حلول السلسلة رقم 03

Exercice 01 : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ existe}\}$

* $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+3x-4 \geq 0\}$

On étudie le signe de x^2+3x-4

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\Delta = 25$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$

Donc $\boxed{D_f =]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[}$

* $g = \ln(x^2+3x-4)$. $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+3x-4 > 0\}$

$= \boxed{]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[}$

* $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$. $D_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 > 0 \wedge 1-x^2 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -1 \wedge -1 < x < 1\}$

$=]-1, 1[$

* $k(x) = \dfrac{1}{[x]-2022}$

$D_k = \{x \in \mathbb{R} \,/\, [x]-2022 \neq 0\}$.

On a $[x]-2022 = 0 \iff [x] = 2022 \underset{[x]}{\overset{\text{déf}}{\iff}} 2022 \leq x < 2023$

D'où $D_k = \mathbb{R} \setminus [2022, 2023[= \boxed{]-\infty, 2022[\cup [2023, +\infty[}$

Exercice 02 : Calculons les limites suivante :

* $\ell_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\sqrt[3]{x^3+1}}_{a} - \underbrace{x}_{b} \Big)$ $\left(\text{N.B. } \boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)} \right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)\left((x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2\right)}{(x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 - x^3}{(x^3+1)^{2/3} + (x^3+1)^{1/3}x + x^2}$

$= \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$* \; l_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+8}-3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)} \times \dfrac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x}+1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \times \dfrac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x}+1} = 3$

$* \; l_3 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ (On pose $\cancel{t = x^4}$ $x = t^4$, $4 = ppcm(2,4)$)

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t-1}{t^2-1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{1}{2}$

$* \; l_4 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, (On pose $x = t^6$, $6 = ppcm(2,3)$)

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2-1}{t^3-1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\cancel{(t-1)}(t+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

$* \; l_5 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^6}$ (On sait que $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$)

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{x/6}}{x}\right)^6 = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{e^t}{6t}\right)^6 = \dfrac{1}{6^6} \lim \Big(\underbrace{\dfrac{e^t}{t}}_{+\infty}\Big)^6 = \boxed{+\infty}$

$* \; l_6 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ (On sait que $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$)

$= \lim \dfrac{\ln x^2 (1+\frac{1}{x^2})}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x + \ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = \boxed{0}$

$* \; l_7 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[|x|]}{x^{10}}$. On a pour $-1 < x < 1$: $0 \leq |x| < 1$

D'où $[|x|] = 0$ et donc $\dfrac{[|x|]}{x^{10}} = 0$, $\forall x : 0 < |x| < 1$

Donc $l_7 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[|x|]}{x^{10}} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = \boxed{0}$

$* \; l_8 = \lim \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim \dfrac{(\sin x)^2}{x^2 (1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$

$* \; l_9 = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{-\sin(x-\pi)}{\underbrace{x-\pi}_{t}} = -\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \boxed{-1}$

Exercice 03

* $\lim_{x \to 4} 3x = 12 \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : \boxed{|x-4| < \delta \Rightarrow |3x-12| < \varepsilon}\right)$

Soit $\varepsilon > 0$, On a : $|3x-12| < \varepsilon \iff 3|x-4| < \varepsilon \iff |x-4| < \frac{\varepsilon}{3}$

D'où $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{3}$: $\boxed{|x-4| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta \Longrightarrow |3x-12| < \varepsilon}$

* $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \iff \left(\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R} : \boxed{x < B \Rightarrow x^2 > A}\right)$

Soient $A > 0$, $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 > A \iff \left(x < -\sqrt{A}\right) \vee \left(x > \sqrt{A}\right)$

D'où $\exists B = -\sqrt{A}$ tq : $\boxed{x < B = -\sqrt{A} \Longrightarrow x^2 > A}$

(Si $x \to +\infty$, On choisit $B = +\sqrt{A}$)

* $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{x-3} = 2 \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R} : x < B \Rightarrow \left|\frac{2x+5}{x-3} - 2\right| < \varepsilon\right)$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour $x < 0$:

$$\left|\frac{2x+5}{x-3} - 2\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{\cancel{2x}+5-\cancel{2x}+6}{x-3}\right| < \varepsilon \iff \frac{-11}{x-3} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{x-3}{-11} > \frac{1}{\varepsilon} \iff x < \frac{-11}{\varepsilon} + 3$$

D'où Pour $B < \min\left\{0, \frac{-11}{\varepsilon} + 3\right\} < 0$, On a

$$\boxed{x < B \Longrightarrow \left|\frac{2x+5}{x-3} - 2\right| < \varepsilon}$$

* $\lim_{x \to 2} \frac{2x+11}{x+3} = 3$?? . Montrons que $|x-2| \leq 1 \Rightarrow x+3 \geq 1$

On a $|x-2| < 1 \iff 1 \leq x \leq 3 \iff 4 \leq x+3 \leq 6 \Longrightarrow x+3 \geq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\left|\frac{2x+11}{x+3} - 3\right| = \frac{|x-2|}{|x+3|}$

On a $|x-2| < 1 \Longrightarrow |x+3| \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{|x+3|} \leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{2x+11}{x+3} - 3\right| \leq |x-2|$

D'où Pour $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$, On a

$$|x-2| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} |x-2| < 1 \\ |x-2| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left|\frac{2x+11}{x+3} - 3\right| < |x-2| \\ |x-2| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\left|\frac{2x+11}{x+3} - 3\right| \leq \varepsilon}$$

Exercice 04

1) Montrons que $\forall x, y \geq 0 : \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$ ---- (*)

Pour $x = y$, c'est evident.

On peut supposer que $x < y$ (Cas $x > y$ est par rôle symetrique)

Alors (*) $\iff \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x} \iff \cancel{y} + x - 2\sqrt{yx} \leq \cancel{y} - x$

$\iff 2x \leq 2\sqrt{yx}$

On a $x < y \iff x^2 < xy \quad (x, y > 0)$

$\iff 2x < 2\sqrt{xy} \iff$ (*)

2) $\left(x \longmapsto \sqrt{x} \text{ est unif cont}\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \boxed{|x-y| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon}\right)$

~~Soit $\varepsilon > 0$, On a $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 = |x-y|$~~

~~D'où~~ Soit $\varepsilon > 0$. On a $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$, $\forall x, y \geq 0$

D'où $\sqrt{|x-y|} \leq \varepsilon \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon$

Donc $|x-y| < \varepsilon^2 \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon$

(Il suffit de choisir $\boxed{\delta = \varepsilon^2}$)

3) $\left(x \mapsto \frac{1}{x} \text{ n'est pas unif continue}\right)$

$\iff \left(\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \text{ et } \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq \varepsilon\right)$

Soit $\delta > 0$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}^* : n > \frac{1}{\delta}$ $\quad \left(n = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1\right)$

Pour $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{2n}$, On a $|x-y| = \frac{1}{2n} \leq \frac{\delta}{2} \leq \delta$

et On a $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |2n - n| = n \geq 1 = \varepsilon$.

(Il suffit de choisir $\varepsilon = 1$)

Donc $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas unif cont sur $]0, +\infty[$

Exo5 = $f(x) = \begin{cases} x^3 + \dfrac{a}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\underbrace{x^3}_{0} + \underbrace{\dfrac{a}{x^2}}_{\frac{a}{0^+}} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

2) On f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (c'est une fct polynomiale)

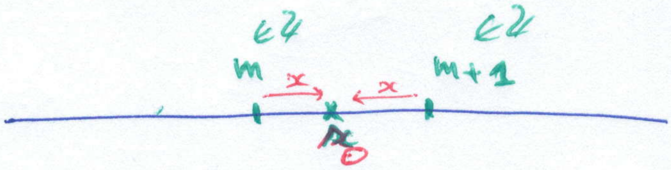
en 0 f est continue SSi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

et donc SSi $\boxed{a = 0}$

D'où f est cont sur $\mathbb{R}$ pour $\boxed{a = 0}$

Exo6 = Continuité de $x \longmapsto f(x) = [x]$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.



* Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

alors $\exists\, m = [x_0] \in \mathbb{Z}$: $m < x_0 < m+1$

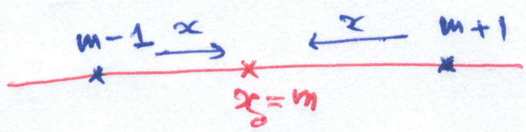
D'où $\boxed{f(x_0) = [x_0] = m}$ et on a $\boxed{f(x) = [x] = m}$, $\forall x \in [m, m+1[$

lorsque $x \longrightarrow x_0$, on peut supposer que $m \leq x < m+1$

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [x] = \lim\limits_{x \to x_0} m = \boxed{m}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$ $\boxed{\text{D'où } f \text{ est continue en } x_0}$

* Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, alors ~~∃m~~ $\boxed{[x_0] = x_0 = f(x_0)}$



- Lorsque $x \xrightarrow{<} x_0$ $(m-1 < x < m)$

  Alors $f(x) = [x] = m-1 \longrightarrow m-1$

- Lorsque $x \xrightarrow{>} x_0$ $(m < x < m+1)$

  $f(x) = [x] = m \longrightarrow m$

Donc $\lim f(x)$ n'existe pas et $\boxed{f \text{ n'est pas cont en } x_0}$

Ex 07 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cont, $f \equiv 0$ sur $\mathbb{Q}$

Montrons que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{Q} : x_n \longrightarrow x$

(Il suffit de choisir $x_n = \dfrac{[nx]}{n} \longrightarrow x$)

Comme f est continue alors $f(x) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{f(x_n)}_{0} = 0$

Ex 08 = 1) On applique T.V.I sur $x \mapsto f(x) - x$.

On a $\begin{cases} f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0 & (\text{car } f(0) \in [0,1]) \\ f(1) - 1 \leqslant 0 & (\text{car } f(1) \in [0,1]) \end{cases}$

D'où d'après Théo des valeurs intermedaire, $\exists c \in [0,1]$ tq : $f(c) - c = 0$. Donc $f(c) = c$. D'où f admet un point fixe.

2) On applique T.V.I généralisé $\left(\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \leq 0 \\ \Rightarrow \exists c : f(c) = 0 \end{array} \right)$

On a $\begin{cases} x \longmapsto f \text{ est décroissant} \\ x \longmapsto x \text{ " strict "} \end{cases}$, D'où $x \longmapsto f(x) - x$ est strict décroissant

et on a $\forall x > 0 : f(x) - x \leqslant f(0) - x \xrightarrow{x\to+\infty} -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\infty$

et on a $\forall x < 0 : f(x) - x \geqslant f(0) - x \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = +\infty$

Donc $\exists c \in \mathbb{R} : f(c) - c = 0$, i.e. : $f(c) = c$

et d'après la décroissance, on a l'unicité.

EX09 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont et periodique.

f est periodique si $\exists T > 0 : f(x) = f(x+T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1) On pose $l = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x + nT), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'où $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(\underbrace{x+nT}_{y_n}) = \lim_{y_n \to +\infty} f(y_n) = l$

Donc $\boxed{f \equiv l}$

2) Comme $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$ sont periodiques et ne sont pas const alors $\lim_{x \to +\infty} \cos x$, $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existent pas.

et on a $\lim_{x \to -\infty} \cos x = \lim_{x \to -\infty} \cos(-x) = \lim_{y \to +\infty} \cos y$ n'existe pas

$\lim_{x \to -\infty} \sin x = \lim_{x \to -\infty} -\sin(-x) = -\lim_{y \to +\infty} \sin y$ n'existe pas.

Ex10 :

EX11 :

1) * $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = (\ln(1+x))'_{/0} = \frac{1}{1+0} = 1$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^x)'_{/0} = e^0 = 1$

2) * $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{k}{x})^x = \lim_{x \to +\infty} \exp(x \ln(1 + \frac{k}{x})) = \cancel{\lim e^{\frac{k}{x}}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \exp\left(k \frac{\ln(1 + \overset{t}{\frac{k}{x}})}{\underset{t}{\frac{k}{x}}}\right) = \lim_{t \to 0} \exp\left(k \frac{\ln(1+t)}{t}\right) = e^k$$

* $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim \frac{e^{x\ln a} - e^{x \ln b}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x\ln a} - 1}{x} - \frac{e^{x\ln b} - 1}{x} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{\overset{t}{x\ln a}} - 1}{\underset{t}{x \ln a}} \ln a - \frac{e^{x\ln b} - 1}{x \ln b} \ln b \right) = \boxed{\ln a - \ln b}$$

Exercice 12 : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

1) On a f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (c'est le produit et la composée des fct cont)

et on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{borné}} = 0$ (La limite existe et fini)

Donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

et on a $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2) Dérivabilité de $\tilde{f}$

Si $x \neq 0$ alors $\tilde{f} = f$ est dérivable en x et on a

$$\tilde{f}'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = \boxed{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}$$

Si $x = 0$, on ~~calcu~~ applique la déf :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

D'où $\tilde{f}$ est dérivable en $x = 0$ et on a $\tilde{f}'(0) = 0$

Donc $\tilde{f}'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3) $\tilde{f}$ est de classe C^1 si elle est dérivable et $\tilde{f}'$ est continue

Continuité de $\tilde{f}$: sur $\mathbb{R}^*$ $\tilde{f}'$ est continue

Pour $x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\underbrace{2x}_{\to 0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{bornée}} - \cos\frac{1}{x}\right)$

$$= -\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} = -\underbrace{\lim_{t\to+\infty} \cos t}_{\text{n'existe pas}}$$

or $\lim\limits_{t\to+\infty} \cos t \nexists$ (d'après Ex)

Donc $\tilde{f}'$ n'est pas continue en 0. D'où $\tilde{f}$ n'est pas de classe C^1.

Exercice 13

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1) Continuité de f :

On a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sur $\mathbb{R}^*$

~~Pour $x \in \mathbb{R}^*$~~, On a f est continue (c'est une fct fractionnaire)

Pour $x = 0$, On a $f(0) = 0$

et on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x}{1+x} = 0$

On a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$. D'ou f est cont en 0

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2) Dérivabilité de f

sur ~~f~~ $\mathbb{R}^*$, f est dérivable et on a

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Pour $x = 0$ On applique la déf

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{\frac{\cancel{x}}{1-x} - 0}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{\frac{x}{1+x}}{x} = 1$

Donc f est derivable en 0 et on a $\boxed{f'(0) = 1}$

3)

On a $f' > 0$. Donc f est croissante. Donc f est injective. Comme f est continue

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm 1$. Donc

alors f est surjective. D'où f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$

Ex 14 : $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

1) Montrons que f est dérivable.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq \dfrac{|x-x_0|^2}{|x-x_0|} = |x-x_0| \xrightarrow{x\to x_0} 0$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ existe et fini

Donc f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout x_0, et on a $f' = 0$

2) On a $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, D'où $f(x) = c^{te}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15 :

1) On applique TAF sur $x \longmapsto \ln(1+x)$ et sur $[0,x]$ et $[x,0]$

On a ~~*Si~~ $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$

* Si $x \in]-1,0]$ alors $\exists\, c \in]x,0[$ tq :

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = (x-0)\frac{1}{1+c}$$

Donc $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c}$

et on a $x < c < 0 \Rightarrow x+1 < c+1 < 1 \Rightarrow 1 < \dfrac{1}{1+c} < \dfrac{1}{1+x}$

$$\Longrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x \quad (x<0)$$

D'où $\boxed{\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c} < x}$

* Si $x > 0$, $\exists\, c \in 0, x$ tq

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

et on a $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x}{1+c} < x$

Donc $\boxed{\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x}$

* On applique TAF : Soit $x \in]0,1[$

• On a ~~$\forall x \in]0,1[$~~ : $x \mapsto e^x - 1 - x$ est cont sur $[0,x]$ et derivable sur $]0,x[$, d'où $\exists\, c \in]0,x[$ tq :

$$(e^x - 1 - x) - \underbrace{(e^0 - 1 - 0)}_{=0} = (x-0)\underbrace{(e^c - 1)}_{\geq 0} \geq 0$$

D'où $e^x - 1 - x \geq 0$ et donc $\boxed{e^x \geq 1+x}$ --- (1)

• Et On a : $x \mapsto (1-x)e^x - 1$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ d'où $\exists\, c \in]0,x[$ tq : $(1-x)e^x - 1 - 0 = (x-0)(-c e^c) \leq 0$

D'où $(1-x)e^x \leq 1$ et donc $\boxed{e^x \leq \frac{1}{1-x}}$ --- (2)

de (1) et (2) On en déduit l'inégalité.

Exercice 16 : On applique la formule de Liebnitz :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

* $$\left((x^2+x+1)e^x\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2+x+1)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$$

On a $(e^x)^{(n-k)} = e^x$, $\forall k$ et $(x^2+x+1)^{(k)} = 0$, $\forall k \geq 3$.

D'où : $$\left((x^2+x+1)e^x\right)^{(n)} = C_n^0 (x^2+x+1)^{(0)} e^x + C_n^1 (x^2+x+1)' e^x + C_n^2 (x^2+x+1)'' e^x$$

$$= e^x\left(1(x^2+x+1) + n(2x+1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2\right)$$

$$= \left(\boxed{??}\, x^2 + \boxed{??}\, x + \boxed{??}\right) e^x$$

* On a $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \left((1-x)^{-1}\right)^{(k)} = k!\,(1-x)^{-1-k}$

Donc $\left(\frac{e^x}{1-x}\right)^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k!\,(1-x)^{-1-k}$, $\left(\frac{e^{-x}}{1+x}\right)^{(n)} \underset{\text{Composition}}{\overset{\text{Par}}{=}} (-1)^n e^{-x} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, k!\,(1+x)^{-1-k}$