CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE FOURIER

Parmi les différents outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles, on trouve la transformée de Fourier qui est un outils fondamental, généralise les séries de Fourier du cas périodique.

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, L un opérateur linéaire de E dans E et $T > 0$. Considérons le problème de Cauchy de variable réel, à valeur vectoriel dans E :

$$(C) \qquad \begin{cases} y'(t) = Ly(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases}, \ t \in [0, T[, \ y_0 \in E.$$

I) Si E est de dimension finie et y_0 est un vecteur propre de L, associé au valeur propre λ_0 alors la fonction y définie par : $y(x) = e^{\lambda t}.y_0$. est une solution du problème (C).

Ainsi, si y_0 est une combinaison linéaire des vecteurs propres $e_1, e_2, \cdots e_k$ de L, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, i.e : $y_0 = \sum_{j=1}^{k} a_j.e_j$, alors :

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j e_j.e^{\lambda_j t},$$

est une solution du problème (C).

Donc : si on peut déterminer les valeurs propres de L, il est facile de déterminer des solutions explicites du problème (C).

II) Si E est de dimension infinie, par exemple un espace des fonctions de $[0, T[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on obtient alors le problème :

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} y'(t,x) = Ly(t,x), \\ y(0,x) = y_0(x). \end{cases}, \ t \in [0, T[, \ x \in \mathbb{R}.$$

On cherche des vecteurs propres de l'opérateur L, i.e des fonctions y vérifiant pour certains valeurs propres λ l'équation : $y'(t,x) = \lambda y(t,x)$.

La théorie de série de Fourier permis nous d'utiliser la famille $\{e_j = e^{\frac{2\pi ijx}{T}}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ comme une base hilbertienne de l'espace $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et $T-$ périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R})} = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, pour tout $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ on a : $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j(f).e_j$, où

$$a_j(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{-2\pi ijs}{T}} f(y)dy.$$

III) Supposons maintenant que E est l'espace des fonctions définies sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, et considérons le même problème précédant dans $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On a alors dans le cas des fonctions non périodiques, faisant alors T tend vers $+\infty$ dans le problème précédant.

Formellement, on a pour $T > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{-2\pi ijy}{T}} f(y)dy\right) e^{\frac{2\pi ijx}{T}}.$$

Si T tend vers l'infini, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy.\xi} f(y)dy\right) e^{ix.\xi}d\xi.$$

La quantité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is.\xi} f(s)ds$ si a un sens, appelée la transformé de Fourier de f.

On peut prolonger ça au fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit, on va étudier la transformé de Fourier et ses différents propriétés.

4.1 Transformation de Fourier pour les fonctions

Définition 4.1 : *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on appelle transformée de Fourier de f, la fonction, a valeurs complexes, notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par :*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx, \tag{4.1}$$

où $x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i$ (produit scalaire).

Remarque 4.1 *: La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ est bien définie, linéaire et il existe $c > 0$ tel que : $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.*

En effet, soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|e^{-ix.\xi}dx \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \\
&= 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{F}$ est bien défini et on a : $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.
On dit que $\mathcal{F}$ est continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 4.2 : *Si f est a variables séparables ie $f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, alors :*

$$\widehat{f}(x) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(x_i).$$

Définition 4.2 : *On définit de la même manière la transformée de Fourier conjuguée pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix.\xi}d\xi. \tag{4.2}$$

Exemple 4.1 : *Soit $[a, b]$ un intervalle on a :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix.\xi}dx \\
&\leq \int_a^b e^{-ix.\xi}dx
\end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi} & : \ \xi \neq 0 \\ b - a & : \ \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.1 : *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si f est une fonction paire, alors $\widehat{f}$ est une fonction paire.*
2. *Si f est une fonction impaire, alors $\widehat{f}$ est une fonction impaire.*
3. *si f est une fonction réelle, alors : $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.*
4. *si $f(-x) = \overline{f(x)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^n$, alors : $\widehat{f}$ est une fonction réelle.*
5. ***Translation :*** *Pour toute $a \in \mathbb{R}^n$ on a :*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-ia.\xi}\widehat{f} \qquad \mathcal{F}(e^{ia.x}f) = \tau_a\widehat{f}$$

6. ***Dilatation :*** $\mathcal{F}\left(f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\right) = |\lambda|^n \widehat{f}(\lambda\xi)$ *pour* λ *réel non nul.*

Preuve: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Supposons que f est paire et soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathcal{F}f(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ix.\xi}dx$$

   Faisons le changement de variable $y = -x$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)e^{-iy.\xi}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iyx.\xi}dy \\ &= \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

   Alors $\widehat{f}$ est une fonction paire.

2. De même manière, on démontre que si f est une fonction impaire, alors $\widehat{f}$ est une fonction impaire.

3. Supposons que f est une fonction réelle, alors :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{e^{-ix.\xi}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)e^{-ix.\xi}}dx \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx} \\ &= \overline{\widehat{f}(\xi)}\end{aligned}$$

4. Supposons $f(-x) = \overline{f(x)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(\xi)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}e^{ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)e^{ix.\xi}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy.\xi}dy \\ &= \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

   Donc : $\widehat{f}$ est une fonction réelle.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_a f(x) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y+a).\xi} dy \\
&= e^{-ia} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy.\xi} dy \\
&= e^{-ia} \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-ia.\xi} \widehat{f}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{ia.x} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ia.x} f(x) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix.(\xi-a)} dx \\
&= \widehat{f}(\xi - a) \\
&= \tau_a \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Donc :$\mathcal{F}(e^{ia.x} f) = \tau_a \widehat{f}$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-ix.\xi} dx.$$

Faisons le changement de variable $y = \dfrac{x}{\lambda}$, on trouve :

$*)$ Pour $\lambda > 0$ alors : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-ix.\xi} dx = \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy.\lambda\xi} dy.$

$*)$ Pour $\lambda < 0$ alors : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-ix.\xi} dx = (-\lambda)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy.\lambda\xi} dy.$

Donc :

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy.\lambda\xi} dy = |\lambda|^n \widehat{f}(\lambda\xi).$$

■

Théorème 4.1 ***(Lemme de Riemann-Lebesgue) :*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\widehat{f}$ continue et tend vers 0 à l'infini.*

Preuve: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$*)$ Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi + a) - \widehat{f}(\xi)| &= |\widehat{e^{-iax} f}(\xi) - f(\xi)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ia.x} f(x) e^{-ix.\xi} dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix.\xi} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-ia.x} - 1) f(x) e^{-ix.\xi} dx \right|.
\end{aligned}$$

La famille des fonctions $x \mapsto (e^{-ia.x} - 1) f(x) e^{-ix.\xi}$ est une famille des fonctions mesurable, converge vers 0 lorsque $\|a\|$ tend vers 0, et on a : $|(e^{-ia.x} - 1) f(x) e^{-ix.\xi}| \leq 6|f(x)|$ pour tout

$a, \xi \in \mathbb{R}^n$, et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
D'après théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et Remarque 1.4) on obtient : $\lim\limits_{|a|\to 0} |\widehat{f}(\xi + a) - \widehat{f}(\xi)| = 0$.
Donc : $\widehat{f}$ est continue.
$**)$ Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\xi\|$ assez grand. Donc : il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $|\xi_i|$ assez grand. De la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.
Alors :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} (f(x) - \varphi(x)) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \varphi(x) dx \right|. \end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} (f(x) - \varphi(x)) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} |f(x) - \varphi(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)| dx \\ &= 2\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} \varphi(x) dx &= \left[-\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{-ix.\xi}}{\xi_i} \varphi(x) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \right]_{-\infty}^{-\infty} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-ix.\xi}}{\xi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \frac{1}{\xi_i} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq 2\varepsilon + \frac{1}{|\xi_i|} \left| \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right|.$$

Faisant ε tend vers 0, on trouve :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi_i|} \left| \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right| \overset{\|\xi\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

■

Théorème 4.2 : *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$D^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|} x^\alpha f).$$

Preuve: Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et Remarque

1.4) permet nous d'écrire :

$$\begin{aligned}
D^\alpha \widehat{f}(\xi) &= D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} e^{-ix_1.\xi_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n} \dots e^{-ix_n.\xi_n} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (-i)^{\alpha_1+\dots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|} x^\alpha f).
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.3 : *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}.$$

Preuve: Soit $1 \le i \le n$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_i f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-ix.\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-ix.\xi} dx_1 \dots dx_i \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f(x) e^{-ix.\xi}]_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n + i\xi_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix.\xi} dx.
\end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, elle est nulle au voisinage de l'infini, donc :

$$\mathcal{F}(\partial_i f)(\xi) = i\xi_i \widehat{f}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \mathcal{F}(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f)(\xi) \\
&= (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \widehat{f}(\xi) \\
&= i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.4 (***convolution***) : *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$.*

Preuve: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)e^{-ix.\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y).\xi}.e^{-iy.\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy.\xi}dy\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)e^{-i(x-y).\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy.\xi}dy\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-iz.\xi}dz \\
&= \widehat{f}(\xi).\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Alors : $\widehat{f*g} = \widehat{f}.\widehat{g}$. ∎

Remarque 4.3 *: Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors : $f.g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a : $\widehat{f.g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

Théorème 4.5 (***inversion***) : *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors : $f = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$*

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy.\xi}dyd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i(x-y).\xi}dyd\xi.
\end{aligned}$$

La fonction $(y,\xi) \longmapsto f(y)e^{i(x-y).\xi}$ n'est pas forcément intégrable, on ne peut pas appliquer Théorème de Fubini, tendis qu'on peut considérer pour $\varepsilon > 0$:

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i(x-y).\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{4}}dyd\xi.$$

On a :

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{4}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy.\xi}dyd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{4}}\widehat{f}(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Posons : $G_\varepsilon(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}e^{ix.\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{4}}\widehat{f}(\xi)$.

La suite $(G_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite des fonctions intégrables, converge p.p vers la fonction G_0 où $G_0(\xi) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}e^{ix.\xi}f(\xi)$. De plus, on a : $|G_\varepsilon| \le G_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13 et Remarque 1.4) permet nous d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi. \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})\,\ldots\ldots\ldots(*)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a : $I_\varepsilon = F_\varepsilon * f$ où

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz.\xi}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\xi\|^2}{4}}d\xi.$$

Faisant le changement de variable $\zeta = -\xi$, on trouve :

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.\zeta}e^{-\frac{\varepsilon^2\|\zeta\|^2}{4}}d\zeta = F_\varepsilon(-z).$$

Faisant le changement de variable $\eta = \varepsilon\xi$, on trouve :

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{z}{\varepsilon}.\eta}e^{-\frac{\|\eta\|^2}{4}}d\zeta = \frac{1}{\varepsilon^n}F_1\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F_1(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(-z)dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz.\xi}e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}d\xi dz. \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}\right)(z)dz.
\end{aligned}$$

Faisant des arguments comme dans l'exercice 4.2, on peut montrer que

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}}\right)(z) = (2\sqrt{\pi})^n e^{-z^2}.$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_1(z)dz = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(2\sqrt{\pi})^n e^{-z^2}dz = \frac{1}{(2\pi)^n}.(2\sqrt{\pi})^n.(\sqrt{\pi})^n = 1,$$

ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n}F_\varepsilon\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)dz = \int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(t)dt = 1.$$

En appliquant le résultat suivant :

> On considère la suite $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(t)dt = 1$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
> Alors : $F_\varepsilon * f$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

il résulte que I_ε converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)\ldots\ldots\ldots(**)$.
De $(*)$ et $(**)$, et tenant en compte $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on trouve le résultat. ■

Remarque 4.4 *: Il y a une autre définition de la transformée de Fourier, laquelle :*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}dx. \tag{4.3}$$

Dans ce cas là, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, où

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i x.\xi}d\xi. \tag{4.4}$$

4.2 Croissance rapide, décroissance lente

Définition 4.3 (***espace de Schwartz***) :

1. *On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est à décroissance rapide si pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :*
$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^m\varphi(x) = 0.$$
2. *L'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $D^\alpha\varphi$ est à décroissance rapide.*

Il est clair que l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.

Remarque 4.5 : *Il est équivalent de dire que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si les quantités*

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le p, |\beta|\le p} \|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

sont finies pour tout p.
En effet, si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ alors on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha D^\beta\varphi(x)| = 0$, donc : $|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|$ est borné p.p, ce qui donne la bornitude de $\mathcal{N}_p(\varphi)$.
Réciproquement, comme $\mathcal{N}_p(\varphi)$ est bornée, alors $|x_i x^\alpha D^\beta\varphi(x)|$ pour un certain i tel que $|x_i|$ tend vers l'infini (i existe puisque $|x|$ tend vers l'infini).
Donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha D^\beta\varphi(x)| = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{|x_i.x^\alpha D^\beta\varphi(x)|}{|x_i|} = 0.$

> L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes.
> $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel topologique, dont les semi-normes sont $(\mathcal{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Définition 4.4 (**convergence dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$**) : *On dit q'une suite des fonctions $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est converge vers $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $\lim\limits_{j\to+\infty} \mathcal{N}_p(\varphi_j - \varphi) = 0.$*

Proposition 4.2 : *Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a : $x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha \varphi(x)| = 0$, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$\sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve: Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Il est claire $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha \varphi(x)| = 0$.
Comme $x^\alpha \varphi(x)$ est borné, il est localement intégrable.
Il reste de prouver que $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{|x|>A} |x^\alpha \varphi(x)| dx = 0$. On a :

$$\int_{|x|>A} |x^\alpha \varphi(x)| dx = \int_{|x|>A} \frac{|(x_1^2 + \cdots + x_n^2) x^\alpha \varphi(x)|}{|x|^2} dx$$

Comme $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a : $(x_1^2 + \cdots + x_n^2) x^\alpha \varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc : il existe $c > 0$ telle que $|(x_1^2 + \cdots + x_n^2) x^\alpha \varphi(x)| < c$ p.p. ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>A} |x^\alpha \varphi(x)| dx &= \int_{|x|>A} \frac{|(x_1^2 + \cdots + x_n^2) x^\alpha \varphi(x)|}{|x|^2} dx \\ &\leq \int_{|x|>A} \frac{c}{|x|^2} dx \xrightarrow{A\to+\infty} 0 . \end{aligned}$$

Donc $x^\alpha \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
En utilisant des mêmes arguments pour prouver que :

$$\sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

■

Remarque 4.6 : *Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut définir la transformé de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus :*

> Les propriétés de transformation de Fourier (dérivée, translation, dilatation, convolution, inversion) sont vérifies toujours dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 4.6 : *La transformation de Fourier applique l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe C_p telle que :*

$$\mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) \leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Preuve: Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. On a : $|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| = |(i)^{|\beta|-|\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta \varphi))|$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) &= \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|(i)^{|\beta|-|\alpha|}\mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta \varphi))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} c_{\alpha,\beta}\|D^\alpha(x^\beta\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} c'_{\alpha,\beta}\|x^\beta D^\alpha \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\varphi).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3 (***densité de*** $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ***dans*** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) : *Soit* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. Il existe alors une suite* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

$$\lim_{j\to+\infty} \mathcal{N}_p(\varphi_j - \varphi) = 0$$

Définition 4.5 (***croissance lente***) :

1. *On dit qu'une fonction* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *est à croissance lente s'il existe* $m \in \mathbb{N}$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on a :*

$$|\varphi(x)| \leq C(1 + \|x\|)^m.$$

2. *L'espace* $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telles que pour tout multi-indice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, la fonction* $D^\alpha\varphi$ *est à croissance lente, i.e pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, il existe* $C_\alpha > 0$ *et* $m_\alpha > 0$ *tels que pour toute* $x \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}$$

Il résulte immédiatement de la définition c-dessus :

Théorème 4.7 : *Soit* $\psi \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$*. Alors : Pour toute* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *on a :* $\psi.\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

4.3 Distributions tempérées

Définition 4.6 : *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$*. On dit que* u *est une distribution tempérée, ce qu'on note* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*, s'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et* $C \geq 0$ *tels que :*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi) \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.5}$$

Il s'agit de la continuité de forme linéaire u au sens de la topologie trace de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. De la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, d'après théorème de Hahn-Banach (Corollaire 1.1) on peut prolonger le crochet de dualité $\langle .,.\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}$ au crochet $\langle .,.\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$ de manière suivante :

Théorème 4.8 (***extension de dualité***) : *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. L'application $\varphi \to \langle u, \varphi \rangle$, définie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, se prolonge de manière unique en une forme linéaire sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (que l'on notera par $\varphi \to \langle u, \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$) qui vérifie :*

$$|\langle u, \varphi \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \tag{4.6}$$

Cette extension de la dualité identifie $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ à l'espace des formes linéaires sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie une estimation du type (4.5).

Définition 4.7 (***convergence dans*** $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$) : *On dit que las suite (u_j) d'éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge vers u dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, si on a :*

$$\lim_{j\to+\infty} \langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

En utilisant l'extension de dualité $\langle ., . \rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$ pour définir la dérivée d'une distribution tempéré u comme suivant :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle.$$

La quantité ci-dessus est bien défini, de plus on a le résultat suivant :

Théorème 4.9 : *Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors toutes ses dérivées partielles appartiennent à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $u_j \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Exemple 4.2 :

1. *$\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ car on a pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \mathcal{N}_0(\varphi).$$

2. *$L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ car on a pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{N}_0(\varphi). \end{aligned}$$

3. *$L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ car on a pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|dx \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} . \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mathcal{N}_{n+1}(\varphi). \end{aligned}$$

4. *$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ car on a pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{(1+\|x\|)^{n+2}}.(1+\|x\|)^{n+2}.\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}(\|(1+\|x\|)^{n+2}.\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}} \\
&= C|f\|_{L^2}.\mathcal{N}_{1+[\frac{n}{2}]}(\varphi).
\end{aligned}$$

5. *$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(2 \leq p < +\infty)$ car on a pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C|f\|_{L^p}.\mathcal{N}_{1+[\frac{n}{p'}]}(\varphi) \ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).$$

Proposition 4.4 :

1. *Une distribution à support compact est tempérée, i.e $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Une distribution tempérée est nécessairement d'ordre fini.*

Preuve: :

1. Soit $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et il existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compact et $m \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
|\langle u, \varphi\rangle| &\leq M.P_{K,m}(\varphi) \\
&= M. \sup_{x\in K, |\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)| \\
&\leq M. \sup_{x\in \mathbb{R}^n, |\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)| \\
&\leq M.\mathcal{N}_m(\varphi).
\end{aligned}$$

Alors : $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $K \subset$ un compact. il existe $C \geq 0$ tels que :

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\mathcal{N}_p(\varphi) \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n).$$

Donc :

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n).$$

Comme K est compact, alors x^α est borné, donc il existe $C_p > 0$ tel que pour tout

$\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned} C \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq C_p \sum_{|\beta|\leq p} \|D^\beta \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq M \sup_{x\in K, \beta|\leq p} |D^\beta \varphi(x)| \\ &= M P_{K,p}(\varphi). \end{aligned}$$

Donc : $|\langle u, \varphi\rangle| \leq M P_{K,p}(\varphi)$.

Alors : u est nécessairement d'ordre inférieur ou égale à p.

■

Théorème 4.10 : *Soit $\psi \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

1. *Pour toute $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a : $\psi.u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Si $u_j \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a $\psi.u_j \to f.u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*

Preuve: Soit $\psi \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\gamma > 0$ et $m_\gamma \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$|D^\gamma \psi(x)| \leq C(1+|x|)^{m_\gamma}.$$

1. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\psi.\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et il existe $C_p > 0, p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} |\langle \psi u, \varphi\rangle| &= |\langle u, \psi\varphi\rangle| \\ &\leq C_p \mathcal{N}_p(\psi\varphi) \\ &= C_p \sum_{|\alpha|\leq p, |\beta|\leq p} \|x^\alpha D^\beta(\psi.\varphi)(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &= C_p \sum_{|\alpha|\leq p, |\gamma|\leq p, |\theta|\leq p} \|C_{\gamma,\theta} x^\alpha D^\gamma \psi(x).D^\theta \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C'_p \sum_{|\alpha|\leq p, |\gamma|\leq p, |\theta|\leq p} \|x^\alpha (1+|x|)^{m_\gamma}.D^\theta \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Il existe $q \in \mathbb{N}$ telle que $\leq \max\{p, |\alpha| + m_\gamma\} \leq q$, ce qui donne :

$$|\langle \psi u, \varphi\rangle| \leq C_q \sum_{|\lambda|\leq q, |\theta|\leq q} \|x^\lambda.D^\theta \varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = C_q \mathcal{N}_q(\varphi)$$

. Donc : $\psi.u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. De précédant et Théorème 4.9.

■

4.4 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Considérons $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi dx.
\end{aligned}$$

Faisant le changement de variable $(y, \zeta) = (\xi, x)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(\zeta)e^{-iy.\zeta}\varphi(y)dyd\zeta. \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(\zeta)\widehat{\varphi}(\zeta)d\zeta \\
&= \langle u, \widehat{\varphi} \rangle.
\end{aligned}$$

Tenant en compte que pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ implique que $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut prolonger le résultat ci-dessus du manière suivante :

Définition 4.8 : *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

1. *La transformée de Fourier de u est la distribution tempérée notée $\widehat{u}$ ou $\mathcal{F}u$, définie pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par : $\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$.*
2. *La conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est définie pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par : $\langle \overline{\mathcal{F}}u, \varphi \rangle = \langle u, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle$.*

Il vient immédiatement de la définition et les propriétés de transformée de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

Théorème 4.11 ***inverse*** : *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur lui même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.*

Théorème 4.12 (***continuité***) : *La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est continue. Si $u_j \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors : $\widehat{u_j} \to \widehat{u}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$*

Exemple 4.3 :

1. *On a :*

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle &= \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0.x}\varphi(x)dx. \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1.\varphi(x)dx \\
&= \langle 1, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc : $\widehat{\delta} = 1$.

2. *On a :*

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{1}, \varphi \rangle &= \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\varphi(x)dxd\xi.
\end{aligned}$$

Faisant le changement de variable $\zeta = -\xi$, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \widehat{1}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\zeta} \varphi(x) dx d\zeta. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(x) dx. \\ &= \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Donc : $\widehat{1} = \mathcal{F}(1)$, *ce qui donne :* $(2\pi)^{-n}\widehat{1} = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(1) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(\widehat{\delta}) = \delta$.
Alors : $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta$.

Proposition 4.5 : *Soit* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n$. *On a :*

1. $\mathcal{F}(\tau_a u) = e^{-ia.\xi}\widehat{u}$, $\qquad \mathcal{F}(e^{ia.\xi}u) = \tau_a \widehat{u}$.
2. $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}$, $\qquad D^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|} x^\alpha u)$.
3. $\widehat{\delta_a} = e^{-ia.\xi}$, $\qquad \mathcal{F}(e^{ia.\xi}) = (2\pi)^n \delta_a$.
4. $\mathcal{F}(D^\alpha \delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha$, $\qquad \mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$.

Preuve: Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. On a :

1. *)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\tau_a u), \varphi \rangle &= \langle \tau_a u, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle u, \tau_{-a}\widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle u, \mathcal{F}(e^{ia.x}\varphi) \rangle\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{F}(\tau_a u) = e^{-ia.\xi}\widehat{u}$.

**)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(e^{ia.\xi}u), \varphi \rangle &= \langle e^{ia.\xi}u, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle u, e^{ia.\xi}\widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle u, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \rangle \\ &= \langle \widehat{u}, \tau_{-a}\varphi \rangle \\ &= \langle \tau_a \widehat{u}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{F}(e^{ia.\xi}u) = \tau_a \widehat{u}$.

2. *)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(D^\alpha u), \varphi \rangle &= \langle D^\alpha u, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \widehat{\varphi} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi) \rangle \\ &= \langle u, \mathcal{F}(i^{|\alpha|} x^\alpha \varphi) \rangle \\ &= \langle \widehat{u}, i^{|\alpha|} x^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}$.

*)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|}x^\alpha u), \varphi\rangle &= \langle \xi^\alpha u, \widehat{\varphi}\rangle \\ &= \langle u, (-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\varphi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \mathcal{F}(D^\alpha \varphi)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \widehat{u}, D^\alpha \varphi)\rangle \\ &= \langle D^\alpha \widehat{u}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc : $D^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}((-i)^{|\alpha|}x^\alpha u)$.

3. *) $\widehat{\delta_a} = \mathcal{F}(\tau_a \delta) = e^{-ia.\xi}\widehat{\delta} = e^{-ia.\xi}$.
   *) $\mathcal{F}(e^{ia.\xi}) = \tau_a \widehat{1} = (2\pi)^n \tau_a \delta = (2\pi)^n \delta_a$.
4. *) $\mathcal{F}(D^\alpha \delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{\delta} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha$.
   *) $\mathcal{F}(x^\alpha) = \dfrac{1}{(-i)^{|\alpha|}} D^\alpha \widehat{1} = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$.

■

Théorème 4.13 (***convolution***) : *Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ on a :*

$$T * S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ et } \widehat{T * S} = \widehat{T}.\widehat{S}.$$

Exemple 4.4 : *On donne deux exemples utilisées dans les équations aux dérivées partielles.*

1. *Considérons dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = 0.$$

Utilisons le transformation de Fourier, on trouve : $\widehat{\Delta u} = 0$. Mais, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta u} &= \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-ix_j)^2 \widehat{u} \\ &= -|x|^2 \widehat{u}\end{aligned}$$

Donc : $\widehat{u}_{|\mathbb{R}^n_+} = 0$ et $\operatorname{supp} \widehat{u} = \{0\}$. Alors : $\widehat{u} = \sum_{|\alpha| \le m \in \mathbb{N}} a_\alpha D^\alpha \delta$.
Ce qui donne : $u = \sum_{|\alpha|\le m} (2\pi)^{-n} a_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha \delta) = \sum_{|\alpha|\le m} (2\pi)^{-n} a_\alpha i^{|\alpha|}\xi^\alpha = \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha \xi^\alpha$.
Alors : u est un polynôme.

2. *Considérons dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'équation :*

$$-\Delta u + \lambda u = f, \text{ où } \lambda > 0, f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

. Utilisons le transformation de Fourier, on trouve : $\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u) = \widehat{f}$.
Alors : $(|x|^2 + \lambda)\widehat{u} = \widehat{f}$.
Donc : $\widehat{u} = \dfrac{\widehat{f}}{|x|^2 + \lambda}$.

Finalement : $u = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\left[\dfrac{\widehat{f}}{|x|^2+\lambda}\right]$.

Pour $f = \delta$ *on trouve la solution élémentaire* $u_0 = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\left[\dfrac{1}{|x|^2+\lambda}\right]$.

Exercices

Exercice 4.1 : *Calculer* $\widehat{f}$ *dans les cas suivantes :*

1. $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.
2. $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$.
3. $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$.

Exercice 4.2 :

1. *Montrer que la fonction* $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi)$ *vérifie l'équation différentielle :*
$$y'(\xi) + \frac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi) = 0.$$
2. *Calculer* $\widehat{f}(0)$*, puis déterminer la solution de l'équation différentielle.*
3. *Utiliser la propriété de dilatation pour établir le résultat :*
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \ (a > 0).$$

Exercice 4.3 : *Soit* T *l'application linéaire sur* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ *définie comme suivant :*
$$\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2) : \langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,-x)dx$$

1. *Vérifier que* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$.
2. *Calculer au sens de distributions :* $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y}$.

Exercice 4.4 : *Soit la suite des fonctions* $f_j = \chi_{[-j,j]}$ $(j \in \mathbb{N}^*)$.

1. *Calculer* $\widehat{f_j}$.
2. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \frac{\sin(j\xi)}{\xi}$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4.5 : *En portant de l'égalité* $\delta' * H = \delta$ *calculer* $\widehat{H}$.

Exercice 4.6 : *Soit* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\psi = 1$ *au voisinage de* 0*. On pose* $u = \psi.H$

1. *Calculer* u' *en fonction de* ψ.
2. *Calculer* $\widehat{u}$ *en fonction de* $\widehat{\psi'.H}$.

Exercice 4.7 : *Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 - 10x^2 + 20x^{20}$.*
Montrer que $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, puis calculer $\widehat{f}$.

Exercice 4.8 :

1. *Montrer que $v_p\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.*
2. *Trouver toutes les distributions tempérées u de telles que $\dfrac{d\widehat{u}}{d\xi} = 0$.*
3. *Montrer que toutes les distributions tempérées u telle que $xu = 0$ sont de la forme $u = \lambda\delta$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.*
4. *Quelles sont les distributions tempérées u telles que $xu' + u = 0$.*

Solutions des exercices

Solution 4.1 : *Soit* $\xi \in \mathbb{R}$

1. $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix.\xi}dx. \\
&= \begin{cases} 1 & : \ \xi = 0 \\ \dfrac{e^{\frac{i\xi}{2}} - e^{-\frac{i\xi}{2}}}{i\xi} & : \ \xi \neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors : $\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 1 & : \ \xi = 0 \\ \dfrac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} & : \ \xi \neq 1. \end{cases}$

2. $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi}e^{-\alpha|x|}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\xi).x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\xi).x}dx \\
&= \left[\frac{e^{(\alpha-i\xi).x}}{\alpha - i\xi}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-(\alpha+i\xi).x}}{\alpha + i\xi}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha - i\xi} + \frac{1}{\alpha + i\xi} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.
\end{aligned}$$

3. $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi} H(x)e^{-\alpha x}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\xi).x}dx \\
&= -\left[\frac{e^{-(\alpha+i\xi).x}}{\alpha+i\xi}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha+i\xi} \\
&= \frac{\alpha-i\xi}{\alpha^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Solution 4.2 :

1. $f(x) = e^{-x^2}$ $\quad f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf(x) \quad \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi)$.

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi} = \mathcal{F}(-ixf) = \frac{i}{2}\mathcal{F}(-2xf) = \frac{i}{2}\mathcal{F}(f') = -\frac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi)$$

. Donc : $\widehat{f}$ *vérifie l'équation différentielle :*

$$y'(\xi) + \frac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi) = 0.$$

2. $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. *Donc :*

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

3. On a :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \mathcal{F}(f(\sqrt{a}x))(\xi) = \sqrt{\frac{1}{a}}.\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Solution 4.3 : $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2) : \langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t,-t)dt.$

1. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. *Alors, on a :*

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t,-t)|dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}.|(1+t^2)\varphi(t,-t)|dt \\
&\leq \|(1+x^2)\varphi(x,y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.\textstyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}dt \\
&\leq \pi.\mathcal{N}_2(\varphi).
\end{aligned}$$

Donc : $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,-t) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t,-t) \right] dt
\end{aligned}$$

Posons : $\Phi(t) = \varphi(t,-t)$. *Alors :* $\Phi'(t) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(t,-t) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(t,-t)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \right\rangle &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(t) dt \\
&= [-\Phi(t)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= [-\varphi(t,-t)]_{-\infty}^{+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Solution 4.4 : $f_j = \chi_{[-j,j]}$ $(j \in \mathbb{N}^*)$.

1. *On a :*

$$\begin{aligned}
\widehat{f_j}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix.\xi} \chi_{[-j,j]}(x) dx \\
&= \int_{-j}^{j} e^{-ix.\xi} dx. \\
&= \begin{cases} 2j & : \ \xi = 0 \\ \dfrac{e^{ij} - e^{-ij}}{i\xi} & : \ \xi \neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors : $\widehat{f_j}(\xi) = \begin{cases} 2j & : \ \xi = 0 \\ \dfrac{2\sin(j\xi)}{\xi} & : \ \xi \neq 1. \end{cases}$

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\lim_{j \to +\infty} \langle f_j, \varphi \rangle &= \lim_{j \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\varphi(x) dx \\
&= \lim_{j \to +\infty} \int_{-j}^{j} \varphi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \\
&= \langle 1, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Alors, $\lim\limits_{j \to +\infty} f_j = 1$, *ce qui donne :* $\lim\limits_{j \to +\infty} \widehat{f_j} = 2\pi\delta$.
Alors : $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{2\sin(j\xi)}{\xi} = 2\pi\delta$ *,i.e* $\lim\limits_{j \to +\infty} \dfrac{\sin(j\xi)}{\xi} = \pi\delta$.

Solution 4.5 : *On a* $\delta' * H = \delta$, *donc :* $\widehat{\delta' * H} = 1$.
Alors : $\mathcal{F}(\delta').\widehat{H} = 1$, *ce qui donne :* $i\xi.\widehat{H} = 1$.
finalement : $\widehat{H} = \dfrac{1}{i\xi} = -\dfrac{i}{\xi}$.

Solution 4.6 : *$\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = 1$ au voisinage de 0. $u = \psi.H$*

1. *On a :*

$$\begin{aligned}
\langle u', \varphi \rangle &= -\langle u, \varphi' \rangle \\
&= -\langle \psi.H, \varphi' \rangle \\
&= -\langle H, \psi.\varphi' \rangle \\
&= -\int_0^{+\infty} \psi(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[\psi(x)\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \psi'(x)\varphi(x)dx \\
&= \varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} H(x).\psi'(x)\varphi(x)dx \\
&= \langle \delta + \psi'.H, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

   Donc : $u' = \delta + \psi'.H$.

2. $\widehat{u} = \mathcal{F}(\delta + \psi'.H) = 1 + \widehat{\psi'.H}$.

Solution 4.7 : *$f(x) = 1 - 10x^2 + 20x^{20}$.*

$*$) *Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. on a :*

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi \rangle| &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - 10x^2 + 20x^{20}).\varphi(x)dx \\
&= \|(1 - 10x^2 + 20x^{20}).\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{20}\mathcal{N}_{22}(\varphi).
\end{aligned}$$

Donc : $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

$*$) *On a :*

$$\begin{aligned}
\widehat{f} &= \widehat{1} - 10\mathcal{F}(x^2) + 20\mathcal{F}(x^{20}) \\
&= 2\pi\delta - 10(2\pi).i^2\delta'' + 20(2\pi).i^{20}\delta^{(20)} \\
&= 2\pi(\delta + 10\delta'' + 20\delta^{(20)}).
\end{aligned}$$

Solution 4.8 :

1. *Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On sais d'après l'example 2.9 que :*

$$|\langle v_p\frac{1}{x}, \varphi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\varphi'(tx)|dtdx.$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
|\langle v_p\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 |(1+x^2)\varphi'(tx)|dtdx \\
&\leq \|(1+x^2)\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \pi\mathcal{N}_2(\alpha).
\end{aligned}$$

   Donc : $v_p\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

2. $\dfrac{d\widehat{u}}{d\xi} = 0$ *implique que $\widehat{u} = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Donc : $u = \lambda\delta$.*

3. *On a :* $xu = 0$, *donc :* $\widehat{-ixu} = 0$, *i.e* $\dfrac{d\widehat{u}}{d\xi} = 0$. *Donc :* $u = \lambda\delta$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
4. *On a :* $xu' + u = 0$, *donc :* $(xu)' = 0$ (*voir solution de l'exercice 2.8*).
   Donc : $xu = \lambda\delta$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
   Soit $\chi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *tel que* $\chi = 1$ *au voisinage de* 0. *Posons :* $\widetilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0).\chi$.
   Alors : $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. *La formule de Taylor s'écrire alors :*

$$\widetilde{\varphi}(x) = x\int_0^1 \psi'(tx)dt = x\theta_\varphi(x)\ (\theta_\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})).$$

   Posons : $\langle u, \varphi\rangle = \langle \lambda\delta, \theta_\varphi\rangle = \lambda\theta_\varphi(0)$.
   Tenant en compte : $\widetilde{x\varphi} = x\varphi$, *alors :* $\theta_{x\varphi} = \varphi$. *Donc :*
   $\langle xu, \varphi\rangle = \langle u, x\varphi\rangle = \langle \lambda\delta, \varphi\rangle$, *i.e* $xu = \lambda\delta$.
   En utilisant des arguments comme dans la première question pour prouver que u est une distribution tempérée.