Les fonctions (dans $\mathbb{R}$)

I - Généralités

Définition : Soient E et F deux ensembles ~~de $\mathbb{R}$~~.

Une fonction f est une relation entre E et F telle que :

Chaque élément x de E a une relation au plus avec un element y de F

- L'ensemble E s'appelle ensemble de depart et F s'appelle ensemble d'arrivée

et on ecrit : $f : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto y = f(x)$

- x est l'antécédent et $y = f(x)$ est l'image de x

- L'ensemble $D_f \overset{déf}{=} \{x \in E \,/\, f(x) \text{ existe}\}$ est le domaine de déf de f.

Exemple : 1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^2 - 1$

f est une fonction car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ existe et unique

et on a $D_f = \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f(x)$, où $y^2 = x$

f n'est pas une fonction car pour $x = 1$, on a ~~l'image~~ deux image $y = 1$ ou $y = -1$

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; f est une fonction car $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (si il existe) et unique

et on a $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{1}{x^2-1} \text{ existe}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \ln(x^2 - 4)$

f est une fonction (pour la même raison)

et on a $D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \ln(x^2-4) \text{ existe}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 - 4 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Définition (sens de variation) : Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $I = D_f$ sa domaine de définition. Alors, on dit que f est :

1) Croissante si : $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

2) décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x)$

3) Monotône si elle est croissante ou décroissante.

4) Constante si $\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$ (ou $\exists a \in \mathbb{R}, f(x) = a, \forall x \in I$)

Définition : (Extrémum). Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $I = D_f$

1) On dit que f admet un maximum si $\exists a \in I, \forall x \in I : f(x) \leq f(a)$
et on note $f(a) = \max\limits_I f$.

2) On dit que f admet un minimum si $\exists b \in I, \forall x \in I : f(x) \geq f(b)$
et on note $f(b) = \min\limits_I f$

3) On dit que f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) \leq M$

4) " " " " , minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) \geq m$

5) On note $\sup\limits_I f \overset{\text{déf}}{=} \sup\{f(x) \;/ x \in I\}$, $\inf\limits_I f \overset{\text{déf}}{=} \inf\{f(x) / x \in I\}$

Définition (Fonctions utiles). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

On dit que f est

1) paire si $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$

2) impaire $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$

3) périodique $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$

Exemples : Montrer que la fonction défini par $f(x) = tg\,x$

est impaire et périodique : $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ existe}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / \cos x \neq 0\}$

$= \boxed{\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}}$

On a ~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~ : $tg(-x)$

On a $\forall x \in D_f : tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg\,x$

Donc tg est impaire.

et on a $tg(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\,x$

D'où tg est périodique

(N.B. $T = \pi$ est aussi période de tg car

$tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = tg(x)$)