Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S1) : 2022/2023
B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 01

Sérier 03 (Les fonctions d'une variable réelle : limites, continuité et dérivabilité)

Exercice 1. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4},\quad g(x)=\ln(x^2+3x-4),\quad h(x)=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{1-x^2}},\quad k(x)=\frac{1}{[x]-2022}.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x),\quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+8}-3},\quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1},\quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^6},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{[|x|]}{x^{10}},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}.$$

Exercice 3.

1. En utilisant la définition de la limite montrer que :

$$\lim_{x\to4}3x=12,\quad \lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{x-3}=2$$

2. Montrer que $|x-2|\leq1\Longrightarrow x+3\geq1$. Déduire que

$$\lim_{x\to2}\frac{2x+11}{x+3}=3.$$

Exercice 4.

1. Montrer que

$$\forall x,y\geq0:|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$$

2. Déduire que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,\infty[$ (Choisir $x=\frac{1}{n},\ y=\frac{1}{2n}$).

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}x^3+\frac{a}{x^2} & si\quad x\neq0\\ 0 & si\quad x=0\end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x\to0}f(x)$
2. Déduire la valeur de a pour la quelle f est continue.

Exercice 6. Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=[x]$ (distinguer les deux cas $x\in\mathbb{Z}$ et $x\notin\mathbb{Z}$).

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{Q}$. Montrer que $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8. 1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un point fixe et un seul.

Exercice 9. 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Montrer que f est constante.

2. Déduire que $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ n'ont pas de limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 10. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $\sqrt{\frac{1+x^2}{x-1}}$, $\ln(1+\cos(x^2-x+1))$

Exercice 11. 1. En utilisant le définition de la dérivée, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

2. Déduire les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x, \; k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}, \; a, b > 0.$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$.

1. Montrer que f est prolongeable la continuité sur $\mathbb{R}$ et donner sa prolongée $\tilde{f}$.
2. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ et calculer sa dérivé $\tilde{f}'$
3. Est ce que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée f'
3. Déduire que f est bijective

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2.$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Déduire la valeur de f.

Exercice 15. Montrer les inégalité suivantes

$$\forall x > -1 : \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

$$\forall x \in]0,1[: 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

(Appliquer TAF sur les fonctions : $e^x - x - 1$, $(1-x)e^x - 1$).

Exercice 16. Calculer les dérivées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ des fonctions suivantes

$$(x^2+x+1)e^x, \quad \frac{e^x}{1-x}, \quad \frac{e^{-x}}{1+x}.$$