Université Mohamed Boudiaf-M'sila — Département de l'informatique
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°04.
Algèbre 1

Exercice 01 :

1. On définit sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a * b = \ln(e^a + e^b)$$

   (a) La loi $*$ est-elle commutative ?, Associative ? Possède-t-elle un élément neutre ?.
   (b) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $\circ$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \circ y = ax + by$$

   (a) Déterminer a, b pour que la loi $\circ$: (1) Soit associative. (2) Possède un élément neutre.

Exercice 02 :
Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de composition interne définie sur G par

$$\forall (a,b), (c,d) \in G : (a,b) * (c,d) = (ac, ad + b)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que l'ensemble $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

Exercice 03 :

1. Soit $G = \mathbb{R}$. on définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall a, b \in G, a * b = a + b + \frac{1}{4}$$

   (a) Montrer que $*$ est une loi commutative.
   (b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

2. Soit

$$\begin{aligned} f :& (G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ & x \longmapsto f(x) = 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   - Montrer que f est un isomorphisme de groupe.

☞ **Indication** : f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ f est un homomorphisme bijective.

Exercice 04 :

1. On munit l'ensemble $A = \mathbb{R}^2$ de deux lois définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x + y - 2, \; x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6.$$

   (a) Montrer que $(A, *)$ est un groupe Abélien (commutatif).

   (b) Montrer que la loi $\bullet$ est : **(i)** commutative, **(ii)** associative.

   (c) Montrer que $(A, *, \bullet)$ est un anneau commutatif.

   (d) Soit $B = \mathbb{Z}^2$. Montrer que $(B, *, \bullet)$ est un sous-anneau de $(A, *, \bullet)$.

2. On munit l'ensemble $K = \mathbb{R}$ par l'addition et la multiplication usuelle.

   (a) Pourquoi $(K, +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 05 :(Devoir à la maison)

On munit l'ensemble $A = \mathbb{Z}^2$ de deux lois définies par :

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y') \text{ et } (x,y) \star (x',y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.
3. Déterminer l'élément neutre pour la loi $\star$.
4. Montrer que $(A, +, \star)$ est un anneau unitaire commutatif.
5. Montrer que $B = \{(a, 0), \; a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(A, +, \star)$.