Université Mohamed Boudiaf-M'sila — Département de l'informatique
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°03.
Algèbre 1

Exercice 01 :
Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation définie dans E.
Les proposition suivantes sont vraies ou fausses. (Corrigez la proposition fausse)

1. $\mathcal{R}$ est une relation binaire si elle est **réflexive**, **transitive**, **symétrique** et **anti-symétrique**.
2. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est **réflexive** et **transitive**.
3. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **symétrique** et **anti-symétrique**.

Exercice 02 :
Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C};\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\dot{z}$ tel que, $z = 2$.
3. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{C}_{/\mathcal{R}}$.

Exercice 03 :

1. Dire si les trois relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives :
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \iff x = -y.$
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$
   (c) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\mathcal{R}B \iff A \subset B.$
2. Que peut-on conclure de ces relations ?.
3. Si (b) une relation d'équivalence. Trouver la classe d'équivalence de $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$

Exercice 04 :
Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $]\,1, +\infty\,[$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Est-ce-que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 05 :(Devoir à la maison)
Montrer que la relation suivante sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*,\ q = p^k.$$

Exercice 06 : (Devoir à la maison)
Soit Ω l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de Ω définie par :

$$\forall p, q \in \Omega,\ p\mathcal{R}q \iff \frac{p+q}{2} \in \Omega.$$

1. La relation est-elle réflexive, symétrique et transitive ?
2. Que peut-on conclure ?