CHAPITRE 3

PRODUIT DE CONVOLUTION

Le rôle de produit de convolution est de régulariser certains fonctions à de mauvaise comportement. Dans ce chapitre on va généraliser le produit de convolution qui définit sur les fonctions. On commence par une petite motivation.

Soit P et Q deux polynômes de degré p et q, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, données par :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j, \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j.$$

Le produit de P et Q est donné par :

$$(P.Q)(x) = \sum_{j=0}^{p+q} \sum_{k=0}^{j} a_k . b_{j-k} x^j$$

On prolonge les deux suites (a_j) et (b_j) par 0 vers $\mathbb{Z}$ et on le note toujours par (a_j) et (b_j), les deux polynômes P et Q définissent deux séries formelles :

$$P(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j x^j, \qquad Q(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j x^j.$$

Ainsi, le produit $P.Q$ est donné par la série formelle $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j x^j$, où

$$c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k . b_{j-k} x^j.$$

La série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j x^j$ est appelée produit des séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j x^j$ et $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j x^j$.

On peut considérer maintenant deux séries entières quelconques absolument converges $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j x^j$ et $\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j x^j$, alors : produit de ces séries est aussi absolument converge.

On a un résultat analogue lorsque on remplace (a_j) et (b_j) par des fonctions intégrables f et g, on obtient la quantité
$$\int f(y).g(x-y)dy,$$
appelée le produit de convolution de f et g.

3.1 Convolution des fonctions

Définition 3.1 *: Soit $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Le produit de convolution de f et g, noté $f * g$ est une fonction définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y).g(x-y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 : *Si $f * g$ existe on a :*

1. $f * g = g * f$
2. $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Preuve: Supposons que $f * g$ existe.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors :
   $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y).g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).g(x-y)dy_1 \cdots dy_n$.
   Faisant le changement de variable $z = x - y$, on trouve :
   $(f * g)(x) = \int_{+\infty}^{-\infty} \cdots \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-z).g(z)(-dz_1) \cdots (-dz_n)$.
   Alors : $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z).g(z)dz_1 \cdots dz_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z).g(z)dz$.
   Donc : $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.
2. Soit $x \notin (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. Alors : pour tout $y \in \operatorname{supp} f$ on a : $x - y \notin \operatorname{supp} g$, i.e $(f * g)(x) = 0$.

   Donc : l'ouvert d'annulation de $f * g$ contient $\overbrace{C_{\mathbb{R}^n}^{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}}^{0}$.
   Alors : $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

■

Proposition 3.2 : *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq +\infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ ou $p' = +\infty$ si $p = 1)$, alors : $f * g$ est défini par tout, borné, de plus : $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$.*

Preuve: Supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Si $1 < p < +\infty$, l'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} . \end{aligned}$$

Donc : $|(f*g)(x)| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$.
Si $p=1$ alors : $p'=+\infty$ et on a :

$$|(f*g)(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Alors : $f*g$ est défini par tout, borné, et on a : $\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$. ■

Remarque 3.1 *:*

i) *Si $p \in]1,+\infty[$ alors : $f*g$ est continue.*

ii) *Si $p,q \in [1,+\infty], f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, à support compact, $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors : $f*g$ est continue.*

Proposition 3.3 : *Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors : $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy$$

Preuve: On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dxdy.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy.$$

Mais, on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy.$$

■

Proposition 3.4 : *Soit $p,q \in [1,+\infty]$ telles que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$, alors : $f*g$ défini p.p. dans $\mathbb{R}^n$. De plus, si $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$, alors : $(f*g) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et on a : $\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.*

Preuve: En écrivant : $|f(y)g(x-y)| = (|f(y)|^p|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}}.(|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}.(|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$.
Or $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n), |g|^q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a : $|f|^p * |g|^q \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
En appliquent l'inégalité de Hölder généralisée en tenant en compte :
$\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)=1$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x-y)|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}}.\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{1-\frac{p}{r}}.\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q dy\right)^{1-\frac{q}{r}}$$

Alors :

$$|(f*g)(x)| \leq |(|f|^p*|g|^q)(x)|^{\frac{1}{r}}\|f\|^{1-\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\|g\|^{1-\frac{q}{r}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

En intégrant par rapport à x, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^r dx \leq \||f|^p * |g|^q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{r-p}_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \|g\|^{r-q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} .$$

Mais : $\||f|^p * |g|^q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \||f|^p\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \||g|^q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.
Donc : $\|f * g\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^r_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \|g\|^r_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. ■

Proposition 3.5 : *Soient $k \in \mathbb{N}, f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n), g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f$ ou $\operatorname{supp} f$ soit compact, alors : $f * g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, et on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$: $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$.*

Preuve:

i) Cas où $\operatorname{supp} f$ **est compact :**
Comme $g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, pour tout $|\alpha| \leq k$ la fonction $D^\alpha g$ est bornée sur toute compact (localement bornée). On déduit que $f * D^\alpha g$ est continue.
La fonction $x \longmapsto D^\alpha g(x - y)$ est dominé, en appliquant théorème de dérivation sous le signe intégrale, on obtient le résultat.

ii) Cas où $\operatorname{supp} g$ **est compact :**
Comme $f \in L^1_{loc}$ est $D^\alpha g$ est bornée, alors : $f * D^\alpha g$ est définie et continue.
Pour l'égalité $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$, on réfère à [13], tome1, p122.

■

Proposition 3.6 : *Soit (φ_j) une suite régularisante (voir définition 1.24) et $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$. La suite $(f_j) = (\varphi_j * f)$ est appelée une suite régularisée, elle vérifiait :*

1. *Pour tout j : $f_j \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f_j \to f$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Si $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $f_j \to f$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $f_j \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve: D'après Définition 1.24 : $(\varphi_j) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et il existe $0 < \varepsilon_j \longrightarrow 0$ tel que :

$$\varphi_j \geq 0 \qquad \operatorname{supp} \varphi_j \subset B(0, \varepsilon_j) \qquad \int_{B(0,\varepsilon_j)} \varphi_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x)dx = 1.$$

$f_j(x) = (\varphi_j * f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_j(x - y)dy.$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut considère $\varphi_j \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, a support compact, alors d'après Proposition 3.5 : $f_j \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, et puisque k est quelconque il résulte que $f_j \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $m \in \mathbb{R}^n$. On a pour $|\alpha| \leq m$. Il existe $j_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

pour tout $j \geq j_0$ on a $B(0, \varepsilon_j) \subset K$. Alors :

$$\begin{aligned}
|D^\alpha(f_j)(x) - D^\alpha f(x)| &= |D^\alpha(f * \varphi_j)(x) - D^\alpha f(x)| \\
&= |(D^\alpha f * \varphi_j)(x) - D^\alpha f(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y).\varphi_j(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x).\varphi_j(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)).\varphi_j(y)dy \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)|.\varphi_j(y)dy \\
&= \int_{B(0,\varepsilon_j)} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)|.\varphi_j(y)dy \\
&\leq \sup_{y \in B(0,\varepsilon_j)} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)| \int_{B(0,\varepsilon_j)} \varphi_j(y)dy \\
&\leq \sup_{y \in B(0,\varepsilon_j)} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)|.
\end{aligned}$$

Donc : $\sup_{x \in K} |D^\alpha(f_j)(x) - D^\alpha f(x)| \leq \sup_{x \in K} \sup_{y \in B(0,\varepsilon_j)} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)|$.
de la continuité de D^α on a : $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in B(0,\varepsilon_j)} |D^\alpha f(x-y) - D^\alpha f(x)| = 0$.
Alors : $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in K} |D^\alpha(f_j)(x) - D^\alpha f(x)| = 0$, donc $f_j \to f$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. Comme $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp} f \subset K$ et $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ pour tout $j \in \mathbb{R}^n$ (cela est possible car $\varepsilon \longrightarrow 0$). Puisque $f_j \to f$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a alors : $f_j \to f$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,
4. Soit $\varepsilon > 0$. De la densité de $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (voir théorème IV.12 dans [5]) il existe $g \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ fixé tel que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.
En utilisant des arguments analogues de 2., la suite $(\varphi_j * g)$ converge vers g dans $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$, i.e $(\varphi_j * g)$ converge vers g uniformément sur tout compact.
On a : $\operatorname{supp}(\varphi_j * g) \subset \operatorname{supp} \varphi_j + \operatorname{supp} g \subset K$, où K est un compact fixé. Alors :

$$\|\varphi_j * g - g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_K |(\varphi_j * g)(x) - g(x)|^p dx \leq mes(K). \sup_{x \in K} |(\varphi_j * g)(x) - g(x)|^p \overset{j \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

En écrivant : $\varphi_j * f - f = (\varphi_j * (f - g)) + (\varphi_j * g - g) + (f - g)$, il résulte :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\varphi_j * (f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_j * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f - g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|\varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_j * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= 2\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_j * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Il résulte que $\varphi_j * f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

■

3.2 Résultats principaux

Ces résultats jouent un rôle important dans les définitions concernant le produit de convolution entre les distributions.

Définition 3.2 (***famille convolutive***) :

i) *On dit que deux fermées $F, G \subset \mathbb{R}^n$ sont convolutives si :*

$$\forall R > 0, \exists \rho > 0 : (x \in F \wedge y \in G \wedge |x+y| < R) \Rightarrow (|x| < \rho \wedge |y| < \rho)$$

ii) *On dit qu' une famille fini des fermées $(F_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}^n$ sont convolutives si :*

$$\forall I \subset J, \forall R > 0, \exists \rho > 0 : ((x_j)_{i\in I} \in F_i \wedge \left|\sum_{i\in I} x_i\right| < R) \Rightarrow (|x_i| < \rho, i \in I)$$

Exemple 3.1 : *Supposons que A est fermé et B est compact. Comme B est compact, il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B$ on a : $|y| \leq r$. Soit $R > 0$ $x \in A$ et $y \in B$ tels que $|x+y| < R$. On a :*
$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| < r + R$ *et* $|y| \leq r < r + R$.
Alors : A et B sont sont convolutifs.

Exemple 3.2 : *On considère dans $\mathbb{R}$ la famille finie $([a_i, +\infty[)_{i\in I}$.*
Soit $R > 0$ et soit $x_i \in [a_i, +\infty[$ tels que $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| < R$. On a :
$0 \leq \sum_{i\in I}(x_i - a_i) \leq \left|\sum_{i\in I} x_i\right| + \left|\sum_{i\in I} a_i\right| < R + \left|\sum_{i\in I} a_i\right|$.
Donc : $a_i \leq x_i \leq R + \left|\sum_{i\in I} a_i\right|$ Il existe alors : ρ_i telle que $|x_i| \leq \rho_i$.
On pose : $\rho = \max_{i\in I} \rho_i$ on trouve : $|x_i| \leq \rho$ pour tout i.
Donc : la famille $([a_i, +\infty[)_{i\in I}$ est une famille convolutives.

Exemple 3.3 : *Soit les deux intervalles $[a, +\infty[,]-\infty, b]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_o$ on a : $n > a$ et $-n < b$. Donc : $n + (-n) = 0 < R$ quel que soit $R > 0$, mais n tend vers $+\infty$, donc : non borné.*
Alors : $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ ne sont pas convolutives quelque soit a, b dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.7 : *Soient $F, G \subset \mathbb{R}^n$ deux fermées convolutives, alors : $F + G$ est fermée.*

Preuve: : Soit $(x_j + y_j)_{j\in\mathbb{R}^n}$ une suite dans $F + G$, converge vers $z \in \mathbb{R}^n$. Donc : la suite $(x_j + y_j)$ est bornée, i.e il existe $R > 0$ tel que $x_j + y_j < R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
F et G sont convolutifs, il existe alors $\rho > 0$ tel que $x_j < \rho$ et $y_j < \rho$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Les deux suites alors sont bornées, on peut extraire deux suites $(x_{jk}), (y_{jk})$ telles que (x_{jk}) converge vers x et (y_{jk}) converge vers y. Alors : $(x_{jk} + y_{jk})$ converge vers$x + y$, et d'après l'unicité de la limite on déduit que $z = x + y \in F + G$.
Alors : $F + G$ est fermée de $\mathbb{R}^n$. ■

Théorème 3.1 (***dérivée sous le crochet de distribution***) : *Soit* $\varphi \in \xi(\mathbb{R}^{p+q}), T \in \xi'(\mathbb{R}^p)$. *La fonction :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & f(y) = \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^q)$ *et on a :* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : D^\alpha f(y) = \langle T(x), D_y^\alpha \varphi(x,y) \rangle$.

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}^q$ et $y_0 \in \mathbb{R}^q$. D'après la formule de Taylor on a pour $h \in \mathbb{R}^q$:

$$\varphi(x, y_0 + h) = \varphi(x, y_0) + \sum_{i=0}^{q} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}.h_i + R(x, y_0, h),$$

où $R(x, y_0, h) = 2 \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) D_y^\alpha \varphi(x, y_0 + th) dt$.

La fonction $y \longmapsto R(x, y_0, h)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et T est une distribution à support compact, il résulte qu'il existe $M > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ fixé tel qu'on a au voisinage compact K de $\operatorname{supp} T$:

$$|\langle T, R(x, y_0, h) \rangle| \leq M P_{K,m}(R) = M. \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{(x,y) \in K} |D_y^\beta R(x, y_0, h)|.$$

On a pour $|h|$ assez petit :

$$|D_y^\beta R(x, y_0, h)| \leq C_1.|h|^2 \sup_{|\alpha| \leq 2} |D_y^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y_0)| \leq C P_{K,m+2}(\varphi)$$

On déduit que $|\langle T, R(x, y_0, h) \rangle| = o(|h|^2)$. Alors :

$$\langle T, \varphi(x, y_0 + h) \rangle = \langle T, \varphi(x, y_0) \rangle + \sum_{i=0}^{q} \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \rangle.h_i + o(|h|^2),$$

Donc : $f(y_0 + h) = f(y_0) + \sum_{i=0}^{q} \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}.h_i + o(|h|^2)$.

Alors : f est différentiable au point y_0 et on a : $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$.

Puisque ça valable pour tout i, alors : $f \in \mathscr{C}^1$. Le résultat va être obtenu par récurrence. ■

Théorème 3.2 (***intégration sous le crochet de distribution***) : *Soit* $\varphi \in \xi(\mathbb{R}^{p+q}), T \in \xi'(\mathbb{R}^p)$. *On désigne par* P *une pavé compact de* $\mathbb{R}^q$. *Alors :*

$$\left\langle T(x), \int_P \varphi(.,y) dy \right\rangle = \int_P \langle T(x), \varphi(.,y) \rangle \, dy.$$

Preuve: On écrivant : $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_q, b_q]$, on obtient :

$$\int_P \varphi(.,y) dy = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_q}^{b_q} \varphi(.,y) dy_1 \cdots dy_q.$$

Posons : $F_i(y_i) = \left\langle T(x), \int_{a_i}^{y_i} \varphi(., y_1, \cdots s, \cdots, y_q) ds \right\rangle$ $(1 \leq i \leq q)$.
En appliquant le théorème précédant, on trouve :

$$F_i'(y_i) = \langle T(x), \varphi(., y_1, \cdots y_i, \cdots, y_q) \rangle .$$

Donc : $F_i(y_i) = \int_{a_i}^{y_i} \langle T(x), \varphi(., y_1, \cdots s, \cdots, y_q) \rangle \, ds$.
Ainsi, on fait l'intégration q fois, on trouve le résultat. ■

Remarque 3.2 *: On peut remplacer le pavé P par un autre ensemble mesurable.*

3.3 Convolution d'une fonctions avec une distribution

On peut écrire le produit de convolution d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ comme suivant :

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) dy = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \langle f, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

ou $\tau_x \check{\varphi}(y) = \varphi(x-y)$.

Définition 3.3 : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Le produit de convolution $T * \varphi$ défini comme suivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle . \tag{3.2}$$

On peut prolonger le résultat précédant au cas où T a support compact et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a la définition suivante :

Définition 3.4 : *Soit $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$. Le produit de convolution $T * \varphi$ défini comme suivant : $\forall x \in \mathbb{R}^n : (T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}}$.*

Théorème 3.3 : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{supp} \varphi$ ou $\operatorname{supp} T$ soit compact. Alors :*

1. *$T * \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a : $D^\alpha(T * \varphi) = T * D^\alpha \varphi = (D^\alpha T) * \varphi$.*
3. *$\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$.*

Preuve: : D'après la définition : $T * \varphi$ est une fonction sur $\mathbb{R}^n$.

1. Comme $\tau_x \check{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on déduit d'après Théorème 3.1 que $T * \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Soit $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, alors :

$$\begin{aligned} D^\alpha (T * \varphi)(x) &= D^\alpha \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, D^\alpha \tau_x \check{\varphi} \rangle \\ &= |-1|^{|\alpha|} \langle T, \tau_x D^\alpha \check{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, \tau_x \check{D}^\alpha \varphi \rangle \\ &= (T * D^\alpha \varphi)(x) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} D^\alpha(T*\varphi)(x) &= D^\alpha\langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \\ &= \langle T, D^\alpha\tau_x\check{\varphi}\rangle \\ &= |-1|^{|\alpha|}\langle T, \tau_x D^\alpha\check{\varphi}\rangle \\ &= \langle D^\alpha T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \\ &= (D^\alpha T*\varphi)(x) \end{aligned}$$

Donc :$D^\alpha(T*\varphi) = T*D^\alpha\varphi = (D^\alpha T)*\varphi$.

3. En utilisant des arguments analogues à la démonstration de Proposition 3.1, partie 2.

■

Théorème 3.4 : *Soit* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi, \psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telles que soit* $\operatorname{supp} T$ *compact, soit* $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi$ *sont les deux compacts. Alors :*

1. $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi)$
2. $\langle T*\varphi, \psi\rangle = \langle T, \varphi*\psi\rangle$

Preuve: On a :

1. D'une part :

$$\begin{aligned} (T*\varphi)*\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}(T*\varphi)(y)\psi(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle T(z), \varphi(y-z)\rangle\psi(x-y)dy \\ &= \left\langle T(z), \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-z)\psi(x-y)dy)\right\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} T*(\varphi*\psi)(x) &= \langle T(z), (\varphi*\psi)(x-z)\rangle \\ &= \left\langle T(z), \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-t)\psi(t)dt\right\rangle. \end{aligned}$$

Faisant le changement de variable $t = x-y$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-t)\psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-z)\psi(x-y)dy.$$

Donc : $T*(\varphi*\psi)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-z)\psi(x-y)dy$.
Ce qui donne : $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi)$.

2.
$$\begin{aligned} \langle T*\varphi, \psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}(T*\varphi)(x)\psi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle T(y), \varphi(x-y)\rangle\psi(x)dx \\ &= \left\langle T(y), \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\psi(x)dx)\right\rangle. \\ &= \langle T(y), (\varphi*\psi)(y)\rangle. \end{aligned}$$

Donc : $\langle T * \varphi, \psi\rangle = \langle T, \varphi * \psi\rangle$.

■

Proposition 3.8 : *Soit $T \in \xi'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On a :*

1. $\forall a \in \mathbb{R}^n : \tau_a T * \varphi = T * \tau_a\varphi = \tau_a(T * \varphi)$
2. $\langle T, \varphi\rangle = (T * \check{\varphi})(0)$

Preuve: Soit $T \in \xi'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On a :

   D'une part :
$$\begin{aligned}
\tau_a T * \varphi(x) &= \langle \tau_a T, \varphi(x-y)\rangle \\
&= \langle T, \varphi(a+x-y)\rangle \\
&= \langle T, \tau_x\check{\varphi}(-a+y)\rangle \\
&= \langle T, \tau_x\check{\tau_a\varphi}\rangle \\
&= (T * \tau_a\varphi)(x).
\end{aligned}$$

   D'autre part :
$$\begin{aligned}
\tau_a(T * \varphi)(x) &= (T * \varphi)(x-a) \\
&= \langle T, \varphi(x-a-y)\rangle \\
&= \langle T, \check{\varphi}(a+y-x)\rangle \\
&= \langle \tau_a T, \check{\varphi}(y-x)\rangle \\
&= \langle \tau_a T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \\
&= (\tau_a T * \varphi)(x).
\end{aligned}$$

   Alors : $\tau_a T * \varphi = T * \tau_a\varphi = \tau_a(T * \varphi)$
2. $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_0\varphi\rangle = \langle T, \tau_0\check{\check{\varphi}}\rangle = (T * \check{\varphi})(0)$.

■

Maintenant, on va prolonger le produit de convolution qui défini dans $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ au $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ comme suivant :

Définition 3.5 : *Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\operatorname{supp} T, \operatorname{supp}\psi$ sont convolutives. Soit $(\psi_j) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ une suite régularisante. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on pose :*

$$\langle T * \psi, \varphi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T * \psi_j, \varphi\rangle.$$

Théorème 3.5 : *L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

3.4 Produit tensoriel

Soit $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts.

Définition 3.6 (***produit tensoriel des fonctions***) : *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}, g : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Le produit tensoriel $f \otimes g$ de f et g est la fonction défini sur $U \times V$ comme suivant :*

$$\forall (x,y) \in U \times V : f \otimes g(x,y) = f(x).g(y).$$

Les propriétés suivantes se déduisent directement de la définition :

Proposition 3.9 :

1. *Si* $f \in \xi(U), g \in \xi(V)$, *alors :* $f \otimes g \in \xi(U \times V)$.
2. $\operatorname{supp} f \otimes g = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$.

Le résultat suivant est important pour ce qui suit :

$\mathscr{D}(U) \times \mathscr{D}(V)$ est dense dans $\mathscr{D}(U \times V)$.

Notons que si $f \in L^1_{loc}(U), g \in L^1_{loc}(V)$ et $\Phi \in \mathscr{D}(U \times V)$ on a d'après théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\iint_{U\times V} (f \otimes g)(x,y)\Phi(x,y)dxdy &= \iint_{U\times V} f(x)g(y)\Phi(x,y)dxdy \\
&= \int_U f(x)dx \int_V g(y)\Phi(x,y)dy \\
&= \int_V g(y)dy \int_U f(x)\Phi(x,y)dx
\end{aligned}$$

On peut écrire alors :

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g(y), \Phi(.,y)\rangle\rangle = \langle g, \langle f(x), \Phi(x,.)\rangle\rangle.$$

Si on a : $\Phi(x,y) = (\varphi \otimes \psi)(x,y) = \varphi(x).\psi(y)$, on écrit :

$$\langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.\langle g, \psi \rangle.$$

On a une résultat analogue au résulta ci-dessus concernant les distributions :

Théorème 3.6 : *Soient* $T \in \mathscr{D}'(U), S \in \mathscr{D}'(V)$. *Il existe unique* $W \in \mathscr{D}'(U \times V)$ *telle que pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ *et toute* $\varphi \in \mathscr{D}(V)$:

$$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.\langle S, \psi \rangle.$$

De plus, on a pour $\Phi \in \mathscr{D}(U \times V)$:

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle T, \langle S(y), \Phi(.,y)\rangle\rangle = \langle S, \langle T(x), \Phi(x,.)\rangle\rangle.$$

Preuve: On pose : $F(x) = \langle S(y), \Phi(.,y)\rangle$. D'après Théorème 3.1, on a : $F \in \mathscr{C}^\infty(U)$ et plus précieusement $F \in \mathscr{D}(U)$. Soit un compact $K = G \times H \subset U \times V$ un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supposons que $\Phi \in \mathscr{D}_K(U \times V)$. On pose $\langle W, \Phi \rangle = \langle T, F \rangle$. Il existe alors

$M_1 > 0, M_2 > 0, m_1 \in \mathbb{N}$ et $m_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} |\langle W, \Phi \rangle| &= |\langle T, F \rangle| \\ &\leq M_1. \sup_{|\alpha| \leq m_1, x \in K_1} |F(x)| \\ &= M_1. \sup_{|\alpha| \leq m_1, x \in K_1} |\langle S(y), \Phi(., y) \rangle| \\ &\leq M_1.m_2 \sup_{|\alpha| \leq m_1, x \in K_1} \sup_{|\beta| \leq m_2, x \in K_2} |\Phi(x, y)| \\ &\leq M.P_{K, m_1+m_2}(\Phi). \end{aligned}$$

Donc : W définit une distribution, elle est unique par définition.
La deuxième formule devient d'après la densité de $\mathscr{D}(U) \times \mathscr{D}(V)$ dans $\mathscr{D}(U \times V)$. ■

Cela nous permis de donner la définition suivante :

Définition 3.7 (***produit tensoriel des distributions***) : *Soit* $T \in \mathscr{D}'(U), S \in \mathscr{D}'(V)$. *Le produit tensoriel de* T *et* S *est la distribution notée* $T \otimes S \in \mathscr{D}'(U \times V)$, *définie par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(U), \forall \varphi \in \mathscr{D}(V) : \langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle . \langle S, \psi \rangle.$$

On a par la formule générale :

$$\forall \Phi \in \mathscr{D}(U \times V) : \langle T \otimes S, \Phi \rangle = \langle T, \langle S, \Phi(., y) \rangle \rangle = \langle S, \langle T, \Phi(x, .) \rangle \rangle$$

Remarque 3.3 *: Le produit tensoriel reste valable pour les distributions a support compact, en utilisant le crochet* $\langle ., . \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{E}}$

Exemple 3.4 : *Soient* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^m$. *On a pour* $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ *:*

$$\begin{aligned} \langle \delta \otimes \delta_b, \Phi \rangle &= \langle \delta_a, \langle \delta_b, \Phi(., y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_a, \Phi(., b) \rangle \\ &= \Phi(a, b) \\ &= \langle \delta_{(a,b)}, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Donc : $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$.

Exemple 3.5 : *Soient* $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. *Alors :*

$$\begin{aligned} \langle \delta \otimes H, \Phi \rangle &= \langle \delta, \langle H, \Phi(., y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta, \int_0^{+\infty} \Phi(., y) dy \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi(0, y) dy. \end{aligned}$$

Exemple 3.6 : *Soient* $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. *Alors :*

$$\begin{aligned}\langle H \otimes H, \Phi\rangle &= \langle H, \langle H, \Phi(., y)\rangle\rangle \\ &= \langle H, \int_0^{+\infty} \Phi(., y)dy\rangle \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Phi(x, y)dxdy \\ &= \langle \chi_{\mathbb{R}^2_+}, \Phi\rangle.\end{aligned}$$

Donc : $H \otimes H = \chi_{\mathbb{R}^2_+}$.

Proposition 3.10 : *Soient* $T \in \mathscr{E}'(U), S \in \mathscr{E}'(V), f \in \mathscr{E}(U)$ *et* $g \in \mathscr{E}(V)$. *Alors :*

1. $\operatorname{supp}(T \otimes S) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} S$.
2. $D_x^\alpha D_y^\beta (T \otimes D) = D_x^\alpha T \otimes D_y^\beta S$.
3. $(f \otimes g)(T \otimes S) = (f.T) \otimes (g.S)$.
4. *Le produit tensoriel est associatif.*
5. *Le produit tensoriel n'est pas commutatif en général.*

3.5 Convolution de deux distributions

Maintenant, on va généraliser le produit de convolution des fonctions en utilisant une autre approche, basée sur la formule distributionnelle suivante :
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On sais que $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z - y)g(y)\varphi(z)dzdy.\end{aligned}$$

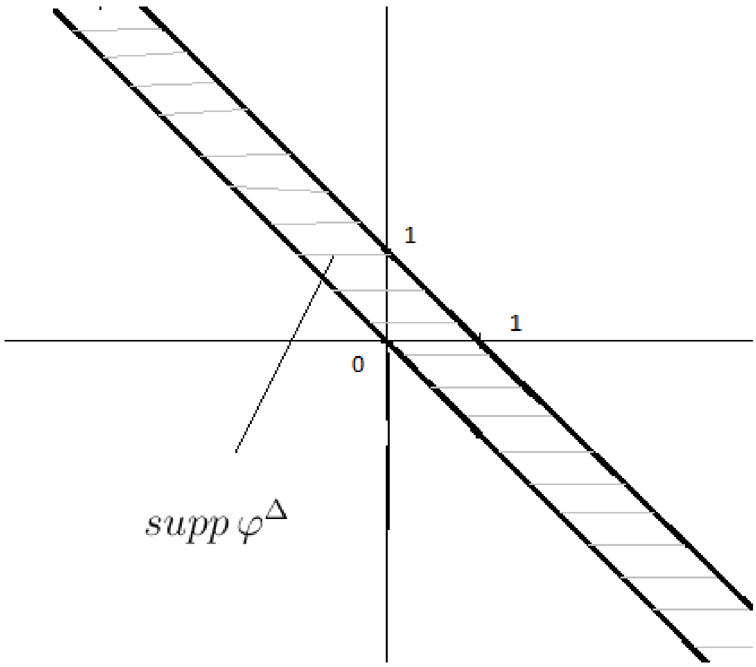
En utilisant le changement de variable $x = z - y$, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(x + y)dy\end{aligned}$$

En notant $\varphi^\Delta(x, y) = \varphi(x + y)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi^\Delta(x, y)dy \\ &= \langle f(x), \langle g(y), \varphi^\Delta(., y)\rangle\rangle \\ &= \langle f \otimes g, \varphi^\Delta\rangle.\end{aligned}$$

Pour généraliser cette notion au distribution, il faut donner un sens au crochet $\langle . \otimes ., \varphi^\Delta\rangle$, cela n'est pas immédiate car φ^Δ n'est pas forcément appartient à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Par exemple, on prend $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \in [0, 1]$, alors : $\operatorname{supp}\varphi^\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$ n'est pas compact.



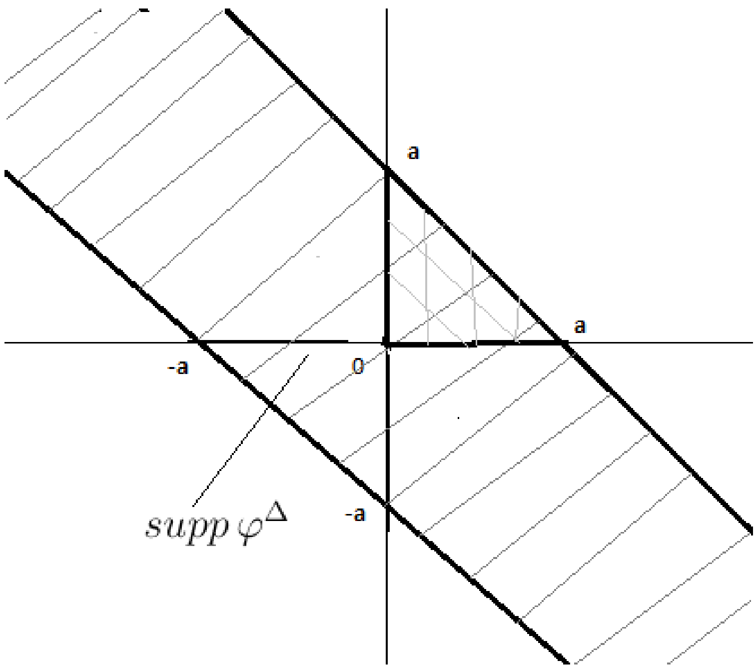
Le crochet $\langle S \otimes T, \varphi^{\Delta} \rangle$ a un sens si $\operatorname{supp} S$ et $\operatorname{supp} T$ sont convolutifs au sens de Définition 3.2, dans ce cas là, on donne la définition suivante :

Définition 3.8 (***produit de convolution des distributions***) : *Soit S, T deux distributions dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $sipp\, S, \operatorname{supp} T$ sont convolutives. On défini le produit de convolution $S * T$ comme suivant :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) : \langle S * T, \varphi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = \langle S \otimes T, \varphi^{\Delta} \rangle_{\xi', \xi}$$

ou $\varphi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x + y)$

Exemple 3.7 : *Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Il existe $a > 0$ tel que* $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$, *i.e* $\operatorname{supp} \varphi^{\Delta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x + y \leq a\}$. *Alors :*



$$\begin{aligned}
\langle H * H, \varphi \rangle &= \langle H \otimes H, \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle \chi_{\mathbb{R}^2_+}, \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x+y) dx dy \\
&= \int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \varphi(z) dz \\
&= \int_0^{a} dy \int_y^{a} \varphi(z) dz.
\end{aligned}$$

Proposition 3.11 : *Soit $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n, S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tels que $\operatorname{sipp} S, \operatorname{supp} T$ sont convolutives. Alors :*

1. *$\delta_a * T = \tau_a T$. En particulier $\delta * T = \tau_0 T = T$.*
2. *$\tau_a(T * S) = \tau_a T * S = T * \tau_a S$.*
3. *$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$. En particulier : $D^\alpha \delta * T = D^\alpha T$.*

Preuve: Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On a :

1. pour $a \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}
\langle \delta_a * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_a \otimes T, \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle T, \langle \delta_a, \varphi^{\Delta} \rangle \rangle \\
&= \langle T, \varphi(a+x) \rangle \\
&= \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \\
&= \langle \tau_a T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$
Alors : $\delta_a * T = \tau_a T$, et en particulier $\delta * T = \tau_0 T = T$.

2. pour $a \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}
\langle \tau_a(T * S), \varphi \rangle &= \langle (T * S), \tau_{-a} \varphi \rangle \\
&= \langle T \otimes S, (\tau_{-a} \varphi)^{\Delta} \rangle \\
&= \langle T, \langle S, \varphi(a+x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T, \langle S, \tau_{-a} \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle T, \langle \tau_a S, \varphi \rangle \rangle \\
&= \langle T \otimes \tau_a S, \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle T * \tau_a S, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$
D'autre part :
$$\begin{aligned}
\langle \tau_a(T * S), \varphi \rangle &= \langle (T * S), \tau_{-a} \varphi \rangle \\
&= \langle T \otimes S, (\tau_{-a} \varphi)^{\Delta} \rangle \\
&= \langle S, \langle T, \varphi(a+x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle S, \langle T, \tau_{-a} \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle S, \langle \tau_a T, \varphi \rangle \rangle \\
&= \langle \tau_a T \otimes S, \varphi^{\Delta} \rangle \\
&= \langle \tau_a T * S, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$
Alors : $\tau_a(T * S) = \tau_a T * S = T * \tau_a S$.

3. pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(T*S),\varphi\rangle &= |-1|^\alpha\langle (T*S), D^\alpha\varphi\rangle\\
&= |-1|^\alpha\langle T\otimes S, (D^\alpha\varphi)^\Delta\rangle\\
&= \langle T, |-1|^\alpha\langle S, D^\alpha\varphi(x+y)\rangle\rangle\\
&= \langle T, |-1|^\alpha\langle S, D^\alpha\varphi^\Delta\rangle\\
&= \langle T, \langle D^\alpha S,\varphi\rangle\rangle\\
&= \langle T\otimes D^\alpha S, \varphi^\Delta\rangle\\
&= \langle T* D^\alpha S,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(T*S),\varphi\rangle &= |-1|^\alpha\langle (T*S), D^\alpha\varphi\rangle\\
&= |-1|^\alpha\langle T\otimes S, (D^\alpha\varphi)^\Delta\rangle\\
&= \langle S, |-1|^\alpha\langle T, D^\alpha\varphi(x+y)\rangle\rangle\\
&= \langle S, |-1|^\alpha\langle T, D^\alpha\varphi^\Delta\rangle\\
&= \langle S, \langle D^\alpha T,\varphi\rangle\rangle\\
&= \langle D^\alpha T\otimes S, \varphi^\Delta\rangle\\
&= \langle D^\alpha T* S,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Alors : $D^\alpha(S*T) = D^\alpha S*T = S*D^\alpha T$. En particulier : $D^\alpha\delta*T = D^\alpha(\delta*T) = D^\alpha T$.

■

3.6 Équations de convolution :

Définition 3.9 : *On appelle équation de convolution toute équation de le forme $A*U=T$, ou A et T sont des distributions connues, et U est l'inconnu.*

Exemple 3.8 : *Soit l'èquation au dérivées partielles :*

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha U = f,$$

où a_α sont des constants réels et f est une fonction localement intégrable.
D'après Théorème 3.3, on peut écrire : $D^\alpha U = D^\alpha(\delta*U) = D^\alpha\delta*U$.
Alors : l'équation peut écrire sous la forme $A*U=f$, ou $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha\delta$.

Définition 3.10 (***solution élémentaire***) : *Soit $A\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. On dit qu' une distribution U_A est une solution élémentaire de A, si on a $A*U_A=\delta$.*

Remarque 3.4 :

1. *La solution élémentaire n'est pas toujours existe.*

2. *Si U_0, U_1 deux solutions élémentaire de A, alors : $U_1 = U_0 + V$ où V est une solution générale de l'èquation $A * V = 0$. En effet, si on pose : $V = U_1 - U_0$ on trouve :*

$$A * V = A * (U_1 - U_0) = A * U_1 - A * U_0 = 0.$$

On admis le théorème suivant :

Théorème 3.7 (**Malgrange – Ehrenpreis**) : *Toute équation aux dérivées partielles à co-effitions constats admet une solution élémentaire.*

Théorème 3.8 : *Soit $A \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Supposons que A admet une solution élémentaire u_A. Alors :*

1. *Pour toute $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $A * U = T$.*
2. *Soit $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. S'il existe $U \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ solution de l'èquation $A*U = T$, il est unique et on a $u = U_A * f$.*

Preuve: : Supposons que $A \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ admet une solution élémentaire u_A.

1. Soit $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. On pose : $U = U_A * T$, alors :

$$A * U = A * (U_A * T) = (A * U_A) * T = \delta * T = T.$$

2. Supposons qu'il existe $U \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ solution de l'èquation $A * U = T$, alors :

$$U = \delta * U = (U_A * A) * U = U_A * (A * U) = U_A * T,$$

ce qui montre l'unicité.

■

Exemple 3.9 : *La fonction w, définie par : $w(x) = \dfrac{|x|}{2}$, est une solution de l'équation $u'' = \delta$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\langle w'', \varphi \rangle &= \langle w, \varphi'' \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2}\varphi''(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} -\frac{x}{2}\varphi''(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{2}\varphi''(x)dx \\
&= -\Big[\frac{x}{2}\varphi'(x)\Big]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi'(x)}{2}dx + \Big[\frac{x}{2}\varphi'(x)\Big]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{2}dx \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Exemple 3.10 : *La fonction w_2, définie par : $w_2(x) = \dfrac{\ln|x|}{2\pi}$, est une solution élémentaire de l'opérateur de Laplace Δ dans $\mathbb{R}^2$.*

En effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$*. Alors :*

$$\begin{aligned}\langle \Delta w_2, \varphi\rangle &= \langle w, \Delta\varphi\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{|x|>\varepsilon}\ln|x|.\Delta\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green, on trouve :

$$\int_{|x|>\varepsilon}\ln|x|\Delta\varphi(x)dx = \int_{|x|>\varepsilon}\Delta\ln|x|.\varphi(x)dx + \int_{|x|=\varepsilon}\ln|x|.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma(x) - \int_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\ln|x|}{\partial\nu}\varphi d\sigma(x).$$

où ν *est le vecteur normal extérieur de l'ensemble* $\{|x|>\varepsilon\}$*, i.e le vecteur normal intérieur de* $B(0,\varepsilon)$*, donc :* $\nu(x_1,x_2) = -(x_1,x_2)$*.*

$*)$ $\Delta\ln|x| = 0$ *sur* $\{|x|>\varepsilon\}$*, donc :* $\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon}\Delta\ln|x|.\varphi(x)dx = 0.$

$**)$ $\displaystyle\frac{\partial\ln|x|}{\partial\nu} = -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.x_1 - \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}.x_2 = -1.$ *Donc :*

$$-\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\ln|x|}{\partial\nu}\varphi d\sigma(x) = \int_{|x|=\varepsilon}\varphi d\sigma(x) = \int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta.$$

D'après la formule de la moyenne, il existe x_ε *tel que* $|x_\varepsilon| = \varepsilon$ *tel que :*

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta = 2\pi\varphi(x_\varepsilon).$$

Donc : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\ln|x|}{\partial\nu}\varphi d\sigma(x)\right] = 2\pi\varphi(0).$

$***)$ $\displaystyle\int_{|x|=\varepsilon}\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma(x) = -\ln\varepsilon\int_{|x|=\varepsilon}\left[x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]d\sigma(x).$ *Alors :*

$$\left|\int_{|x|=\varepsilon}\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma(x)\right| \le \varepsilon\ln\varepsilon\int_{|x|=\varepsilon}\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|\right]d\sigma(x) \le M(\varphi).\varepsilon\ln\varepsilon.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon}\ln|x|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma(x) = 0.$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \Delta w_2, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{|x|>\varepsilon}\ln|x|.\Delta\varphi(x)dx \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle\delta,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Exemple 3.11 : *En utilisant la méthode ci-dessus pour montrer que La fonction* w_n*, définie par :* $w_n(x) = -\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}(n-2)}\dfrac{1}{|x|^{n-2}}$*, est une solution élémentaire de l'opérateur de Laplace* Δ *dans* $\mathbb{R}^n$ $(n\ge 3)$*, où* $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\frac{n-2}{2}}e^{-t}dt.$

Les résultats suivants sera donnés sans démonstration :

Théorème 3.9 : *Soit* w *la solution élémentaire de l'opèrateur* Δ*. Pour* $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *on pose* $u = w * f$*. Alors :*

1. *Pour toute* $n\ge 2, u$ *est une solution de l'èquation* $\Delta u = f$*, et on a :* $u \in \mathscr{E}'(C_{\mathbb{R}^n}^{\operatorname{supp} f})$*.*

2. *Pour toute* $n \geq 3$ *on a :* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} u(x) = 0$.

Corollaire 3.1 : *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, et soit* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *telle que* $\Delta u = 0$. *Alors :* $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. *Autrement dit :*

Les distributions harmoniques sont les fonctions harmoniques.

Théorème 3.10 : *Soit* P *un opérateur différentiel a coefficients constant dans* $\mathbb{R}^n$. *Supposons que* P *admet une solution élémentaire* $w \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Alors : pour toute* $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *la distribution* $w * f$ *est une solution de l'èquation* $Pu = f$, *et on a :* $u \in \mathscr{E}'(C_{\mathbb{R}^n}^{\operatorname{supp} f})$.

Théorème 3.11 : *Soit l'opèrateur différentiel a coefficients constantes* P_m *qui défini dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^+)$ *par :* $P_m U = U^{(m)} + c_{m-1}U^{(m-1)} + c_{m-2}U^{(m-2)} + \ldots + c_1 U' + c_0 U$.
L'opèrateur P_m *admet une solution élémentaire unique* $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^+)$, *et on a* $w = H.w_0$, *ou* H *est la fonction de Heaviside, et* w_0 *la solution unique du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} Pw_0 = 0, \\ w_0^{(k)}(0) = 0, k = 0, \ldots, m - 2, \\ w_0^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Exercices

Exercice 3.1 : *Trouver* $f * g$ *pour les fonctions suivants :*

1. $f(x) = e^{ax}, g(x) = H(x), a \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sin x, g(x) = e^{-|x|}$.
3. $f(x) = \chi_{[0,1]}(x), g(x) = x^2$.
4. $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 3.2 : *Soit la fonction* θ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \theta(x) = \begin{cases} 0 & : & |x| > 1 \\ 1 & : & |x| \leq 1. \end{cases}.$$

1. *Montrer que* $\theta \in L^1(\mathbb{R})$.
2. *Calculer* $\theta * \theta$.
3. *Calculer* $\theta * H$, *ou* H *est la fonction de Heaviside.*

Exercice 3.3 : *Soit* $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ *deux fermées coniques, ie*

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in F, \forall y \in G : \lambda x \in F, \lambda y \in G.$$

On suppose que (F, G) *sont convolutive. Montrer que* $F \cap (-G) = \{0\}$.

Exercice 3.4 : *Soit H la fonction de Heaviside. Déterminer les distributions :*

$$\nabla(H \otimes H), \qquad \Delta(H \otimes H), \qquad (xH \otimes y^2 H).$$

Exercice 3.5 : *Soit H la fonction de Heaviside. Déterminer les distributions :*

$$(H * H)'', \quad (xH * x^2 H), \ (\delta'' * H) \quad (\delta' * vp_{\frac{1}{x}})$$

Exercice 3.6 : *Résoudre, dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle suivante :*

$$U'' = H$$

Exercice 3.7 : *On considère l'opérateur de la chaleur dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:*

$$D = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Vérifier que la distribution associé au fonction :

$$E(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

est une solution élémentaire de l'opérateur D.

Exercice 3.8 : *On considère l'opérateur des ondes dans $\mathbb{R}^2$:*

$$D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Vérifier que la distribution associé au fonction :

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \ t - |x| > 0 \\ 0 & : \ t - |x| \leq 0, \end{cases}$$

est une solution élémentaire de l'opérateur D.

Solutions d'exercices

Solution 3.1 : *Soit $x \in \mathbb{R}$. On va calculer $(f * g)(x)$ dans les cas suivantes :*

1. $f(x) = e^{ax}, g(x) = H(x), a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y).g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x-y)} H(y)dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{a(x-y)} dy \end{aligned}$$

Donc :

$$(f*g)(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}}{a} & : \; a>0,\\ +\infty & : \; a<0.\end{cases}$$

2. $f(x)=\sin x, g(x)=e^{-|x|}$.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y).g(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x-y)e^{-|y|}dy\\ &= \int_{-\infty}^{0}\sin(x-y)e^{y}dy+\int_{0}^{+\infty}\sin(x-y)e^{-y}dy\\ &= [\sin(x-y)e^{y}]_{-\infty}^{0}+\int_{-\infty}^{0}\cos(x-y)e^{y}dy\\ &\quad -[\sin(x-y)e^{y}]_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\cos(x-y)e^{-y}dy\\ &= \int_{-\infty}^{0}\cos(x-y)e^{y}dy-\int_{0}^{+\infty}\cos(x-y)e^{-y}dy\\ &= [\cos(x-y)e^{y}]_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\sin(x-y)e^{y}dy\\ &\quad +[\cos(x-y)e^{y}]_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\sin(x-y)e^{-y}dy\\ &= 2\cos x-\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x-y)e^{-|y|}dy\\ &= 2\cos x-(f*g)(x).\end{aligned}$$

Donc : $(f*g)(x)=\cos x$.

3. $f(x)=\chi_{[0,1]}(x), g(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).g(x-y)dy\\ &= \int_{0}^{1}(x-y)^2dy\\ &= \left[-\frac{(x-y)^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{x^3-(x-1)^3}{3}.\end{aligned}$$

4. $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y).g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}e^{-y^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((x-y)^2+y^2)}dy \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y-\frac{x}{2})^2}dy \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Solution 3.2 : $\forall x \in \mathbb{R} : \theta(x) = \begin{cases} 0 & : \quad |x| > 1 \\ 1 & : \quad |x| \leq 1. \end{cases}$.

1. *On a :* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)|dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < +\infty.$
   Donc : $\theta \in L^1(\mathbb{R})$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
   $\displaystyle(\theta*\theta)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-y)\theta(y)dy = \int_{-1}^{1} \theta(x-y)dy.$
   Faisant le changement de variable $t = x-y$, *on trouve :* $\displaystyle(\theta*\theta)(x) = \int_{x-1}^{x+1} \theta(t)dt.$
   $*)$ *Si* $x+1 \leq -1$ *ou* $x-1 \geq 1$ *on a :* $(\theta*\theta)(x) = 0$.
   $*)$ *Si* $x-1 < -1 \leq x+1 \leq 1$ *on a :* $\displaystyle(\theta*\theta)(x) = \int_{-1}^{x+1} dt = x+2.$
   $*)$ *Si* $-1 \leq x-1 \leq 1 < x+1$ *on a :* $\displaystyle(\theta*\theta)(x) = \int_{x-1}^{1} dt = 2-x.$
   $*)$ *Si* $-1 \leq x-1 \leq x+1 \leq 1$ *on a :* $\displaystyle(\theta*\theta)(x) = \int_{x-1}^{x+1} dt = 2.$
3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
   $\displaystyle(\theta*H)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-y)H(y)dy = \int_{0}^{+\infty} \theta(x-y)dy.$
   Faisant le changement de variable $t = x-y$, *on trouve :* $\displaystyle(\theta*H)(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(t)dt.$
   $*)$ *Si* $x \leq -1$ *on a :* $(\theta*H)(x) = 0$.
   $*)$ *Si* $-1 < x < 1$ *on a :* $\displaystyle(\theta*H)(x) = \int_{-1}^{x} dt = x+1.$
   $*)$ *Si* $x \geq 1$ *on a :* $\displaystyle()(x) = \int_{-1}^{1} dt = 2.$

Solution 3.3 : $F, G \subseteq \mathbb{R}^n$ *deux fermées coniques, ie* $\forall\lambda \geq 0, \forall x \in F, \forall y \in G : \lambda x \in F, \lambda y \in G$. *Supposons que* (F,G) *sont convolutive et Montrons que* $F \cap (-G) = \{0\}$.
De la définition, on a : $\{0\} \subset F \cap (-G)$.
Soit maintenant $x \in F \cap (-G)$. *Donc :* $x \in F$ *et* $-x \in G$.
Soit $R > 0$. *On a alors :* $|0| = |x + (-x)| < R$.
Il existe alors $r > 0$ *rel que :* $|x| < r$ *et* $|-x| < r$, *i.e* $|x| < r$.

Comme R est quelconque, r est quelconque aussi, alors : $x = 0$.
Donc : $F \cap (-G) = \{0\}$.

Solution 3.4 : *H la fonction de Heaviside.*

$$\begin{aligned}\nabla(H \otimes H) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(H \otimes H), \frac{\partial}{\partial y}(H \otimes H)\right)\\ &= \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x} \otimes H(y), H(y) \otimes \frac{\partial H}{\partial y}\right)\\ &= (\delta_x \otimes H(y), H(x) \otimes \delta_y)\end{aligned}$$

Pour $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, *on trouve :*

$$\langle \nabla(H \otimes H), \Phi\rangle = \left(\int_0^{+\infty} \Phi(0, y)dy, \int_0^{+\infty} \Phi(x, 0)dx\right).$$

$$\begin{aligned}\Delta(H \otimes H) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(H \otimes H) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(H \otimes H)\\ &= \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} \otimes H(y) + H(x) \otimes \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2}\\ &= \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} \otimes H(y) + H(x) \otimes \frac{\partial \delta(y)}{\partial y}\end{aligned}$$

Pour $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, *on trouve :*

$$\langle \Delta(H \otimes H), \Phi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(0, y)dy + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, 0)dx.$$

Soit $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\langle xH \otimes y^2 H, \Phi\rangle &= \langle xH, \langle y^2 H, \Phi(., y)\rangle\rangle\\ &= \langle xH, \int_0^{+\infty} y^2 \Phi(., y)dy\rangle\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy^2 \Phi(x, y)dxdy.\end{aligned}$$

Donc : $xH \otimes y^2 H = xy^2 \chi_{\mathbb{R}^2_+}$.

Solution 3.5 : *H la fonction de Heaviside.*
$*)$ $(H * H)'' = ((H * H)')' = (H' * H)' = (\delta * H)' = H' = \delta$.
$**)$ *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *On a :*

$$\begin{aligned}\langle xH * y^2 H, \varphi\rangle &= \langle xH \otimes y^2 H, \varphi^{\Delta}\rangle\\ &= \langle xy^2 \chi_{\mathbb{R}^2_+}, \varphi^{\Delta}\rangle\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy^2 \varphi(x + y)dxdy.\end{aligned}$$

$***)$ $\delta'' * H = (\delta * H)'' = H'' = \delta'$.
$****)$ $\delta' * vp_{\frac{1}{x}} = (\delta * vp_{\frac{1}{x}})' = (vp_{\frac{1}{x}})'$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *On a :*

$$\begin{aligned}\langle (vp_{\frac{1}{x}})', \varphi\rangle &= -\langle vp_{\frac{1}{x}}, \varphi'\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} -\frac{\varphi'(x)}{x}dx\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon} -\frac{\varphi'(x)}{x}dx &= \left[-\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx \\ &= \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx \\ &= -\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} + \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - \left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\langle (vp_{\frac{1}{x}})', \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} -\frac{\varphi'(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} + \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - \left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]\right) \\ &= -\varphi'(0) + \varphi'(0) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right] \\ &= -\langle (pf_{\frac{1}{x^2}}), \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc : $\delta' * vp_{\frac{1}{x}} = -pf_{\frac{1}{x^2}}$.

Solution 3.6 : *D'après l'exemple 3.9, la fonction w définie par* $w_0(x) = \frac{|x|}{2}$ *est une solution élémentaire de l'équation* $U'' = \delta$. *La solution générale de l'équation* $U'' = \delta$ *est* $W(x) = \frac{|x|}{2} + ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ *car la fonction* $x \longmapsto ax + b$ *est la solution générale de l'équation* $U'' = 0$ *(voir Remarque 3.4 et Corollaire 3.1).*
Donc : la solution générale de l'équation différentielle $U'' = H$ *est* $W * H$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}.)$ *On a :*

$$\begin{aligned}\langle W * H, \varphi\rangle &= \langle W(x)\otimes H(y), \varphi^{\Delta}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{|x|}{2} + ax + b\right)\varphi(x+y)dxdy. \\ &= \int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty}\frac{(2a-1)x+2b}{2}\varphi(x+y)dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(2a+1)x+2b}{2}\varphi(x+y)dxdy.\end{aligned}$$

Solution 3.7 : $D = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad E(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),\ t > 0, x \in \mathbb{R}.$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle DE, \varphi \rangle &= -\left\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t,x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dxdt. \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} E(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dtdx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t,x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dxdt \right).
\end{aligned}$$

En remarquant que $\dfrac{\partial E}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, *donc :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} E(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dtdx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [E(t,x)\varphi(t,x)]_{\varepsilon}^{+\infty} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial E}{\partial t} \varphi(t,x) dtdx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial E}{\partial t} \varphi(t,x) dtdx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \varphi(t,x) dxdt
\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} E(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dtdx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \varphi(t,x) dxdt = -\int_{-\infty}^{+\infty} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) dx.$
On obtient alors :

$$\langle DE, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon} \right) \varphi(\varepsilon,x) dx$$

En utilisant le changement de variable $x = 2y\sqrt{\varepsilon}$ *on trouve :*

$$\langle DE, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(\varepsilon, 2y\sqrt{\varepsilon}) dy.$$

Sachant que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1$, *on peut écrire :*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(\varepsilon, 2y\sqrt{\varepsilon}) dy - \varphi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} [\varphi(\varepsilon, 2y\sqrt{\varepsilon}) - \varphi(0,0)] dy$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et Remarque 1.4) montre que :

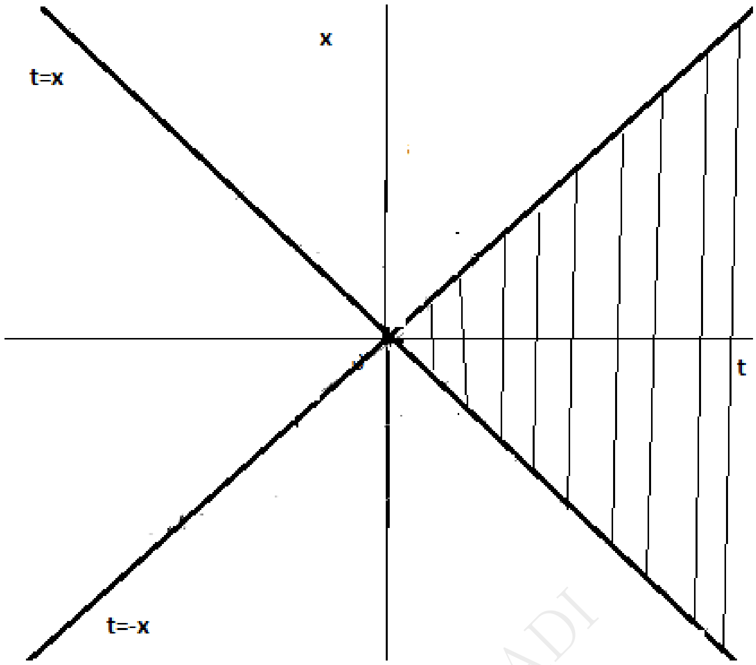
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} [\varphi(\varepsilon, 2y\sqrt{\varepsilon}) - \varphi(0,0)] dy = 0$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(\varepsilon, 2y\sqrt{\varepsilon}) dy = \varphi(0,0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Alors : $DE = \delta$.
Donc : la distribution associé au fonction E *est une solution élémentaire de l'opérateur* D.

Solution 3.8 : $D = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. $\qquad E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & : \; t - |x| > 0 \\ 0 & : \; t - |x| \leq 0, \end{cases}$



On a :

$$\begin{aligned}
\langle DE, \varphi \rangle &= \left\langle E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle \\
&= \left\langle E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\rangle - \left\langle E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} \int_{-x}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx + \int_{0}^{+\infty} \int_{x}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx - \int_{0}^{+\infty} \int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x,x) dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x) dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t) dt - \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,-t) dt \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,-s) ds + \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,s) ds + \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s,s) ds - \int_{0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s,-s) ds \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,s) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s,s) \right) ds - \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,-s) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s,-s) \right) ds.
\end{aligned}$$

Posons : $\varphi_1(s) = \varphi(s,s)$ *et* $\varphi_2(s) = \varphi(s,-s)$, *on trouve :*
$\varphi_1'(s) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s,s) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(s,s)$ *et* $\varphi_2'(s) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s,-s) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(s,-s)$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
\langle DE, \varphi \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \varphi_1'(s) ds - \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \varphi_2'(s) ds \\
&= \frac{1}{2} \varphi_1(0) + \frac{1}{2} \varphi_2(0) \\
&= \varphi(0,0) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Donc : la distribution associé au fonction E *est une solution élémentaire de l'opérateur* D.