CHAPITRE 5

ESPACES DE SOBOLEV

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\Gamma = \partial\Omega$, $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, et p' le conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Notons q'une fonction $u \in L^p(\Omega)$ identifie une distribution sur Ω, encore notée u. On peut donc définir $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i \in \{1, cdots, n\})$ comme une distribution sur Ω et ∇u comme une distribution vectorielle sur Ω.

Le but de la présentation des espaces de Sobolev est de fournir un cadre fonctionnel pour certaines équations aux dérivées partielles et problèmes aux limites qui peuvent admet des solutions notées «solutions faibles».

I) Soit le problème aux limites suivants :

$$(P_1) \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \quad : \quad x \in [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

où $f \in \mathscr{C}([a, b])$.

une solution classique (forte) du problème (P_1) est une fonction de classe $\mathscr{C}^2([a, b])$. On va chercher d'autre solution du problème (P_1), qui sont des distributions régulières. En multipliant les deux termes de la première équation par une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(]a, b[)$, et intégrant sur $]a, b[$ on obtient :

$$\int_a^b -u''(x)\varphi(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

Faisant l'intégration par partie, et tenant en compte $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on obtient :

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \tag{5.1}$$

Notons que $\mathscr{D}(]a, b[) \subset L^2(]a, b[)$, donc : φ et φ' peut considérer dans $L^2(]a, b[)$ et l'équation

ABDERACHID SAADI

(5.1) à un sens pour $u, u' \in L^2(]a,b[)$ où u' est la dérivée de u au sens de distribution, i.e

$$\langle u', \varphi\rangle = -\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(]a,b[).$$

Il s'agit de existence d'une fonction $g \in L^2(]a,b[)$, vérifiant :

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(]a,b[).$$

II) Maintenant, soit le problème aux limites suivants :

$$(P_n) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x) & : \quad x \in \overline{\Omega}, \\ u(x) = 0 & : \quad x \in \Gamma. \end{cases}$$

où $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

une solution classique (forte) du problème (P_n) est une fonction de classe $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$. On va chercher d'autre solution du problème (P_n), qui sont des distributions régulières. En multipliant les deux termes de la première équation par une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, et intégrant sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Appliquant la formule de Green, et tenant en compte $\varphi(x) = 0$ sur Γ, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{5.2}$$

Notons que $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ $(i \in \{1, \cdots n\})$ peut considérer dans $L^2(\Omega)$ et l'équation (5.2) à un sens pour $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ $(i \in \{1, \cdots n\})$ où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens de distribution dans la direction i, i.e

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Il s'agit de existence des fonctions $g_i \in L^2(\Omega)$, vérifiant :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \forall i \in \{1, \cdots n\}.$$

Parfois, on a besoin de considérer que φ est ses dérivées partielles appartient à $L^{p'}(\Omega)$, d'ou u est ses dérivées partielles appartient à $L^p(\Omega)$.

Un tel espace vérifie les propriétés précédente est appelé espace de Sobolev de la base $L^p(\Omega)$. En général on a :

ABDERACHID SAADI

5.1 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 5.1 : *L'espace de Sobolev d'ordre* 1*, noté* $W^{1,p}(\Omega)$ *est l'ensemble suivante :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \cdots, g_n \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi ; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \right\}.$$

En particulier, on pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 5.1 *:*

i) *La fonction* g_i *si elle existe, elle est unique. En effet, supposons qu'il existe deux fonctions* $g_{1,i}, g_{2,i} \in L^p(\Omega)$ *vérifiant :*

$$\int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_{1,i}\varphi = -\int_\Omega g_{2,i}\varphi; \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Alors :

$$\int_\Omega (g_{1,i} - g_{2,i})\varphi = 0; \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

D'après Lemme de Dubois-Reymond (Théorème 2.1) : $g_{1,i} = g_{2,i}$ *p.p. dans* Ω.

ii) *La fonction* g_i *est appelée la dérivée faible de* u *dans la direction* i *et on écrit* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.

iii) *Si* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *existe au sens usuelle et* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ *alors :* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 5.2 *: On peut utiliser une fonction test dans* $\mathscr{D}^1(\Omega)$ *à la place de la fonction test dans* $\mathscr{D}(\Omega)$ *grâce à la densité de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $\mathscr{D}^1(\Omega)$.

Exemple 5.1 *Soit* u *un fonction de* $]-1,1[$ *dans* $\mathbb{R}$*, définie par :* $u(x) = |x|$. *On a :*

$$\int_{-1}^{1} |u(x)|^p dx = \int_{-1}^{1} |x|^p dx = 2\int_0^1 x^p dx = \frac{2}{p+1}.$$

Donc : $u \in L^p(]-1,1[)$.
Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\
&= [-x\varphi'(x)]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + [x\varphi'(x)]_0^1 - \int_0^1 x\varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_0^1 \varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Donc : $u'(x) = \begin{cases} -1 & : \ x \in]-1,0[, \\ 1 & : \ x \in]0,1[. \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} |u'(x)|^p dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 = 2.$$

ABDERACHID SAADI

Donc : $u' \in L^p(]-1,1[)$. *Alors :* $u \in W^{1,p}(]-1,1[)$.

Il est claire que $W^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $L^p(\Omega)$.
On munit $W^{1,p}(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

où la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{(L^p(\Omega))^n})^{\frac{1}{p}}.$$

On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
(u,v)_{H^1(\Omega)} &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}, \\
&= \int_\Omega u(x).v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx, \\
&= \int_\Omega u(x).v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx.
\end{aligned}$$

Théorème 5.1 : *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach et l'espace* $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve: Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$. Donc, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}, \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(1 \le i \le n)$ sont des suites de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, et comme $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach il résulte que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in L^p(\Omega)$ et $\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ converge vers $g_i \in L^p(\Omega)$ pour $1 \le i \le n$.
Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a :

$$\int_\Omega u_j(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx.$$

Passons vers la limite, on trouve :

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx.$$

Donc : $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Le cas de $H^1(\Omega)$ est un ces particulier. ■

Théorème 5.2 : *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \le p < +\infty$, *réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

Preuve: Considérons l'opérateur A de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $(L^p(\Omega))^{n+1}$, défini par :

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) : Au = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

On munit $(L^p(\Omega))^{n+1}$ de la norme :

$$\|(u_0,\cdots,u_n)\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}}=\sum_{i=0}^{n}\|u_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Alors : pour tout $u\in W^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$\|Au\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}}=\|u\|_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}=\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Donc : l'opérateur A est un isométrie, donc homéomorphisme de $W^{1,p}(\Omega)$ vers une partie fermé B de $(L^p(\Omega))^{n+1}$.
Comme $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1\le p<+\infty$, réflexif pour $1<p<+\infty$, l'espace $(L^p(\Omega))^{n+1}$ et leur parties fermées satisfaisaient les mêmes propriétés.
Par conséquent, $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1\le p<+\infty$, réflexif pour $1<p<+\infty$. ■

Proposition 5.1 : *Soit $u\in L^p(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u\in W^{1,p}(\Omega)$.
2. $\exists c>0:\left|\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx\right|\le c\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\quad\forall i=1,\dots,n.$

Preuve:

$\Rightarrow$ Soit $u\in W^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$. Alors, $u\in L^p(\Omega)$ et $u\in L'^p(\Omega)$ et on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx\right| &= \left|\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx\right|,\\ &\le \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|.|\varphi(x)|dx,\\ &\le \left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_\Omega|\varphi(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}},\\ &= \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}.\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\\ &\le c.\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$

où $c=\max\limits_{1\le i\le n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}$.

$\Leftarrow$ Soit $u\in W^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$\exists c>0:\left|\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx\right|\le c\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}(\Omega),\quad\forall i=1,\dots,n.$$

Alors, l'opérateur $A_i:\mathscr{D}(\Omega)\to L^{p'}(\Omega)$ définie par : $A_i\varphi=\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx$ est continue, et comme $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$ on peut prolonger l'opérateur A vers $L^{p'}(\Omega)$.

ABDERACHID SAADI

D'après théorème de représentation de Riez (Théorème 1.12) il existe $g_i \in L^p(\Omega)$ tel que

$$A_i\varphi = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx,$$

i.e $\displaystyle\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx$. Donc : $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

■

Théorème 5.3 : *Supposons que Ω est borné, lipschitzien (où bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$). Alors, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, il existe $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, et une constante $c = c(\Omega) > 0$ telle que :*

- **i)** $U_{|\Omega} = u$,
- **ii)** $\|U\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{L^p(\Omega)}$,
- **iii)** $\|U\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Remarque 5.3 *: L'opérateur A de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur continue, appelé de prolongement de $W^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 5.2 : *Soit $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 2)$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ d'ordre m est l'ensemble suivante :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Autrement dit :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}^n(|\alpha| \leq m), \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u.D^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\varphi; \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\right\}.$$

En particulier, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

ABDERACHID SAADI

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, séparable, muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^p(\Omega)}.$$

Suivant des mêmes arguments que dans Théorème 5.1 et Théorème 5.2, on peut obtenir les deux théorèmes suivants :

Théorème 5.4 : *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach et l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 5.5 : *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace séparable pour $1 \leq p < +\infty$, réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Le lemme suivant est important pour prouver la densité de l'espace de fonctions test dans certain espaces de Sobolev :

Lemme 5.1 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Alors : $f * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *on a :* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f * u) = f * \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Preuve: Supposons d'abord que f est à support compact. Alors : $(f * u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(y-x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\check{f} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (\check{f} * \varphi)(x) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) (\check{f} * \varphi)(x) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(f * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que f n'est pas à support compact. Il existe une suite $\{\rho_j\}_{j=1}^{+\infty}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_j * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)(x) \varphi(x) dx. \tag{5.3}$$

On a aussi :

$$\rho_j * u \longrightarrow f * u \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i} \longrightarrow f * \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(f * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)(x) \varphi(x) dx. \tag{5.4}$$

D'ou le résultat. ■

Théorème 5.6 : *L'espace* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve: Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et considérons la fonction $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \le \chi \le 1$, $\operatorname{supp} \chi \subset B(0,2)$ et $\chi = 1$ sur $B(0,1)$. Soit la suite $\{\chi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ définie par : $\chi_j(x) = \chi\left(\dfrac{x}{j}\right)$. Alors : $\chi_j.u$ converge vers u p.p. et $|\chi_j.u| \le |u|$ pour tout j. D'après théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.13), la suite $\{\chi_j.u\}_{j=1}^{+\infty}$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit

$\{\rho_j.u\}_{j=1}^{+\infty}$ une suite régularisante au sens de Définition 1.24. On pose $\varphi_j = \chi_j.(\rho_i * u)$. Alors : $\varphi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\varphi_j - u = \chi_j.[(\rho_j * u) - u] + [\chi_j.u - u].$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
\|\chi_j.[(\rho_j * u) - u]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_j.[(\rho_j * u) - u]|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\rho_j * u) - u|^p dx \\
&= \|(\rho_j * u) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\|\varphi_j - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\rho_j * u) - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\chi_j.u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

Grâce au Lemme 5.1 on a :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}.(\rho_j * u) + \chi_j \left(\rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Donc :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}.(\rho_j * u) + \chi_j \left[\left(\rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \left[\chi_j.\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right].$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}.(\rho_j * u)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}.(\rho_j * u)\right|^p dx \\
&\leq \left\|\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_j * u|^p dx \\
&\leq \left\|\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\rho_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \\
&= \frac{1}{j} \left\|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|\frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}.(\rho_j * u)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\left(\rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\chi_j.\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{j} \left\|\frac{\partial \chi}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\left(\rho_j * \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\chi_j.\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

■

En utilisant des arguments analogues aux arguments ci-dessus, on peut présenter des autres résultats de densité :

ABDERACHID SAADI

Théorème 5.7 : *L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 5.8 : *L'espace $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Remarque 5.4 : *Si Ω est borné, de classe $\mathscr{C}^m$, alors :*

i) *L'espace $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

ii) *Pour tout $k \geq m$ l'espace $\mathscr{D}^k(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. En particulier $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geq m$.*

5.2 Inégalités et injections de Sobolev

D'abors, on a le lemme suivant :

Lemme 5.2 *: Supposons que $n \geq 2$ et soient $f_1, \cdots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$ on pose : $\hat{x}_i = (x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ et soit f la fonction définie par : $f(x) = f_1(\hat{x}_1).f_2(\hat{x}_2) \cdots f_n(\hat{x}_n)$. Alors : $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :*

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Théorème 5.9 (Gagliardo – Nirenberg – Sobolev) : *Supposons que $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n$. Etant donné p^* tel que $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ (exposant de Sobolev). Alors : $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, et il existe une constante $c = c(p, n) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

ABDERACHID SAADI

Preuve: Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a :

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_i, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_i, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \right| dt$$

Posons : $f_i(\hat{x}_i) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_i, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \right| dt.$

Alors : $|\varphi(x)|^n \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i)$, ce qui donne : $|\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i^{\frac{1}{n-1}}(\hat{x}_i)$.

D'après Lemme 5.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i^{\frac{1}{n-1}}\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}, \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_i dx \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\
&= \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}}, \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}. \tag{5.5}$$

Pour $t \geq 1$ en remplaçant φ par $|\varphi|^{t-1}.\varphi$, on obtient : $\left| \dfrac{\partial(|\varphi|^{t-1}.\varphi)}{\partial x_i} \right| = t|\varphi|^{t-1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Alors :

$$\||\varphi|^{t-1}.\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq t \prod_{i=1}^{n} \left\| |\varphi|^{t-1}. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}.$$

En remarquant que :

$$\||\varphi|^{t-1}.\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{tn}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} = \|\varphi\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left\| |\varphi|^{t-1}. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \||\varphi|^{t-1}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}. \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^n)}. \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc :

$$\|\varphi\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq t \|\varphi\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^n)}. \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}.$$

On prend $t = \dfrac{n-1}{n} p^* = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$. Alors : $\dfrac{tn}{n-1} = p'(t-1) = p^*$, ce qui donne

$$\|\varphi\|^t_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(n-1)p}{np} \|\varphi\|^{t-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}. \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}.$$

Alors :

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(n-1)p}{np}. \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq c \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc :

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

De la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on obtient le résultat. ■

Corollaire 5.1 :

i) *Pour* $n \geq 2$ *et* $1 \leq p < n$ *on a :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \qquad \forall q \in [p, p^*].$$

ii) *Pour* $n \geq 2$ *on a :*

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \qquad \forall q \in [n, +\infty[.$$

ABDERACHID SAADI

Théorème 5.10 (**Morry**) : *Soit $p > n$. Alors :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$|u(x) - u(y)| \leq c(n,p)|x-y|^{\frac{p-n}{p}}, \qquad p.p\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Les résultats précédant reste valable pour des ouverts assez réguliers (voir [1, 5]) :

Théorème 5.11 : *Supposons que Ω est de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné (où bien $\Omega = \mathbb{R}^n_+$), $1 \leq p \leq +\infty$. On a :*

1. *Si $1 \leq p < n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.*
2. *Si $p = n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $p > n$ alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a :*

$$|u(x) - u(y)| \leq c(n,p)|x-y|^{\frac{p-n}{p}}, \qquad p.p\ x, y \in \Omega.$$

En particulier : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

Théorème 5.12 : *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$.*

1. *Si $1 - \dfrac{m}{n} > 0$, alors : $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, où $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.*
2. *Si $1 - \dfrac{m}{n} = 0$, alors : $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, pour tout $q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $1 - \dfrac{m}{n} < 0$, alors : $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Le théorème suivant donne un résultat plus préciser :

Théorème 5.13 (**Rellich – Kondrachov**) : *Supposons que Ω est borné, de classe C^1. On a :*

1. *Si $p < n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pur tout $q \in [1, p^*[$.*
2. *Si $p = n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$.*
3. *Si $p > n$ alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Ces injections sont compactes.

Remarque 5.5 : *Pour $n = 1$ et $\Omega = I$ un intervalle on a les propriétés suivantes :*

i) *Pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $\tilde{u} \in \mathscr{C}(\bar{I})$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p. sur I et*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

ii) *Pour q'une fonction $u \in L^\infty(I)$ soit dans $W^{1,\infty}(I)$ il faut et il suffit qu'il existe $c > 0$ telle que :*

$$u(x) - u(y) \leq c|x-y|, \quad p.p.\ x, y \in I.$$

ABDERACHID SAADI

ii) *Si I est borné alors :*
**) $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega),\ \forall\ 1 \leq p \leq +\infty$.*
***) $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}),\ \forall\ 1 < p \leq +\infty$ avec compacité.*
****) L'injection $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ est continue mais n'est pas compacte.*
*****) L'injection $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q \leq +\infty$.*

5.3 Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Supposons que $1 \leq p < +\infty$.

Définition 5.3 : *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*
En particulier $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 5.6 : *De la densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, on déduit que : $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 5.14 : *Supposons que Ω est de classe $\mathscr{C}^1$, et soit $u \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u = 0$ *sur* Γ,

ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Voici une autre caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Théorème 5.15 : *Supposons que Ω est de classe $\mathscr{C}^1$, et soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

ii) *il existe $c > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$ et toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :*

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq c.\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

iii) *La fonction $\widetilde{u}$, définie par : $\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & : \ x \in \Omega, \\ 0 & : \ x \notin \Omega, \end{cases}$ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dans ce cas là on a : $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)}$.

Théorème 5.16 (***inégalité de Poincaré***) : *Supposons que Ω est borné dans une direction, i.e il existe $i \in \{1, \cdots, n\}, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tel que : $a \leq x_i \leq b,\ \forall x \in \Omega$. Alors, il existe une constante $c = c(\Omega, p)$ telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ABDERACHID SAADI

Preuve: De la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il suffit de montrer ce théorème pour les fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$. Soit alors $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \left| \int_a^{x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i-1}, \cdots, x_n) dt \right|, \\
&\le \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i \right|, \\
&\le \left(\int_a^b 1.dx_i \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\
&= (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \\
&\le (b-a)^{p-1} \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right|^p dx_i dx, \\
&= (b-a)^{p-1} \int_a^b \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right|^p dx dx_i, \\
&\le (b-a)^p \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)}, \\
&\le (b-a)^p \|\nabla \varphi\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où le résulta par densité. ∎

Corollaire 5.2 : *On a pour tout $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$: $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C.\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On peut alors considérer $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ comme une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalent à $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.*

Il y a une autres versions de l'inégalité de Poincaré :

Théorème 5.17 (***inégalité de Poincaré-Wirtinger***) : *Supposons que Ω est connexe, de classe $\mathscr{C}^1$ et de mesure bornée $|\Omega|$. Posons : $u_\Omega = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega u(x) dx$, . Alors, il existe $c > 0$ telle que :*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

5.4 Espace $W^{-m,p'}(\Omega)$

Définition 5.4 : *On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 5.2 : *On a :*

1. *$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ avec densité.*
2. *Si Ω est borné et $\dfrac{2n}{n+2} \le p < +\infty$ alors : $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$, avec densité.*
3. *Si Ω n'est pas borné et $\dfrac{2n}{n+2} \le p \le 2$ alors : $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$.*

ABDERACHID SAADI

On a la caractérisation suivante des éléments de $W^{-1,p'}(\Omega)$:

Théorème 5.18 : *Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. alors; il existe $G_0 \in L^{p'}(\Omega), G = (G_1, G_2, \dots, G_n) \in (L^{p'}(\Omega))^n$ telles que :*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega G_0.u + \int_\Omega G.\nabla u, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

et $\max\limits_{0\leq i\leq n} \|G_i\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|f\|$.

Si Ω est borné, on peut prendre $G_0 = 0$

Preuve: Considérons l'espace $E = (L^p(\Omega))^{n+1}$, munit de la norme :

$$\|V\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}} = \|(v_0, v_1, \cdots v_n)\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n} \|v_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

L'opérateur A de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $(L^p(\Omega))^{n+1}$, défini par :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : Au = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

est une isométrie (voir preuve de Théorème 5.2). Posons $G = A^{-1}(W_0^{1,p}(\Omega))$, on munit G de la norme induite de E.
Soit l'aaplication linéaire continue ℓ définie sur G par : $\ell(V) = \langle f, A^{-1}V\rangle$. D'après théorème de Hahn-Banach (Corollaire 1.1), on peut prolonger ℓ vers une application linéaire et continue L définie sur E avec : $\|L\|_{E'} = \|f\|$.
Le théorème de représentation de Riez (Théorème 1.12) permis nous d'écrire :

$$\langle L, h\rangle = \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega G_i.v_i, \qquad \forall v_i \in E.$$

tenant en compte $v_0 = u_0, v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, on trouve le résultat.
Pour Ω borné, en utilisant la norme $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, par conséquent on peut prendre $G_0 = 0$. ■

5.5 Espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, théorème de trace, formule de Green

Dans cette section, nous fournissons un bref aperçu des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire et théorème de trace. D'abord, nous avons la théorie suivante, qui montre la relation entre les espaces $H^m(\mathbb{R}^n)$ et l' espaces des distributions tempérées.

Théorème 5.19 : *$H^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a :*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

ABDERACHID SAADI

Cette propriété fondamentale a été exploitée pour étendre le concept d'espaces de Sobolev d'ordre entier à des espaces plus généraux appelés espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, qui sont introduits dans la définition suivante :

Définition 5.5 *: Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme suivant :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Généralement, on a la définition suivante :

Définition 5.6 *: Soit $0 < s < 1$ et $p[1, +\infty[$. On définit l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ comme suivant :*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega).$$

Si $s > 1$, on écrit $s = m + r$ où $m \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 1$. On définit $W^{s,p}(\Omega)$ comme suivant :

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : D^\alpha u \in W^{s,p}(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = 1\}.$$

Théorème 5.20 (**trace**) : *Supposons que Ω est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors : l'application γ_0 : $\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to C(\Gamma)$, définie par : $\gamma_0 v = v_{|\Gamma}$, se prolonge par continuité par une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, encore notée par γ_0.*

γ_0 est appelée l'application de trace, et $\gamma_0 v$ est appelée trace de v sur Γ.

L'application γ est surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

ABDERACHID SAADI

En général, on peut définit l'pplication γ_0 de trace de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Gamma)$. Cette application est surjective de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Notons que $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ est un espace de Sobolev défini sur la sous-variété Γ de dimension $n-1$, en utilisant un système des cordonnées précisé.

Remarque 5.7 *: On écrit : $W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma_0 v = v_{|\Gamma} = 0\}$.*

Un résultat important de théorème de trace est le suivant :

Théorème 5.21 (***formule de Green***) : *Supposons que Ω est borné, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et soit ν le vecteur normal extérieur de Γ. Alors :*

i) *Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.vdx = -\int_\Omega u.\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma u.v.\nu_i d\sigma(x).$$

ii) *Pour tout $u, v \in W^{2,p}(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega -\Delta u.vdx = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}.v\sigma(x).$$

Exercices

Exercice 5.1 : *Soit $p \in [1, +\infty[$ et H la fonction de Heaviside, et soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

Donner des conditions sur φ pour que $H.\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.2 : *Soit la fonction u, définie sur $]-1,1[$ par : $u(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$*

1. *Montrer que $u \in H^1(]-1,1[)$.*
2. *Est -ce- que $u \in H^2(]-1,1[)$?*

Exercice 5.3 : *Soit $p \in [1, +\infty[$ et f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in [0,1], \\ -x+2 & : \quad x \in [1,2], \\ 0 & : \quad x \notin [1,2]. \end{cases}$$

1. *Montrer que $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*
2. *Est - ce - que $f \in W^{2,p}(\mathbb{R})$?*

Exercice 5.4 : *Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, et u la fonction définie sur $\Omega \setminus \{(0,0)\}$ par :*

$$u(x,y) = \left| \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \right|^{\alpha}$$

où $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $u \in H^1(\Omega)$, mais n'admet pas de représentation continue sur Ω.

Exercice 5.5 : *Soit B la boule d'unité de $\mathbb{R}^n$, et u la fonction définie sur $B \setminus \{0\}$ par :*

$$u(x) = |x|^{\alpha}.$$

Étudier l'appareenence de u à $H^1(B)$.

Exercice 5.6 : *Soit $p \in [1, +\infty[$ et f la fonction définie de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ comme suivant :*

$$\forall x \in]0,1[: f(x) = x^{-\frac{1}{p+1}}.$$

1. *Montrer que $f \in L^p(]0,1[)$.*
2. *Trouver la fonction g telle que : $\forall \varphi \in \mathscr{D}(]0,1[) : \displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx$.*
3. *Est-ce- que $f \in W^{1,p}(]0,1[)$?*
4. *Soit $u \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ et $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de $\mathscr{D}(]0,1[)$ converge vers v dans $W_0^{1,p}(]0,1[)$ (i.e $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n' - u'\|_{L^p(]0,1[)} = 0$).*

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \left| \displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx \right| \leq \dfrac{p+1}{p} \|\varphi_n'\|_{L^p(]0,1[)}$.

ABDERACHID SAADI

5. *Conclure.*

Exercice 5.7 : *Soit* $\delta : \mathscr{D}(]-1,1[) \to \mathbb{R}$, *définie par :* $<\delta, \varphi>= \varphi(0)$.

1. *Montrer que* $\delta \in H^{-1}(]-1,1[)$.
2. *Trouver* $u_0 \in H_0^1(]-1,1[)$ *solution de l'équation :*
$$-T'' = \delta \text{ dans } \mathscr{D}'(]-1,1[).$$
3. *Montrer que cette solution est unique.*

Solutions des exercices

Solution 5.1 : $p \in [1,+\infty[, H$ *la fonction de Heaviside,* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *On a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(x).\psi(x)|^p dx = \int_0^{+\infty} |\psi(x)|^p dx = |\psi|^p_{L^p(]0,+\infty[)} < +\infty.$$

Donc : $H.\psi \in L^p(\mathbb{R})$.
Soit maintenant $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} H(x).\psi(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^{+\infty} \psi(x)\varphi'(x)dx \\
&= [\psi(x)\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi'(x)\varphi(x)dx \\
&= -\psi(0)\varphi(0) - \int_0^{+\infty} \psi'(x)\varphi(x)dx \\
&= -\langle \psi(0)\delta + \psi', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Pour $H.\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *il faut* $\psi(0) = 0$.

Solution 5.2 : $x \in]-1,1[$ *par :* $u(x) = \dfrac{x+|x|}{2} = \begin{cases} 0 & : \ x \in]-1,0], \\ x & : \ x \in]0,1[\end{cases}$

1. *On a :* $\displaystyle\int_{-1}^1 u^2(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. *Donc :* $u \in L^2(]-1,1[)$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\
&= [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx, \\
&= -\int_0^1 \varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors : $u'(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in]-1,0], \\ 1 & : \ x \in]0,1[\end{cases}$
$\displaystyle\int_{-1}^1 u'^2(x)dx = \int_0^1 dx = \frac{1}{2}$. *Donc :* $u' \in L^2(]-1,1[)$.
Alors : $u \in H^1(]-1,1[)$.

ABDERACHID SAADI

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 \varphi'(x)dx\\ &= [\varphi(x)]_0^1,\\ &= -\varphi(0).\end{aligned}$$

Alors : $u'' = \delta \notin L^2(]-1,1[)$. *Donc :* $u \notin H^2(]-1,1[)$.

Solution 5.3 : $p \in [1,+\infty[,\ f(x) = \begin{cases} x & : \ x \in [0,1],\\ -x+2 & : \ x \in [1,2],\\ 0 & : \ x \notin [1,2].\end{cases}$

1. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq 1$, *donc :* $|f(x)|^p \leq 1$. *Alors :* $f \in L^p(\mathbb{R})$.
   Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 (-x+2)\varphi'(x)dx\\ &= [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx + [(-x+2)\varphi(x)]_1^2 + \int_1^2 \varphi(x)dx,\\ &= -\int_0^1 \varphi(x)dx + \int_1^2 \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Alors : $f'(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in]0,1[,\\ -1 & : \ x \in]1,2[,\\ 0 & : \ x \notin]0,2[.\end{cases}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^p dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 dx = 2$. *Donc :* $f' \in L^p(]-1,1[)$.
Alors : $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 \varphi'(x)dx - \int_1^2 \varphi'(x)dx\\ &= [\varphi(x)]_0^1 - [\varphi(x)]_1^2,\\ &= 2\varphi(1) - \varphi(2) - \varphi(0).\end{aligned}$$

Alors : $f'' = 2\delta_1 - \delta_2 - \delta \notin L^p(\mathbb{R}[)$. *Donc :* $f \notin W^{2,p}(\mathbb{R})$.

Solution 5.4 : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}, u(x,y) = \left|\ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha}, 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

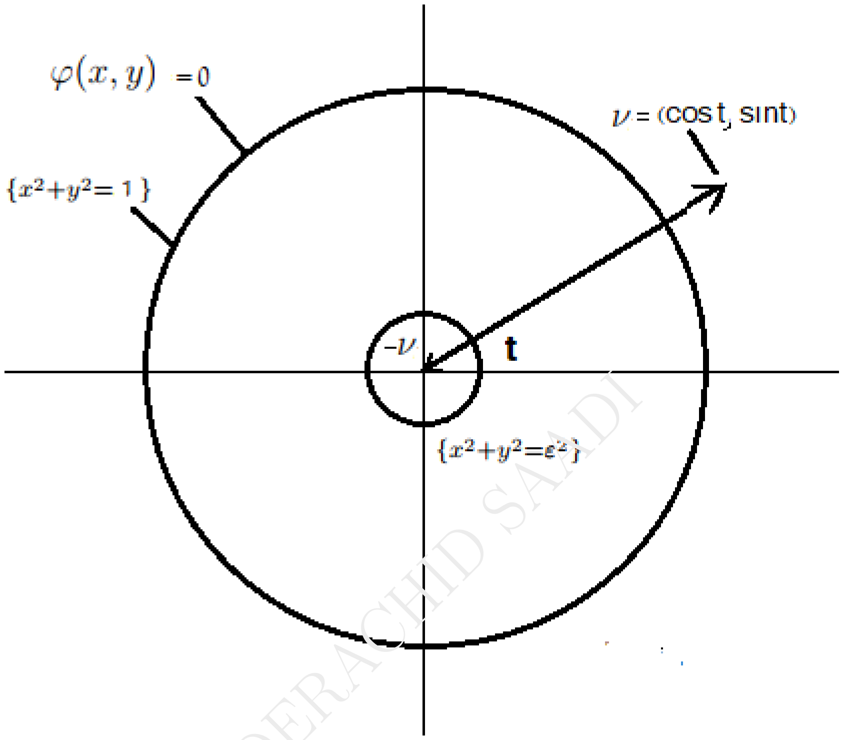
On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2(x,y)dxdy &= \int_\Omega \left|\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{2\alpha} dxdy\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\left|\ln \frac{r}{2}\right|^{2\alpha} drd\theta\\ &= 2\pi\int_0^1 r\left|\ln \frac{r}{2}\right|^{2\alpha} drd\theta < +\infty.\end{aligned}$$

ABDERACHID SAADI

Alors : $u \in L^2(\Omega)$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy &= \int_\Omega \left(-\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} \left(-\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy
\end{aligned}$$



ABDERACHID SAADI

Comme $\partial\Omega = \{x^2+y^2=\varepsilon^2\}\cup\{x^2+y^2=1\}$ *et* $\varphi = 0$ *sur* $\{x^2+y^2=1\}$ *on arrive à :*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} \left(-\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy &= -\int_{\{x^2+y^2=\varepsilon^2\}} \left(-\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha \varphi(x,y)\nu_x d\sigma(x,y) \\
&\quad + \int_{\Omega\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} \frac{\alpha x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1} dxdy \\
&= -\left(-\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\cos t dt \\
&\quad + \int_{\Omega\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} \frac{\alpha x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1} dxdy
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\cos t &\simeq \varphi(0,0).\cos t + \varepsilon\left(\cos t\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) + \sin t\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)\right) \\
&= \varphi(0,0).\cos t + \frac{\varepsilon}{2}\left((1+\cos 2t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) + \sin 2t\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)\right)
\end{aligned}$$

Alors :

$$-\left(-\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\cos t dt \simeq -\pi\varepsilon\left(-\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha},$$

i.e $\lim_{\varepsilon\to 0} -\left(-\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\varepsilon\cos t,\varepsilon\sin t)\cos t dt = 0.$
Donc :

$$\int_{\Omega}u(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy = \int_{\Omega}\frac{\alpha x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1}dxdy.$$

De même :

$$\int_{\Omega}u(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}dxdy = \int_{\Omega}\frac{\alpha y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1}dxdy.$$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\alpha y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{\alpha-1}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(x,y)dxdy &= \int_{\Omega}\frac{\alpha^2x^2}{4(x^2+y^2)}\left|\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right|^{2\alpha-2}dxdy\\
&= \frac{\alpha^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\cos^2\theta\left|\ln\frac{r}{2}\right|^{2\alpha-2}drd\theta\\
&\leq \frac{\pi\alpha^2}{2}\int_0^1 r\left|\ln\frac{r}{2}\right|^{2\alpha-2}drd\theta < +\infty.
\end{aligned}$$

Alors : $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\in L^2(\Omega).$
Donc : $u\in H^1(\Omega)$.
On a : $\lim_{(x,y)\to(0,0)}u(x,y) = +\infty.$
Donc : u n'admet pas de représentation continue sur Ω.

ABDERACHID SAADI

Solution 5.5 : *Soit* $B=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq 1\}, u(x)=|x|^{\alpha}$.

1. **) Supposons que* $n=1$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}u^2(x)dx &= \int_{-1}^{1}|x|^{2\alpha}dx\\
&= 2\int_0^1 x^{2\alpha}dx < +\infty \text{ si } \alpha > -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc : $u\in L^2(B)$ *si* $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(B)$*. On a :*

$$\begin{aligned}
\int_B u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{1} |x|^\alpha \varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (-x)^\alpha \varphi'(x)dx + \int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} (-x)^\alpha \varphi'(x)dx + \int_\varepsilon^1 x^\alpha \varphi'(x)dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^\alpha(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)) + \alpha\int_{-1}^{-\varepsilon} (-x)^{\alpha-1}\varphi(x)dx - \alpha\int_\varepsilon^1 x^{\alpha-1}\varphi(x)dx\right)
\end{aligned}$$

on a : $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\alpha(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^{1+\alpha}\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = 0$ *si* $\alpha > -1$*.*
Alors : pour $\alpha > -1$ *on a :*

$$\int_B u(x)\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} (-x)^{\alpha-1}\varphi(x)dx + \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi(x)dx.$$

Dans ce cas là : $u'(x) = \alpha sign(x)|x|^{\alpha-1}$*, où* $sign(x)$ *désigne le signe de* x*.*

$$\begin{aligned}
\int_B u'^2(x)dx &= \alpha^2\int_{-1}^{1} |x|^{2\alpha-2}dx \\
&= 2\alpha^2\int_0^1 x^{2\alpha-2}dx < +\infty \text{ si } \alpha > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alors : $u \in H^1(B)$ *pour* $\alpha > \dfrac{1}{2}$*.*
***) Supposons que* $n = 2$*. Alors :*

$$\begin{aligned}
\int_B u^2(x,y)dxdy &= \int_B (x^2+y^2)^\alpha dxdy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r^{2\alpha+1}drd\theta \\
&= 2\pi\int_0^1 r^{2\alpha+1}dr < +\infty \text{ si } \alpha > -1.
\end{aligned}$$

Donc : $u \in L^2(B)$ *si* $\alpha > -1$*.*
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(B)$*. En utilisant des mêmes arguments de l'exercice 5.4 on obtient pour* $\alpha > -1$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_B u(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy &= \int_B (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\pi\varepsilon^{1+\alpha} - \int_{B\cap\{x^2+y^2>\varepsilon^2\}} \alpha x(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\varphi(x,y)dxdy\right] \\
&= \int_B -\alpha x(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}\varphi(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

ABDERACHID SAADI

D'ou : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha x(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha y(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy &= \alpha^2 \int_B x^2(x^2+y^2)^{\alpha-2} dxdy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \cos^2\theta . r^{2\alpha-1} dr d\theta \\
&= \pi \int_0^1 r^{2\alpha-1} dr < +\infty \ si\ \alpha > 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdy &= \alpha^2 \int_B y^2(x^2+y^2)^{\alpha-2} dxdy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \sin^2\theta . r^{2\alpha-1} dr d\theta \\
&= \pi \int_0^1 r^{2\alpha-1} dr < +\infty \ si\ \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Donc : $u \in H^1(B)$ *si* $\alpha > 0$.

****) Supposons que* $n \geq 2$ *et posons :* $x = (x_1, \cdots, x_n)$, *où*

$$\begin{cases}
x_1 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1} \\
x_2 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1} \\
x_2 &= r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2} \\
 & \vdots \\
x_{n-2} &= r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1.
\end{cases}, r \in]0,1[, \theta_1, \theta_2, \theta_{n-2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \theta_{n-1} \in]-\pi, \pi[.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_B u^2(x)dx &= \int_B |x|^{2\alpha} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cdots\cos\theta_{n-1} r^{2\alpha} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1} \\
&= M\int_0^1 r^{2\alpha+n-1} dr < +\infty \ si\ \alpha > -\frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Donc : $u \in L^2(B)$ *si* $\alpha > -\dfrac{n}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(B)$. *En utilisant des mêmes arguments de l'exercice 5.4 on obtient pour* $\alpha > -\dfrac{n}{2}$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_B u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dxdy &= \int_B |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B\cap\{|x|>\varepsilon\}} |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\{|x|=\varepsilon\}} \varepsilon^\alpha \varphi(x)\nu_i(x) d\sigma(x) - \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \alpha x_i |x|^{\alpha-2}\varphi(x) dx \right] \\
&= -\int_B \alpha x_i |x|^{\alpha-2} \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

ABDERACHID SAADI

D'ou : $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha x_i |x|^{\alpha-2}.$

$$\begin{aligned}\int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx &= \alpha^2 \int_B x_i^2 |x|^{2\alpha-4} dx \\ &= M' \int_0^1 r^{2\alpha+n-3} dr < +\infty \; si \; \alpha > \frac{2-n}{2}.\end{aligned}$$

Solution 5.6 : $p \in [1,+\infty[, \forall x \in]0,1[$: $f(x) = x^{-\frac{1}{p+1}}$.

1. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^p dx &= \int_0^1 x^{-\frac{p}{p+1}} dx \\ &= p+1 < +\infty.\end{aligned}$$

Donc : $f \in L^p(]0,1[)$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(]0,1)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\varphi'(x)dx &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p+1}} \varphi'(x) dx \\ &= [x^{-\frac{1}{p+1}}\varphi(x)]_0^1 + \frac{1}{p+1} \int_0^1 x^{-\frac{p+2}{p+1}} \varphi(x) dx, \\ &= \frac{1}{p+1} \int_0^1 x^{-\frac{p+2}{p+1}} \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Alors : $g(x) = -\dfrac{1}{p+1} x^{-\frac{p+2}{p+1}}$.

3. *On a :*

$$\int_0^1 |g(x)|^p dx = \frac{1}{(p+1)^p} \int_0^1 x^{-\frac{p(p+2)}{p+1}} dx = \infty \;\; car \;\; -\frac{p(p+2)}{p+1} \leq -1.$$

Donc : $f \notin W^{1,p}(]0,1[)$.

4. $u \in W_0^{1,p}(]0,1[), \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}(]0,1[), \lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n' - u'\|_{L^p(]0,1[)} = 0.$
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{p+1}} \varphi_n(x) dx \\ &= \frac{p+1}{p}[x^{\frac{p}{p+1}}\varphi(x)]_0^1 - \frac{p+1}{p} \int_0^1 x^{\frac{p}{p+1}} \varphi_n'(x) dx, \\ &= -\frac{p+1}{p} \int_0^1 x^{\frac{p}{p+1}} \varphi_n'(x) dx.\end{aligned}$$

ABDERACHID SAADI

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx\right| &= \left|\frac{p+1}{p}\int_0^1 x^{\frac{p}{p+1}}\varphi_n'(x)dx\right| \\
&\leq \frac{p+1}{p}\int_0^1 x^{\frac{p}{p+1}}|\varphi_n'(x)|dx \\
&\leq \frac{p+1}{p}\int_0^1 |\varphi_n'(x)|dx \\
&\leq \frac{p+1}{p}\left(\int_0^1 1^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^1 |\varphi_n'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p+1}{p}\|\varphi_n'\|_{L^p(]0,1[)}.
\end{aligned}$$

5. *De la question précédente on a :*

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx\right| \leq \frac{p+1}{p}\|\varphi_n\|_{W_0^{1,p}(]0,1[)}.$$

Par densité :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(]0,1[) : \left|\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx\right| \leq \frac{p+1}{p}\|u\|_{W_0^{1,p}(]0,1[)}.$$

Donc : $f \in W_0^{-1,p'}(]0,1[)$.

Solution 5.7 : $\delta : \mathscr{D}(]-1,1[) \to \mathbb{R}, <\delta,\varphi>=\varphi(0)$

1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
|\langle\delta,\varphi\rangle| &= |\varphi(0)| \\
&= \left|\int_{-1}^0 \varphi'(x)dx\right| \\
&\leq \int_{-1}^1 |\varphi'(x)|dx \\
&\leq \left(\int_{-1}^1 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |\varphi'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\|\varphi\|_{H_0^1(]-1,1[)}.
\end{aligned}$$

Par densité, on déduit que $\delta \in H^{-1}(]-1,1[)$.

2. *D'après l'exemple 3.9 et Corollaire 3.1, les solutions de l'équation* $-T'' = \delta$ *dans* $\mathscr{D}'(]-1,1[)$ *sont des restrictions de la fonction* $f(x) = \alpha|x| + \beta$.
Comme $u_0 \in H_0^1(]-1,1[)$ *on a :* $u_0(-1) = u_0(1) = 0$, *donc :* u_0 *peut écrire sous la forme :*

$$u_0(x) = \begin{cases} a(x+1) & : \ x \in [-1,0] \\ b(x-1) & : \ x \in]0,1]. \end{cases}$$

ABDERACHID SAADI

Alors : pour $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u_0(x)\varphi'(x)dx &= a\int_{-1}^{0}(x+1)\varphi'(x)dx + b\int_{0}^{1}(x-1)\varphi'(x)dx \\
&= a[(x+1)\varphi(x)]_{-1}^{0} - a\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx + b[(x-1)\varphi(x)]_{0}^{1} - b\int_{0}^{1}\varphi(x)dx \\
&= (a+b)\varphi(0) - a\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx - b\int_{0}^{1}\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors : $u_0' = -(a+b)\delta + f$, *où :*

$$f(x) = \begin{cases} a & : \ x \in [-1,0] \\ b & : \ x \in]0,1]. \end{cases}$$

$u \in H_0^1(]-1,1[)$ *implique que* $u' \in L^2(]-1,1[)$. *Donc :* $a+b=0$, *i.e* $b=-a$. *Alors :*

$$u_0'(x) = \begin{cases} a & : \ x \in [-1,0] \\ -a & : \ x \in]0,1]. \end{cases}$$

Donc : pour $\varphi \in \mathscr{D}(]-1,1[)$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u_0'(x)\varphi'(x)dx &= a\int_{-1}^{0}\varphi'(x)dx - a\int_{0}^{1}\varphi'(x)dx \\
&= a[\varphi(x)]_{-1}^{0} - a[\varphi(x)]_{0}^{1} \\
&= 2a\varphi(0).
\end{aligned}$$

Alors : $u'' = 2a$, *ce qui donne :* $a = \dfrac{1}{2}$. *Alors :*

$$u_0(x) = \frac{1-|x|}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+x}{2} & : \ x \in [-1,0] \\ \dfrac{1-x}{2} & : \ x \in]0,1]. \end{cases}$$

3. *Supposons qu'il existe une autre fonction* $u_1 \in H_0^1(]-1,1[)$ *vérifiant :* $-u_1'' = \delta$. *Alors :* $(u_1 - u_0)'' = 0$. *Donc :*

$$\int_{-1}^{1}(u_1-u_0)'(x)v'(x)dx = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(]-1,1[).$$

Posons : $v = u_1 - u_0$, *on trouve :* $\displaystyle\int_{-1}^{1}(u_1' - u_0')^2(x)dx = 0$.
Alors :

$$\|u_1 - u_0\|_{H_0^1(]-1,1[)} = \|u_1' - u_0'\|_{L^2(]-1,1[)} = 0.$$

Donc : $u_1 = u_0$.

ABDERACHID SAADI