Université de M'sila
Faculté MI
Département de Math.
Master EDP, (M1)

Analyse fonctionnelle pour EDP

Examen Final

2021/2022

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Veuillez justifier vos réponses

---

Exercice 1. Soit $E = \ell_\infty$ où

$$\ell_\infty = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \text{ tel que } \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n| < \infty \right\}.$$

Soit $T : E \to E$ un opérateur définie par $T\mathbf{x} = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$.

a) Vérifier que T est linéaire et continue.

b) Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}$.

Dans la suite H est un espace de Hilbert.

Exercice 2. Soit A et $B : H \to H$ deux opérateurs linéaires continues dans H. On suppose que A est compact.

a) Est-ce-que $B + A$ est nécessairement compact ?

b) Démontrer que AB est compact (AB est la composition de A et B).

c) Est-ce-que BA est aussi compact?

d) Rappeler la définition de A^* (l'adjoint de A).

e) Calculer l'adjoint de $A + A^*$.

f) Démontrer que $\|AA^*\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H,H)}$. (On pourra démontrer $\leq$ et $\geq$).

Exercice 3. Les question suivantes sont indépendantes.

a) Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup \tilde{x}$ (faiblement dans H). Démontrer qu'on a $x = \tilde{x}$.

b) Démontrer que

$$x_n \to x \text{ (fortement dans } H) \iff \left(x_n \rightharpoonup x \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_H = \|x\|_H \right)$$

(On pourra démontrer $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$).

c) Est-ce-que on peut remplacer $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_H = \|x\|_H$ par $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_H \leq \|x\|_H$ dans la question précédente.

d) Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et on définie $s_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Démontrer qu'on a $S_n \rightharpoonup x$.

On rappel que pour toute suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de H:

$$z_n \rightharpoonup z \iff (z_n, h)_H \to (z, h)_H, \forall h \in H.$$

$$T \text{ est un opérateur compact } \iff (z_n \rightharpoonup z \Longrightarrow Tz_n \to Tz).$$

2021/2022

Functional Analysis for PDE
solution of the final Exam.

Exercise ① $E = \ell_\infty$, $\|x\|_\infty = \sup_{1\le j} |x_j|$, $x = (x_1, x_2, \dots)$

$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. $\|Tx\|_\infty = \sup_{2\le j} |x_j| \le \sup_{1\le j} |x_j| = \|x\|_\infty$

clearly we have $\|T\|_\infty \le 1$.

Is it equal to $M = 1$?, It suffices to take $x_1 = (1, 1, 1, \dots)$

$$\|Tx_1\|_\infty = 1 = \|x_1\|_\infty \Rightarrow \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} = 1.$$

Exercise ②, H is a Hilbert, $A, B : H \to H$ linear and continuous, A is compact

a) Since B is not assumed compact, we do not have necessarily $A+B$ compact,

take a sequence $(x_n)_{n\ge 1} \subset H$, such that $x_n \rightharpoonup x$ and $Bx_n \not\to Bx$

Then, even we have $Ax_n \to Ax$ (since A is compact) But

$$(A+B)(x_n) \not\to (A+B)(x).$$

b) A is compact. then if $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ we have $Bx_n \rightharpoonup Bx$ since B is linear and continuous. (Bx_n) is a sequence in H weakly converging. since A is compact $\Rightarrow$ $A(Bx_n) \to A(Bx)$

i.e. $\boxed{(AB)x_n \to (AB)x}$. This means that AB is compact.

c) Yes. BA is compact, Take $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$, then $Ax_n \to Ax$ (since A is compact)

and since B is continuous, then $B(Ax_n) \to B(Ax_n)$

i.e. $\boxed{(BA)x_n \to (BA)x}$. This means that BA is also compact.

d) $A : H \to H$, $A \in \mathcal{L}(H,H)$, Then $\exists\, A^* : H \to H$, defined by

$$(Ax, y)_H = (x, A^*y)_H, \quad \forall x, y \in H.$$

e) $A + A^* \in \mathcal{L}(H, H)$. $((A+A^*)x, y)_H = (Ax, y)_H + (A^*x, y)_H$

since the scalar product is symetric $\Rightarrow$ $(A^*x, y)_H = (y, A^*x)_H$

the $((A+A^*)x, y) = (x, A^*y)_H + (Ay, x)$

$= (x, (A^* + A)y)_H$, $\forall x, y \in H$.

this means that $\boxed{(A+A^*)^* = A + A^*.}$

f) To show that $\|AA^*\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H,H)}$, recall that:

$\boxed{\|AA^*\| \leq \|A\| . \|A^*\| = \|A\|^2}$, since $\|A\| = \|A^*\|$ (proposition 1.4.3 in the course)

To prove the other inequality, we note that

$\|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_H \Rightarrow \|A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2_H$

By Cauchy-Schwarz inequality

$\|Ax\|^2 = |(Ax, Ax)_H| = |(A^*Ax, x)_H|$ (by definition of the adjoint A^*)

$\leq \|A^*A\cancel{x}\|_H \|x\|_H$

$\leq \|A^*A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \|x\|^2_H$

$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 = \boxed{\|A\|^2_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \|A^*A\|_{\mathcal{L}(H,H)}}$

This means that $\|A^*A\|_{\mathcal{L}(H,H)} = \|A\|^2$.

Exercice (3)

a) if $x_n \rightharpoonup x$ and $x_n \rightharpoonup \tilde{x}$, then $(x_n - x, h)_H \to 0$, $\forall h \in H$

$(x_n - \tilde{x}, h)_H \to 0$, $\forall h \in H$

substructing, we obtain, $\forall h \in H$

$0 \leq |(\tilde{x} - x, h)| \leq |(x_n - x + \tilde{x} - x_n, h)| \leq |(x_n - x, h)| + |(x_n - \tilde{x}, h)| \to 0$

$\Rightarrow (\tilde{x} - x, h)_H = 0$, $\forall h \in H$. We can choose $h = \tilde{x} - x \in H$

the $(x_n - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \tilde{x} = x$.

b) If $x_n \to x$ Then $\|x_n - x\|_H \to 0$ and we have

$$0 \leqslant |(x_n - x, h)_H| \leqslant \|x_n - x\|_H \|h\|_H \to 0. \text{ (by Cauchy-Schwarz)}$$

$$\Rightarrow (x_n - x, h)_H \to 0 \Rightarrow x_n \rightharpoonup x \text{ in } H.$$

If ($x_n \rightharpoonup x$ and $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$), then

$$\|x_n - x\|_H^2 = (x_n - x, x_n - x)_H = \|x_n\|^2 - 2(x_n, x)_H + \|x\|_H^2 \quad (*)$$

we can pass to the limit.

$$\|x_n - x\|_H^2 \to \|x\|^2 - 2(x, x)_H + \|x\|_H^2 = 2\|x\|_H^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

thus $x_n \to x$ in H.

c) Yes, we ~~can~~ have $\left(x_n \rightharpoonup x \text{ and } \limsup\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|\right) \Rightarrow x_n \to x$ in H.

Indeed, passing to the limit in $(*)$, we have

$$0 \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_H^2 = \limsup_{n \to +\infty} \|x_n\|_H^2 - 2 \limsup_{n \to +\infty} (x_n, x)_H - \|x\|_H^2$$

(by assumptions) $\leqslant \|x\|_H^2 - 2 \lim (x_n, x) - \|x\|^2$

$\leqslant 2\|x\|^2 - 2(x, x) = 0$

(we recall that if the limit exists then lim sup = lim = lim inf)

we have obtained

$$0 \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|x_n - x\| \leqslant \limsup_{n \to \infty} \|x_n - x\| \leqslant 0$$

then $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$ and $x_n \to x$ in H.

d) ☺.