f\varphi) \subset K$.
Comme $f_j \to f$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $f_j\varphi, f\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ on a : $\lim\limits_{j\to+\infty} P_{k,m}(f_j\varphi - f\varphi) = 0$ pour tous $m \in \mathbb{N}$.
la convergence est dans $\mathscr{D}(\Omega)$ car K est fixé.
Puisque $T_j \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$: $\langle T_j, f_j.\varphi\rangle$ tend vers $\langle T, f.\varphi\rangle$.
D'parès théorème de Banach-Steinhaus (Corollaire 1.2), la convergence est dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. ■

2.5 Supports des distributions

Définition 2.11 : *Ouvert d'annulation de* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *est le plus grand ouvert* $O \subset \Omega$ *tel que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(O) . \langle T, \varphi\rangle = 0$$

Le support de T $(\operatorname{supp} T)$ *est* $\Omega \setminus O$.

Supposons qu'il existe in ouvert non vide où $T = 0$, et considérons une famille $(O_i)_{i\in I}$ des ouverts où $T = 0$. On pose : $O = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, ce qui est un ouvert.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(O)$. Alors : $K = \operatorname{supp}\varphi \subset O = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
La famille $(O_i)_{i\in I}$ est une recouvrement le compact K, on peut extraire une recouvrement finie $(O_j)_{j=1}^N$. D'après Théorème 1.7 (partition de l'unité), il existe une famille $(\theta_j)_{j=1}^N$ où $\theta_j \in \mathscr{D}(O_j), 0 \le \theta_j \le 1$ et $\sum\limits_{j=1}^N \theta_j = 1$. Alors : pour toute $x \in \Omega$ on a : $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^N \theta_j(x)\varphi(x)$.
et pour tout $1 \le j \le N$ on a : $\theta_j.\varphi \in \mathscr{D}(O_j)$. Donc :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \sum_{j=1}^N \theta_j.\varphi\rangle = \sum_{j=1}^N \langle T, \theta_j.\varphi\rangle = 0.$$

O est alors l'ouvert d'annulation de T et $\operatorname{supp} T = \Omega \setminus O$.

Exemple 2.17 :

1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\operatorname{supp}\varphi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
   Alors : $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0) = 0$.
   Donc : l'ouvert d'annulation de δ *est inclus dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *cette inclusion est stricte,*

car si on prend $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\varphi = 1$ *au voisinage de* $B(0,1)$*, on trouve* $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 1 \neq 0$.
Donc : $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\operatorname{supp} \varphi \subset]-\infty, 0[$. *On a :*
$\langle H, \varphi \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$. *Donc : l'ouvert d'annulation de* H *est inclus dans* $]-\infty, 0[$.
Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ *une suite des fonctions de* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\varphi \geq 0$ *et* $\varphi = 1$ *sur* $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$.
Alors : $\langle H, \varphi \rangle \geq \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)dx = \frac{1}{n} \neq 0$.
On déduit que l'ouvert d'annulation de H *est* $]-\infty, 0[$. *Donc :* $\operatorname{supp} H = [0, +\infty[$.

Proposition 2.8 :

1. *Soit* T *une distribution a support compact sur* Ω *et* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *telle que* $\varphi = 0$ *au voisinage de* $\operatorname{supp} T$*(ie* $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$*). Alors :* $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
2. $\operatorname{supp} T$ *est le plus petit fermé* F *tel que : Si* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \varphi = 0$ *au voisinage de* F*. Alors :* $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Preuve:

1. Comme $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ on a : $\operatorname{supp} \varphi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} T) = O$ l'ouvert d'anulité de T. Donc : $\varphi \in \mathscr{D}(O)$, ce qui donne : $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
2. Soit F_0 le plus petit fermé qui vérifie la propriété : Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \varphi = 0$ au voisinage de F_0 alors : $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
   Il est clair que $\operatorname{supp} T$ vérifie la propriété, et si F_1, F_2 vérifient la propriété alors : $F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cup F_2$ vérifient la propriété.
   Supposons que $F_0 \subset \operatorname{supp} T$ et que cette inclusion est stricte. Il existe alors $x_0 \in \operatorname{supp} T$ tel que $x_0 \notin F_0$. Comme F_0 est fermés on a : $d(x_0, F_0) = 2r > 0$. Alors : $B(x_0, r) \cap F_0 = \emptyset$ et $G_0 = \operatorname{supp} T \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$.
   Il résulte que $G_0 \cup F_0 \subset \operatorname{supp} T$ et $F_0 \subset (G_0 \cup F_0)$ avec une inclusion stricte, ce qui contredit le faite que F_0 est le plus petit fermé qui vérifie la propriété.

■

Remarque 2.6 : *Si on remplace* $\varphi = 0$ *au voisinage de* $\operatorname{supp} T$ *par* $\varphi = 0$ *sur* $\operatorname{supp} T$ *la proposition ci-dessus ne reste pas vrais. Par exemple on a* $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$*, mais si* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *tel que* $\psi = 1$ *au voisinage de* 0 *et* $\varphi(x) = x\psi(x)$ *on a :* $\varphi = 0$ *sur* $\operatorname{supp} \delta$.

Théorème 2.4 : *Soit* T *une distribution a support compact sur* Ω*. Alors :* T *est d'ordre fini* m*, et pour toute voisinage d'un compact* $K \subset \Omega$*, il existe un constant* m *tel que pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *on a :* $|\langle T, \varphi \rangle| \leq M.P_{K,m}(\Omega)$.

Preuve: Soit K un voisinage compact de $\operatorname{supp} T$ et soit $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp} \chi \subset K$ et $\chi = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors : $\varphi - \chi.\varphi = 0$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$. Alors : $\langle T, \varphi - \chi\varphi \rangle = 0$, ce qui donne $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$.
Il existe $M_0 > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\psi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ on a : $|\langle T, \psi \rangle| \leq M_0.P_{K,m}(\psi)$ et comme $\chi.\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ on a :

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi.\varphi \rangle| \leq M_0.P_{K,m}(\chi.\varphi) \leq M.P_{K,m}(\varphi).$$

En remarquant que m ne dépend que de K, qui est fixé (voisinage de $\operatorname{supp} T$). On déduit que T est d'ordre fini. ■

En utilisant ce résultat pour prolonger le crochet de dualité de $\langle ., . \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}$ de manière suivante :

Définition 2.12 (***crochet de dualité*** $\langle ., . \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}}$) : *On note par $\mathscr{E}(\Omega)$ à l'espace $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, et par $\mathscr{E}'(\Omega)$ à l'espace de distributions a support compact. Pour toute $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$, on pose :*

$$\langle T, \varphi \rangle_{\xi', \xi} = \langle T, \chi\varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}},$$

où $\chi \in \mathscr{D}(\Omega), \chi = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$.
On écrit : $(\mathscr{C}^\infty(\Omega))' = \mathscr{E}'(\Omega)$.

Ce résultat est indépendant au choix de χ car si on prend $\chi_1, \chi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ tels que $\chi_1 = \chi_2 = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$ on a : $\chi_1.\varphi = \chi_2.\varphi = 0$ au voisinage de $\operatorname{supp} T$,
donc : $\langle T, \chi_1.\varphi - \chi_1.\varphi \rangle = 0$, ce qui donne : $\langle T, \chi_1.\varphi \rangle = \langle T, \chi_2.\varphi \rangle$.

Théorème 2.5 : *L'injection canonique de $\mathscr{E}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ est continue.*
On écrit : $\mathscr{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve: On note par i l'application de $\mathscr{E}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ définie par :

$$\forall T \in \mathscr{E}'(\Omega) : i(T) = T.$$

Cette application est linéaire et si $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ tel que $i(T) = 0$ on a : pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$: $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Donc : pour tout $\psi \in \mathscr{E}(\Omega)$ et $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ on a :

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}} = \langle T, \chi.\varphi \rangle = 0.$$

Donc : $T = 0$, i.e i est injective.
Soit maintenant une suite $(T_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{E}'(\Omega)$ converge vers 0 dans $\mathscr{E}'(\Omega)$. Alors : pour tout $\varphi \in \mathscr{E}'(\Omega)$ on a : $\langle T_j, \varphi \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}}$ converge vers0.
mais on a : $\langle T_j, \varphi \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}} = \langle T_j, \chi.\varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = \langle T, \psi \rangle$ converge vers 0 pour toute $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Donc : i est continue. ■

Exercices

Exercice 2.1 : *On définit sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ la fonctionnelle suivante :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle pf_{\frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right].$$

Montrer que $pf_{\frac{1}{x^2}}$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2 : *Le but de cet exercice est de montrer que la distribution $vp_{\frac{1}{x}}$ est d'ordre* 1. *Par l'absurde, on suppose que $vp_{\frac{1}{x}}$ est d'ordre* 0 *(on sais d'après l'exemple 2.9 que $vp_{\frac{1}{x}}$ est d'ordre inférieur où égale à* 1*).*

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, une fonction paire telle que $\varphi \geq 0, \varphi = 1$ au voisinage de 0. *Soit $a > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset K = [-a, a]$. On sais que $\langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle \leq 2aP_{K,1}(\varphi)$.*

On considère la suite des fonctions $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$, définie par : $\varphi_j(x) = \varphi(x) \arctan(jx)$.

1. *Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour toute $j \in \mathbb{N}$ on a : $\sup_{x \in K} |\varphi_j(x)| < M$.*
2. *Calculer $\varphi_j'(0)$. Que peut on conclure pour $P_{K,1}(\varphi_j)$.*
3. *Déduire.*

Exercice 2.3 : *Le but de cet exercice est de montrer l'existence des distributions d'ordre infini.*
Soit la fonctionnelle T, définie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k).$$

1. *Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$.*
2. *Supposons que T est d'ordre fini m. Soit $\psi_0 \in \mathscr{D}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$, $\psi_0 \geq 0$ et $\psi_0 = 1$ sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. On pose $\psi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$.*

   i) *Pour $\lambda > 1$ on pose : $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1)))$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $\operatorname{supp} \varphi \subset K_m = \left[m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}\right]$.*

   ii) *Montrer que $\langle T, \varphi \rangle = \lambda^{m+1}$.*

   iii) *Montrer qu'il existe $M_K > 0$ tel que : $\lambda^{m+1} \leq M_K \sum_{k=0}^{m} \lambda^k . \sup |\psi^{(k)}|$.*

   iv) *Montrer que λ est finie.*

   v) *Déduire que T est d'ordre infini.*

Exercice 2.4 : *On note $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite des distributions associées aux fonctions localement intégrables $\dfrac{sin(jx)}{\pi x}$.*

Montrer que T_j converge vers δ lorsque j tend vers ∞ (N.B : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 2.5 : *Soit la fonctionnelle T définie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle T, \varphi \rangle = \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|.\varphi(x)dx.$$

Soit la suite des fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ défini par : $f_j(x) = \begin{cases} \ln|x| & : \ |x| \geq \dfrac{1}{j} \\ -\ln(j) & : \ |x| < \dfrac{1}{j} \end{cases}$

1. *Montrer que T définit une distribution sur $\mathbb{R}$, on la note par $\ln|x|$.*
2. *Montrer que $f_j \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ pour toute $j \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Montrer que $f_j \to \ln|x|$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*
4. *Montrer que $(\ln|x|)' = vp_{\frac{1}{x}}$.*

Exercice 2.6 :

1. *Calculer $x.v_p\dfrac{1}{x}, x.\delta$.*
2. *Calculer $(x\ln x)', x.\delta^{(k)}$ $(k \geq 1)$.*
3. *Résoudre l'équation $xT = 0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Exercice 2.7 : *Soit la suite des fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ défini par :*

$$f_j(x) = \begin{cases} j & : \ x \in \left[0, \dfrac{1}{j}\right] \\ 0 & : \ x \notin \left[0, \dfrac{1}{j}\right] \end{cases}$$

Considérons les distributions . $T_j = f_j$.

1. *Montrer que $T_j \to \delta$ lorsque $j \to +\infty$.*
2. *Donner l'expression de $\langle f_j.T_j, \varphi \rangle$ pour toute φ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que $\langle f_j.T_j, \varphi \rangle \to +\infty$ (prendre $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = 1$ au voisinage de 0).*

Exercice 2.8 :

1. *Calculer $(f.T)', (fT)''$, où $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*
2. *Calculer $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle$, pour $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ où $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash (\operatorname{supp} T_1 \cup \operatorname{supp} T_2)$.*

Solutions des exercices

Solution 2.1 : $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle pf_{\frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \\
&= -\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \\
&= \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\langle pf_{\frac{1}{x^2}}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right] \\
&= -\varphi'(0) + \varphi'(0) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \\
&= \langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi' \rangle
\end{aligned}$$

Comme $vp_{\frac{1}{x}}$ *définit une distribution sur* $\mathbb{R}$ *et puisque* $\varphi' \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, *on déduit que* $pf_{\frac{1}{x^2}}$ *définit une distribution sur* $\mathbb{R}$.

Solution 2.2 : $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, *paire,* $\varphi \geq 0, \varphi = 1$ *au voisinage de* 0, $a > 0$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K = [-a, a]$.
$\varphi_j(x) = \varphi(x) \arctan(jx), j \in \mathbb{N}^*$.

1. *On a :*
$$\sup_{x \in K} |\varphi_j(x)| = \sup_{x \in K} |\arctan(jx).\varphi(x)| = \frac{\pi}{2} \sup_{x \in K} |\varphi(x)| < M.$$
2. *On a :* $\varphi_j'(x) = \dfrac{j\varphi(x)}{1 + j^2x^2} + \varphi'(x) \arctan(jx)$. *Donc :* $\varphi_j'(0) = j\varphi(0) = j$.
   Il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sup\limits_{x \in K} |\varphi_j'(x)| = j_0 \geq M > \sup\limits_{x \in K} |\varphi_j(x)|$.
   Donc : $P_{K,1}(\varphi_j) = j$ *pour* $j \geq j_0$.
3. *Comme* $P_{K,1}(\varphi_j) = \sup\limits_{x \in K} |\varphi_j'(x)|$, *on déduit que l'ordre de* $vp_{\frac{1}{x}}$ *est* 1.

Solution 2.3 : $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle T, \varphi \rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$.

1. *Soit* $K \subset \mathbb{R}$ *un compact. Il existe* $j \in \mathbb{N}$ *tel que* $K \subset [-j, j]$. *Soit maintenant* $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$. *Alors :* $\operatorname{supp} \varphi^{(k)} \subset [-j, j]$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *i.e* $\varphi^{(k)}(k) = 0$ *pour tout* $k > j$,

ce qui donne :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\sum_{k=0}^{j}\varphi^{(k)}(k)\right| \leq (j+1)\sup_{x\in K,k\leq j}|\varphi^{(k)}(x)| = (j+1)P_{K,j}(\varphi).$$

Donc : T définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

2. *Supposons que T est d'ordre m.*
$\psi_0 \in \mathscr{D}\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\right)$, $\psi_0 \geq 0, \psi_0 = 1$ *sur* $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ $.\psi(x) = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x).$

i) $\lambda > 1, \varphi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$.
Puisque $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors : $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
De la définition de $\varphi, x \in \operatorname{supp}\varphi$ implique que $\lambda(x-(m+1)) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.
Donc : $(x-(m+1)) \in \left]-\frac{1}{2\lambda},\frac{1}{2\lambda}\right[\subset \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ (puisque $\lambda > 1$.)
Alors : $x \in \left[m+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\right]$. Donc : $\operatorname{supp}\varphi \subset K_m = \left[m+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\right]$.

ii) *Puisque $\operatorname{supp}\varphi \subset K_m = \left[m+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\right]$, on déduit que*

$$\langle T,\varphi\rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}.$$

iii) *On a supposé que T est d'ordre m, alors : il existe $M_K > 0$ tel que :*
$\lambda^{m+1} = |\langle T,\varphi\rangle| \leq M_K\sum_{k=0}^{m}\sup|\varphi^{(k)}| = M_K\sum_{k=0}^{m}\lambda^k.\sup|\psi^{(k)}|.$

iv) *Comme $\lambda > 0$, pour tout $k \leq m$ on a : $\lambda^k \leq \lambda^m$. Donc : $\lambda^{m+1} \leq M_K.\lambda^m\sum_{k=0}^{m}\sup|\psi^{(k)}|$.*
Donc : $\lambda \leq M_K.\sum_{k=0}^{m}\sup|\psi^{(k)}|$. Alors : λ est finie.

v) *Si on fait λ tend vers l'infini, on a une contradiction avec λ finie. Donc : T est d'ordre infini.*

Solution 2.4 : $\forall\varphi \in \mathbb{R} : \langle T_j,\varphi\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin(jx)}{\pi x}\varphi(x)dx,\ j \in \mathbb{N}$.
On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dt = \pi$. *Donc :* $\varphi(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{\pi x}\varphi(0)dx$.
On fait le changement de variable $t = jx$, on trouve :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(jx)}{\pi x}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{\pi t}\varphi\left(\frac{t}{j}\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}\varphi\left(\frac{x}{j}\right)dx$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
|\langle T_j,\varphi\rangle - \langle\delta,\varphi\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}\varphi\left(\frac{x}{j}\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}\varphi(0)dx\right| \\
&\leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}\left(\varphi\left(\frac{x}{j}\right) - \varphi(0)\right)dx\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}\left|\varphi\left(\frac{x}{j}\right) - \varphi(0)\right|dx \\
&\leq \sup\left|\varphi\left(\frac{x}{j}\right) - \varphi(0)\right| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\pi x}dx \\
&= \sup\left|\varphi\left(\frac{x}{j}\right) - \varphi(0)\right|.
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \sup\left|\varphi\left(\frac{x}{j}\right) - \varphi(0)\right| = 0$, *on déduit que* T_j *converge vers* δ *lorsque* $j \longrightarrow +\infty$.

Solution 2.5 : $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \langle T,\varphi\rangle = \displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|.\varphi(x)dx$, $f_j(x) = \begin{cases} \ln|x| & : |x| \geq \frac{1}{j} \\ -\ln(j) & : |x| < \frac{1}{j} \end{cases}$

1. *Soit* $\varepsilon > 0$ *assez petit,* $K \subset \mathbb{R}$ *un compact . Il existe* $a > 1$ *tel que* $K \subset [-a,a]$.
   Soit $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, *alors :*

$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &= \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|.\varphi(x)dx \\
&= \int_{\varepsilon<|x|\leq a} \ln|x|.\varphi(x)dx \\
&= \int_{\varepsilon<|x|<1} \ln|x|.\varphi(x)dx + \int_{1\leq|x|\leq a} \ln|x|.\varphi(x).
\end{aligned}$$

   D'une part : $\displaystyle\left|\int_{1\leq|x|\leq a} \ln|x|.\varphi(x)\right| \leq \sup_{1\leq|x|\leq a}|\varphi(x)|.\int_{1\leq|x|\leq a}\ln|x|dx \leq M_1P_{K,0}(\varphi)$.
   D'autre part : d'aprés théorème des accroissements finis, il existe $\varepsilon < |x| < |x_\varepsilon| < 1$ *tel que* $|\ln|x|| = -\ln|x| = \ln 1 - \ln|x| = \dfrac{1-x}{|x_\varepsilon|} \leq \dfrac{1-x}{|x|}$.
   Donc : $\displaystyle\int_{\varepsilon<|x|<1} \ln|x|.\varphi(x)dx \leq \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{1-x}{|x|}.\varphi(x)dx$,
   cette dernière va traiter comme $vp_{\frac{1}{x}}$.
   Donc : T *définit une distribution sur* $\mathbb{R}$, *on la note par* $\ln|x|$.
2. *La fonction* f_j *est continue pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$. *Donc :* $f_j \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ *pour toute* $j \in \mathbb{N}^*$.
3. *On peut écrire :* $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) :< \ln|x|,\varphi >= \displaystyle\int_{|x|\geq\frac{1}{j}} \ln|x|.\varphi(x)dx$, *donc :*

   $$|\langle f_j,\varphi\rangle - \langle\ln|x|,\varphi\rangle| = \int_{|x|<\frac{1}{j}} -\ln j.\varphi(x)dx \leq \ln j\int_{-\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j}}|\varphi(x)|dx.$$

   En appliquant le théorème de la moyenne, il existe $x_j \in [-\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{j}]$ *tel que*
   $\displaystyle\int_{-\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j}}|\varphi(x)|dx = \frac{2}{j}|\varphi(x_j)|$. *Donc :* $|\langle f_j,\varphi\rangle - \langle\ln|x|,\varphi\rangle| \leq \dfrac{2\ln j}{j}|\varphi(x_j)|$.

Puisque φ *est continue :* $\lim\limits_{j\to+\infty}|\varphi(x_j)| = |\varphi(0)|$. *Donc :*

$0 \le \lim\limits_{j\to+\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle - \langle \ln|x|, \varphi\rangle| \le \lim\limits_{j\to+\infty} \dfrac{2\ln j}{j}|\varphi(x_j)| = 0.$

Donc : $f_j \to \ln|x|$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

4. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *On a :* $\langle (\ln|x|)', \varphi\rangle = -\langle \ln|x|, \varphi'\rangle = -\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|.\varphi'(x)dx.$

   Il existe $a > \varepsilon$ *tel que* $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
-\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|.\varphi'(x)dx &= -\int_{-a}^{-\varepsilon} \ln|x|.\varphi'(x)dx - \int_{\varepsilon}^{a} \ln|x|.\varphi'(x)dx \\
&= [-\ln|x|.\varphi(x)]_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + [-\ln|x|.\varphi(x)]_{\varepsilon}^{a} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \ln\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.
\end{aligned}$$

On a : $\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(0)+0(\varepsilon)$, *alors :* $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln\varepsilon(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)) = \lim\limits_{\varepsilon\to0} 2\epsilon\varepsilon\varphi'(0) = 0.$

Donc :

$\langle (\ln|x|)', \varphi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi\rangle.$

Ce qui donne : $(\ln|x|)' = vp_{\frac{1}{x}}$.

Solution 2.6 :

1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
*)\ \langle x.v_p\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle &= \langle v_p\tfrac{1}{x}, x.\varphi\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon} x.\frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \langle 1, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc : $x.v_p\dfrac{1}{x} = 1.$

**)* $\langle x.\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x.\varphi\rangle = 0.$

Donc : $x.\delta = 0$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
*)\ \langle (x.\ln x)', \varphi\rangle &= -\langle x.\ln x, \varphi'\rangle \\
&= -\langle \ln x, x.\varphi'\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} x.\ln x.\varphi'(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to0}[(1+\ln x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}(1+\ln x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\ln x.\varphi(x)dx \\
&= \langle H, \varphi\rangle + \langle \ln x, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc : $(x\ln x)' = H + \ln x$.

$$\begin{aligned} *)\ \langle x.\delta^{(k)}, \varphi\rangle &= \langle \delta^{(k)}, x.\varphi\rangle \\ &= (-1)^k \langle \ln x, (x.\varphi)^{(k)}\rangle \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (x)^{(k-i)} \varphi^{(k)}|_{x=0} \\ &= (-1)^k C_k^1 \varphi'(0) \\ &= (-1)^k.k\langle \delta', \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Donc : $x.\delta^{(k)} = (-1)^k.k\delta'$.

3. *De la première question, si* $T = \delta$ *alors :* $xT = 0$.
   Ainsi, si $T = c.\delta$ $(c \in \mathbb{R})$ *alors :* $xT = 0$.
   Supposons maintenant que $xT = 0$, *alors :*
   pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *on a :* $\langle x.T, \varphi\rangle = \langle T, x.\varphi\rangle = 0$.
   Soit $(\varphi_j) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *tel que* $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \left]-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right[$ *et* $\varphi_j = 1$ *sur* $\left[-\frac{1}{2j}, \frac{1}{2j}\right]$.
   D'près Proposition 2.8, on trouve $\operatorname{supp} T = \{0\}$. *Donc : il existe* $k \in \mathbb{N}$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $T = c.\delta^{(k)}$.
   Mais, d'après la deuxième question $x.\delta^{(k)}$ *différent de* 0 *lorsque* $k \geq 1$.
   Donc : les solutions de l'équation $xT = 0$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *sont les distributions sous la forme* $c.\delta$ $(c \in \mathbb{R})$.

Solution 2.7 : $f_j(x) = \begin{cases} j & : \ x \in \left[0, \frac{1}{j}\right] \\ 0 & : \ x \notin \left[0, \frac{1}{j}\right] \end{cases}$, $j \in \mathbb{N}^*$. $T_j = f_j$.

1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$|\langle T_j, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| = \left| j \int_0^{\frac{1}{j}} \varphi(x)dx - \varphi(0) \right|$$

   D'près théorème de la moyenne, il existe $x_j \in [0, 1j]$ *tel que :*

$$j \int_0^{\frac{1}{j}} = j.\frac{1}{j}\varphi(x_j)$$

   Alors :

$$|\langle T_j, \varphi\rangle - \langle \delta, \varphi\rangle| = |\varphi(x_j) - \varphi(0)| \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

   Donc : $T_j \to \delta$ *lorsque* $j \to +\infty$.

2. *Soit* φ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *On a :* $\langle f_j.T_j, \varphi\rangle = \langle T_j, f_j.\varphi\rangle = j^2 \int_0^{\frac{1}{j}} \varphi(x)dx$.

3. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\varphi \geq 0$ *et* $\varphi = 1$ *sur* $\left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right]$. *Alors :*

$$\langle f_j.T_j, \varphi\rangle = j^2 \int_0^{\frac{1}{j}} \varphi(x)dx \geq j^2 \int_0^{\frac{1}{j}} dx = j \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \, .$$

Donc : $\langle f_j.T_j, \varphi\rangle \to +\infty$.

Solution 2.8 :

1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, *alors :* $\langle (f.T)', \varphi\rangle = -\langle T, f.\varphi'\rangle$.
On a : $(f.\varphi)' = f.\varphi' + f'.\varphi$. *Donc :*

$$\begin{array}{rcl} \langle (f.T)', \varphi\rangle & = & -\langle f.T, \varphi'\rangle \\ & = & -\langle T, f.\varphi'\rangle \\ & = & -\langle T, (f.\varphi)' - f'.\varphi\rangle \\ & = & -\langle T, (f.\varphi)'\rangle + \langle T, f'.\varphi\rangle \\ & = & \langle T', f.\varphi\rangle + \langle f'.T, \varphi\rangle \\ & = & \langle f.T' + f'.T, \varphi\rangle \end{array}$$

Ce qui donne : $(f.T)' = f.T' + f'.T$.
Alors :

$$(f.T)'' = (f.T' + f'.T)' = f.T'' + 2f'.T' + f'.T.$$

2. $\langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle = 0$