

Les suites réelles

✓ 01

I - Généralités :

Définition : Soit $S \subset \mathbb{N}$ un ensemble infini.

* Une ^{suite} réelle est une application : $S \longrightarrow \mathbb{R}$
 $n \longmapsto u_n = (f(n))$

et elle est notée par $(u_n)_{n \in S}$

* le terme u_n s'appelle **terme générale** de la suite $(u_n)_n$

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante)

Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n > 0$)

2) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante)

Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \leq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n < 0$)

3) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone (resp. strictement monotone)

Si elle est croissante ou décroissante (resp. strict croissant ou strict

4) On dit que (u_n) est constante si : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = a$, où $a \in \mathbb{R}$. décroissant

Remarque : i) Si $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ alors

1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante SSI $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante SSI $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

ii) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

102

Exemple : Etudier la monotonie des suites (u_n)

définies par : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$, $w_n = \frac{2n-1}{n+1}$

$$t_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{N}^*)$$

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$$

(Autrement dit : si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré)

2) On dit que (u_n) est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$$

(Autrement dit : si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré)

3) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée s'elle est majorée

et minorée c-à-d : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$

Remarque

1) Si la suite (u_n) est croissante alors elle est minorée.

2) Si la suite (u_n) est décroissante alors elle est majorée.

Exemple : Montrer que les suites suivantes sont bornées

$$u_n = (-1)^n, \quad v_n = \sin n, \quad w_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3}$$

Exemples.

1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = u_0 + nr$ où $r \in \mathbb{R}$, s'appelle suite arithmétique et r s'appelle la raison de $(u_n)_n$

2) La suite (u_n) définie par $u_n = u_0 r^n$ s'appelle suite géométrique de raison r

3) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, $a \neq 1$ s'appelle série géométrique. et on a

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

(Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$)

Exercice : * Étudier la monotonie des suites arithmétiques et géométriques de raison $a \in \mathbb{R}$ et de premier terme 1.

* Pour quelles valeurs de a , elles sont bornées.

II - Convergence

104

Définition : On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$(\text{ou } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

On dit, dans ce cas, que $(u_n)_n$ converge vers la limite l

et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou $u_n \rightarrow l$ qd $n \rightarrow +\infty$

* Si la suite

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente s'elle n'est pas convergente

Définition :

1) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$\text{si } \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n > A$$

2) On dit que (u_n) a pour limite $-\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$\text{si } \forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n < B \quad (\text{ou si } \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty)$$

Exemple 1 : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $(u_n)_n$ n'est pas convergente

En effet, on a $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n \geq A$

Soit $l \in \mathbb{R}$. Pour $A = |l| + 1$, on a $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n \geq |l| + 1$

$$\text{d'où } \forall n \geq N : |u_n - l| \geq |u_n| - |l| = u_n - |l| \geq 1$$

Donc Pour $\varepsilon < 1$, on a $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n = \max\{N, N'\} : |u_n - l| > \varepsilon$

105

Exemple 02: Montrer que la suite constante est convergente

Soit $(u_n)_n$ une suite constante. Donc $\exists a \in \mathbb{R} : u_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\forall n \geq 0 : |u_n - a| = 0 < \varepsilon$

Donc (u_n) converge vers a et $\lim u_n = a$

Exemple 03 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ défini par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Pour $N = \underbrace{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1}_{> \frac{1}{\varepsilon}}$, on a $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$

Proposition (unicité de la limite)

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors elle admet une limite unique

Preuve: ~~A~~ Supposons qu'il existe deux limites l et l' avec $l, l' \in \mathbb{R}$ (si non elle n'est pas convergente d'après Ex 01)

D'où $\forall \varepsilon > 0$, $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N' : |u_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Donc Pour $N_0 = \max\{N, N'\}$, on a $\forall n \geq N_0 : |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où $|l - l'| \leq |l - u_n| + |l' - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a donc $\forall \varepsilon > 0 : |l - l'| \leq \varepsilon$ ($\Rightarrow |l - l'| = 0 \Rightarrow l = l'$)
Si $l \neq l'$ alors pour $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2} > 0$, on a $|l - l'| < \frac{1}{2}|l - l'|$ (contradiction)

Donc $l = l'$

Proposition :

106

Toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq \varepsilon \quad (l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon)$$

D'où pour $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq 1$

D'où $\forall n \geq N : |u_n| \leq |l| + 1$

On choisit $M = \max \{ |l| + 1, |u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}| \} < \infty$

Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M}$ Donc $(u_n)_n$ est bornée.

Exemple : La suite de terme générale $u_n = \left(\frac{(-1)^n + 1}{2} \right) n$, n'est pas bornée. Donc elle est divergente.

(Car $\forall M > 0, \exists n = 2([M] + 1) : u_n = [M] + 1 > M$)

* La suite de terme générale $u_n = (-1)^n$ est bornée mais divergente.

On a $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1$

et ~~on a~~ pour tout $l \in \mathbb{R}$, on choisit

$$\varepsilon = \max \{ |1 - l|, |-1 - l| \} > 0$$

D'où $\forall N \in \mathbb{N}$, on a $2N, 2N+1 \geq N$ et
$$\begin{cases} |u_{2N} - l| = |1 - l| > \varepsilon \\ \text{ou} \\ |u_{2N+1} - l| = |-1 - l| > \varepsilon \end{cases}$$

Proposition (Opérations sur les suites)

[07]

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites ~~convergentes~~ réelles
vers l et $l', l' \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$1) \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \implies |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |l|$$

$$2) \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$3) \quad \begin{cases} u_n \longrightarrow l \\ v_n \longrightarrow l' \end{cases} \implies u_n + v_n \longrightarrow l + l'$$

$$4) \quad u_n \longrightarrow l \implies (\lambda u_n \longrightarrow \lambda l, \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$5) \quad \begin{cases} u_n \longrightarrow 0 \\ (v_n) \text{ bornée} \end{cases} \implies u_n v_n \longrightarrow 0$$

$$6) \quad \begin{cases} u_n \longrightarrow l \\ v_n \longrightarrow l' \end{cases} \implies u_n v_n \longrightarrow ll'$$

$$7) \quad \begin{cases} u_n \longrightarrow l \\ v_n \longrightarrow l' \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \geq N} \text{ est définie à partir d'un certain rang } N \\ \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow \frac{l}{l'} \end{cases}$$

Preuve :

1) Supposons que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Donc, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Comme $||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$(*) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \left| |u_n| - |l| \right| \leq |u_n - l| \leq \varepsilon$$

d'où $|u_n| \longrightarrow |l|$

3) On a

$$\begin{cases} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l' \end{cases}$$



$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 : |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n \geq N : \begin{cases} |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l + l'}$$

6) Supposons que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$. Alors

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : |u_n - l| < \varepsilon \quad \text{--- ①} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 : |v_n - l'| < \varepsilon \quad \text{--- ②} \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|u_n v_n - l l'| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - l l'| = |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \leq |u_n - l| |v_n| + |l| |v_n - l'| \quad \text{--- ③}$$

Comme $(v_n)_n$ est convergente, alors elle est bornée, c-à-d

$$\boxed{\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |v_n| \leq M}$$

Donc (si $l \neq 0$)

Pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{2M}$, ① $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{2|l|}$, ② $\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 : |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|l|}$

Où $\exists N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n \geq N : |u_n v_n - l l'| \stackrel{③}{\leq} \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |l| \frac{\varepsilon}{2|l|} = \varepsilon$

Donc $u_n v_n \rightarrow l l'$. Si $l = 0$, on a ③ $\Rightarrow |u_n v_n - l l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

III - Critères de Convergence :

109

Théorème (d'encadrement)

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow l, w_n \longrightarrow l \\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$$

Alors (v_n) converge vers l .

Proposition : Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ 2 suites réelles. On a

$$1) \begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: u_n \leq v_n \end{cases} \implies v_n \longrightarrow +\infty$$

$$2) \begin{cases} u_n \longrightarrow -\infty \\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: v_n \leq u_n \end{cases} \implies v_n \longrightarrow -\infty$$

Preuve : ~~1) Soit $A > 0$~~ . Si $u_n \longrightarrow +\infty$ alors

$$\forall A > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1: u_n > A$$

$$\text{D'où } \forall A > 0, \exists N = \max\{N_0, N_1\}, \forall n \geq N: \begin{cases} u_n \geq A \\ v_n \leq u_n \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall n \geq N: v_n \geq A \text{ et donc } \boxed{v_n \longrightarrow +\infty}$$

Théorème :

- 1) Toute suite croissante et majorée est convergente (vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$)
- 2) Toute suite décroissante et minorée " " (vers $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$)

3) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

4) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Preuve:

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée.

alors $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} \geq u_n$.

On note par $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

D'après la caractérisation de sup, on a

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \alpha - \varepsilon < u_N \end{cases} \quad \text{--- (*)}$$

Comme (u_n) est croissante, alors $\forall n \geq N: u_N \leq u_n$

D'où (*) $\Rightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}: u_n - \alpha \leq 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: \alpha - \varepsilon < u_n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: |u_n - \alpha| = \alpha - u_n < \varepsilon$

D'où $\boxed{u_n \longrightarrow \alpha}$

4) Supposons que (u_n) est décroissant et non minorée.

(u_n) est non minorée $\Leftrightarrow \forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}: u_N \leq B$

(u_n) est décroissant $\Rightarrow \forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: u_n \leq u_N \leq B$

D'où $\boxed{u_n \longrightarrow -\infty}$

Théorème (suite adjacentes)

11

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes : c.-à-d.

$$\begin{cases} (u_n)_n \text{ est croissante, } (v_n)_n \text{ est décroissante,} \\ u_n - v_n \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Alors les deux suites sont convergentes vers la même limite :

IV - Suites extraites (sous suites)

Definition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application croissante.

La suite $(v_n)_n$ défini par $v_n = u_{\varphi(n)}$, s'appelle suite extraite de $(u_n)_n$

Exemple : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ sont

des suites extraites de $(u_n)_n$

Proposition : Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ est aussi convergente vers l ,

Ex : Démontrer que la suite (u_n) définie par

• $u_n = (-1)^n$, n'est pas Convergente.

• Même question pour $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

Proposition : $(u_n)_n$ est Convergente SSI les deux suites extraites

$(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$ sont Convergente vers la même limite.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\left\{ \begin{array}{l} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_1 : |u_{2k} - l| \leq \varepsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_2 : |u_{2k+1} - l| \leq \varepsilon \end{array} \right.$

Pour $N = 2 \max\{N_1, N_2\} + 1$, On a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

• Si n est paire, alors $\exists k \in \mathbb{N}; n = 2k$. D'où

$$n \geq N \Rightarrow k \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2k} - l| \leq \varepsilon$$

• Si n est impaire alors $\exists k \in \mathbb{N}; n = 2k+1$. D'où

$$n \geq N \Rightarrow k \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2k+1} - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{D'où } \boxed{u_n \longrightarrow l}$$

Théorème (de Bolzano - Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous suite Convergente.

V - Suites de Cauchy :

(13)

Def : On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

$$\left(\text{a.a.d. : } u_p - u_q \longrightarrow 0 \text{ qd } p, q \longrightarrow +\infty \text{ au m\^eme temps} \right)$$

ensembles

Ex : Montrer que la suite (u_n) est de Cauchy :

$$* u_n = \frac{1}{2^n}, \quad * u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Proposition : Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $p, q \in \mathbb{N}$, avec $q > p$.

Supposons que :

~~Comme~~ $(u_n)_n$ est convergente alors $\exists l \in \mathbb{R}$ tq :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{D'o\^u } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq N \Rightarrow \begin{cases} |u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \varepsilon$$

D'o\^u (u_n) est de Cauchy.

Concernant le contraire, on a le r\^esultat suivant

Proposition : Toute suite de Cauchy est convergente.

On dit alors que $\mathbb{R}$ est un espace Complet.

Pour la preuve On a besoin de résultat suivant, 14

Prop: Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve = On a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}: q > p \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

D'où $\forall q > N: |u_q - u_N| \leq \varepsilon$ et donc $|u_q| \leq |u_N| + \varepsilon$

D'où $\forall q \in \mathbb{N}: |u_q| \leq \max\{|u_N| + \varepsilon, |u_0|, \dots, |u_N|\}$

D'où $(u_n)_n$ est borné

Preuve (de Prop précédente): Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy

Comme (u_n) est bornée, alors d'après th de Bolzano-Weierstrass

$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante et la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente (vers $l \in \mathbb{R}$).

D'où $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1: |u_{\varphi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ --- (1)

et on a (u_n) est de Cauchy, alors:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_2: |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ --- (2)

Comme $\varphi(n)$ est croissante alors $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où

$\exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_3: \varphi(n) \geq N_2$ --- (3)

D'où $\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, on a

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$