1

## Relations binaires sur un ensemble

## 1.1 Généralités sur les relations binaires

Soient $E$, $F$ deux ensembles

**Définition 1.1.** Une relation binaire noté :$\mathcal{R}$ d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$ est toute assertion reliant un élément de $E$ à un élément de $F$ pouvant être vérifiée ou non.

**Notation 1.1.** Nous mettons ce qui suit

- ✈ L'ensemble $E$ s'appelle l'ensemble de départ de $\mathcal{R}$.
- ✈ L'ensemble $F$ s'appelle l'ensemble de d'arrivée de $\mathcal{R}$.

### 1.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

– **Réflexivité** : On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

– **Symétrie** : On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y = y\mathcal{R}x.$$

– **Transitivité** : On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si :

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

– **Anti-symétrie** : On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \ \Rightarrow \ x = y.$$

### 1.1.2 Relation d'équivalence

**Définition 1.2.** Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathcal{R}$ est :

1. réflexive,
2. symétrique,
3. transitive.

**Exemple 1.1.** Soit la relation suivante :

☞ $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$, est une relation d'équivalence.

en effet :

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ x = x \ \Leftrightarrow \ x\mathcal{R}x \ \Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x = y \ \Leftrightarrow \ y = x \Leftrightarrow \ y\mathcal{R}x \ \Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x = y) \wedge (y = z) \Leftrightarrow \ x = z \Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

#### 1.1.2.1 Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$.

**Définition 1.3.** La classe d'équivalence d'un élément $x$, noté : $\overline{x}$,$\dot{x}$,$C_x$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont en relation avec $x$. Autrement dit

$$\dot{x} = \left\{ y \in E : y\mathcal{R}\dot{x} \right\}.$$

**Remarque 1.1.** L'ensemble des classes d'équivalence n'est jamais vide.

#### 1.1.2.2 Ensemble quotient

Soit $E$ un ensemble munit d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

**Définition 1.4.** L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de $E$. On le note $E_{/\mathcal{R}}$, et on a :

$$E_{/\mathcal{R}} = \left\{ \left\{ \dot{x} \right\}, x \in E \right\}$$

**Exemple 1.2.** D'après l'exemple précédent (1.1), on a la classe d'équivalence $x = a \in \mathcal{R}$ comme,

$$\dot{x} = \dot{a} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}a\}.$$

Nous avons,

$$x\mathcal{R}a \Leftrightarrow x = a,$$

alors,

$$\dot{a} = \{a,\ a \in \mathbb{R}\},$$

et l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$ est donné par :

$$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}} = \{\{a\}, a \in \mathbb{R}\}$$

### 1.1.3 Relation d'ordre

**Définition 1.5.** Une relation est dite relation d'ordre si elle est :

1. réflexive,
2. anti-symétrique,
3. transitive.

**Exemple 1.3.** Soit la relation suivante,

☞ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$, est une relation d'ordre.

En effet :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x \ \Leftrightarrow\ x\mathcal{R}x \ \Leftrightarrow\ \mathcal{R}$ est réflexive.
2. $\forall x, y \in \mathbb{N},\ (x \leq y) \wedge (x \leq y) \Leftrightarrow\ x = y \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est antisymétrique.

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow\ x \leq z \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est transitive.

Donc, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

**Proposition 1.1.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble $E$.*

☞ *On dit que $\mathcal{R}$ est d'ordre total si :*

$$\forall x, y \in E; x\mathcal{R}y\ \vee\ y\mathcal{R}x.$$

☞ *On dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :*

$$\exists x, y \in E; x\ \not\mathcal{R}y\ \wedge\ y\ \not\mathcal{R}x.$$

**Exemple 1.4.** D'après l'exemple (1.3), on a la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, car :

- $x\mathcal{R}y$ est une relation d'ordre.
- ou
- $y\mathcal{R}x$ est une relation d'ordre.

Donc, n'est pas une relation d'ordre partiel.