جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Cours de

Méthodes mathématiques appliquées à la physique

3eme Année Licence Physique Théorique

Nadjib BAADJI

Méthodes mathématiques pour la physique

Nadjib Baadji

06/11/2014

Contents

Chapter 1

La Méthode de Frobenius

Plusieurs des fonctions spéciales et des polynômes orthogonaux résultent souvent des solutions des équations différentielles de la forme :

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = \phi(x) \tag{1.1}$$

Si $P(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ sauf peut être en quelques points, on peut récrire l'équation précédente comme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = \varphi(x)$$

où $q(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $r(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)}$ et $\varphi(x) = \dfrac{\phi(x)}{P(x)}$

Si $\phi(x) = \varphi(x) = 0$ l'équation différentielle 1.1 est dite *homogène*. On se limite dans ce cours aux équation différentielles et homogènes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0 \tag{1.2}$$

Si $q(x)$ et $r(x)$ sont analytiques[1] en x_0, le point x_0 est dit un point *ordinaire* sinon le point x_0 est dit *singulier*. Le point x_0 est dit un point singulier *régulier* si $f(x) = (x - x_0)q(x)$ et $g(x) = (x - x_0)^2 r(x)$ sont des fonctions analytiques en x_0.

[1]La fonction $f(x)$ est *analytique* en point x_0 si le développement de taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

en x_0 converge au voisinage de ce point.

1.1 Points ordinaires

Si $x = 0$ est un point ordinaire de l'équation 1.2, donc la solution générale dans un intervale contenant $x = 0$ est donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{1.3}$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux fonctions analytiques en $x = 0$ et linéairement indépendantes.

Pour calculer les coefficients a_n on doit écrire les fonction $q(x)$ et $r(x)$ comme

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

en calculant $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

en remplaçant dans equ.1.2

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + (q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots) + \\ (r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = 0 \end{aligned}$$

on regroupant les coefficients de même puissance aura

$$\begin{aligned} 2a_2 + q_0a_1 + r_0a_0 &= 0 \\ 6a_3 + 2q_0a_2 + q_1a_1 + r_0a_1 + r_1a_0 &= 0 \\ &\vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{m=1}^{n+1} m a_m q_{n-m+1} + \sum_{m=0}^{n} a_m r_{n-m} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations pemettent de calculer les coefficients a_n et donc la solution $y(x)$. Il faut aussi que $y(x)$ vérifier certaines conditions initiales.

1.2 Point singulier régulier

Si l'origine $x = 0$ est un point singulier régulier on peut récrire l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + xq(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0 \tag{1.4}$$

cette fois les deux fonctions $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions analytiques au point $x = 0$.

Théorème: Si l'origine $x = 0$ est un point singulier régulier, la solution de l'équation.1.4 est donnée par :

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.5}$$

où λ est un nombre réel et $a_0 \neq 0$. Cette solution est valable dans un interval $]0, R[$ pour R un nombre réel positif.

Pour calculer les coefficients a_n et λ on procéde de la même manière de la section précédente. On calcule la première et la deuxième dérivée de y(x) de l'éxpression 1.5

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-2}$$

en remplaçant dans l'equ.1.4 on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left[(\lambda+n)a_n q_m + a_n r_m\right] x^{n+m} = 0$$

où bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda-1)(n+\lambda)a_n + \sum_{m=0}^{n} (\lambda+m)a_m q_{n-m} + a_m r_{n-m}\right] x^n = 0 \tag{1.6}$$

Pour que l'équation1.6 soit satisfaite pour tout x, il faut que

$$(n+\lambda-1)(n+\lambda)a_n + \sum_{m=0}^{n} (\lambda+m)a_m q_{n-m} + a_m r_{n-m} = 0 \quad \forall n \geq 0 \tag{1.7}$$

pour $n = 0$ on obtient

$$\left[\lambda^2 + (q_0 - 1)\lambda + r_0\right] a_0 = 0$$

Pour que $a_0 \neq 0$ il faut que

$$\lambda^2 + (q_0 - 1)\lambda + r_0 = 0 \tag{1.8}$$

cette équation est dite *"équation indiciale"*. Elle permet de calculer les valeurs possibles de λ. Dans le cas général, cette équation admet deux solutions λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2$), *qu'on suppose réelles*[2] La méthode de Frobenius donne toujours, au moins, une solution de la forme

$$z(x, \lambda) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n \tag{1.9}$$

Ici on a écrit explicitement $a(\lambda)$ pour indiquer que les coefficients a_n dependent de la valeur de λ. Les deux solutions dépendront de la nature de la différence $\lambda_1 - \lambda_2$.

Dans le cas où les solutions de l'équation indiciale sont réels, on distingue trois possibilités :

- **Premier cas** : $\lambda_1 - \lambda_2$ n'est pas un entier donc

  $$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^n = z(x, \lambda_1) \tag{1.10}$$

  et

  $$y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^n = z(x, \lambda_2) \tag{1.11}$$

  et la solution générale s'écrit

  $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

  les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales.

[2] On peut toujours récrire la solution comme la somme de deux fonctions réelles, dans le cas où les solutions sont complexes, en utilisant les relations d'Euler et l'idendité

$$x^{a \pm \imath b} = x^a e^{\pm \imath b \ln x}$$

.

- **Deuxième cas** $\lambda_1 = \lambda_2$ la deuxième solution est donnée par

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)x^n = z(x, \lambda_1) \tag{1.12}$$

et

$$y_2(x) = \frac{z(x,\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_1} \tag{1.13}$$

et de même la solution générale $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

- **Troisième cas** $\lambda_1 - \lambda_2 = N > 0$ où N est un entier et si l'un des termes a_n (a_r par exemple) est infini, les deux indépendantes solutions sont

$$\begin{aligned} &[(\lambda - \lambda_2)\, z(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_2} \\ &\left[\frac{d}{d\lambda}\left\{(\lambda - \lambda_2)\, z(x, \lambda)\right\}\right]_{\lambda=\lambda_2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

- **Quatrième cas** $\lambda_1 - \lambda_2 = N > 0$ où N est un entier et si l'un des termes a_n (a_r par exemple) est indéterminé, les deux indépendantes solutions sont obtenues par $z(x, \lambda_2)$ laissons a_0 et a_r arbitraires.

1.3 Exemples

- **Exemple 1**

  Considérons l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

  Les coefficients dans cette équation $P(x) = 0$ et $Q(x) = 1$ sont analytiques en tous $x \in \mathbb{R}$ et donc la solution doit être de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

  la première et la deuxième dérivée sont

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

remplaçant dans l'équation différentielle on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1)a_n + a_{n-2}\right] x^{n-2} = 0$$

pour que cette équation soit vérifiée il faut que[3]

$$\left[n(n-1)a_n + a_{n-2}\right] = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

ou bien

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$

Les coefficient a_0 et a_1 sont indéterminés. Explicitement, on a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$$

et

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1$$

La solution est donc

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

et comme

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

et

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

on a donc

$$y(x) = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

- **Exemple 2**

Soit l'équation différentielle

$$2x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

On peut récrire cette équation sous la forme

[3] $a_n = 0 \quad \forall n < 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = 0$$

on donc ce cas $P(x) = \dfrac{1}{2x} = Q(x)$ ne sont pas analytiques au point $x = 0$. Cependant $xP(x)$ et $x^2Q(x)$ sont analytiques et l'équation peut être récrite sous la forme :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}x\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2}y = 0$$

cette équation est de type equ.1.4 avec $p(x) = 1/2$ et $q(x) = x/2$. Elle admet donc une solution de la forme

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la première et la deuxième dérivée sont

$$y'(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n-2}$$

en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient

$$x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda-\frac{1}{2})(n+\lambda)a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}\right] x^n = 0$$

or $(a_{-1} = 0)$

$$\left[(n+\lambda-\frac{1}{2})(n+\lambda)a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}\right] = 0 \quad \forall n \geq= 0 \tag{1.15}$$

pour $n = 0$ et $a_0 \neq 0$ on a

$$(\lambda - \frac{1}{2})\lambda = 0$$

Cette équation indiciale accepte deux solutions

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

l'équ.1.15 nous donne

$$a_n = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+\lambda-\frac{1}{2})(n+\lambda)}a_{n-1} = -\frac{1}{[2(n+\lambda)-1]\,(n+\lambda)}a_{n-1} \tag{1.16}$$

Comme la différence entre les deux racines de l'équation indiciale n'est pas un entier, on est donc dans le premier cas et les deux solutions sont obtenuées en remplaçant λ par λ_1 et λ_2.

A partir de l'équation.1.16 on a:

$$a_1 = -\frac{a_0}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{(\lambda+2)(2\lambda+2)} = \frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)(2\lambda+1)(2\lambda+3)}$$

et en général

$$a_n = (-1)^n\frac{a_0}{[(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)]\,[(2\lambda+1)(2\lambda+3)\cdots(2\lambda+2n-1)]}$$

pour $\lambda = 0$ on obtient

$$a_n = (-1)^n\frac{a_0}{(1\cdot2\cdot3\cdots n)\,(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1))}$$

et comme

$$1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

a_n devient

$$a_n = -(1)^n\frac{2^n}{(2n)!}a_0$$

et on peut écrire la première solution comme

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on a

$$a_n = (-1)^n\frac{a_0}{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}\right)(2\cdot4\cdot6\cdots2n)}$$

mais

$$\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!}$$

et

$$(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)=2^n n!$$

donc

$$a_n=(-1)^n\frac{2^n}{(2n+1)!}a_0$$

et la deuxième est

$$y_2(x)=x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n+1)!}$$

- **Exemple 3**

  Considérons l'équation différentielle :

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0$$

cette équation peut être récrite sous la forme

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1-x}y=0$$

maintenant on $p(x)=1$ et $q(x)=-\dfrac{x}{1-x}$ analytique au point zéro[4]. La solution est donnée donc par

$$z(x,\lambda)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_nx^{n+\lambda-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_nx^{n+\lambda}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_nx^{n+\lambda-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_nx^{n+\lambda}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\lambda}=0$$

[4] $q(x)$ a un rayon de convergence égale 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}=0$$

l'équation indiciale s'obtient pour la puissance la plus petite (-1 dans ce cas)

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda=0\Longrightarrow\lambda^2=0$$

on a donc une racine double $\lambda_1=\lambda_2=0$, et

$$(n+\lambda)^2a_n-\left[(n+\lambda-1)^2+1\right]a_{n-1}=0\Longrightarrow a_n=\frac{(n+\lambda-1)^2+1}{(n+\lambda)^2}a_{n-1}$$

où bien

$$a_n=\frac{\{\lambda^2+1\}\{(1+\lambda)^2+1\}\{(2+\lambda)^2+1\}\cdots\{(n+\lambda-1)^2+1\}}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2\cdots(\lambda+n)^2}a_0$$

$$a_n=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left([i+\lambda-1]^2+1\right)}{\prod_{i=1}^{n}(i+\lambda)^2}a_0\quad n\geq 1\tag{1.17}$$

et la solution sera

$$z(x,\lambda)=a_0x^{\lambda}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left([i+\lambda-1]^2+1\right)}{\prod_{i=1}^{n}(i+\lambda)^2}x^n\right)\tag{1.18}$$

Comme on a une racine double, on est dans le deuxième cas. la première solution s'obtient en remplaçnt λ par 0. On a donc

$$y_1(x)=z(x,\lambda=0)=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}[(i-1)^2+1]}{(n!)^2}x^n\right)$$

La deuxième solution est donnée par

$$y_2(x)=\frac{dz(x,\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0}$$

et comme a_n dépendent de λ la derivée devient

$$\frac{dz(x,\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\lambda}{d\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{da_n}{d\lambda}\right) x^n$$

le premier terme[5]

$$\left(\frac{dx^\lambda}{d\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^\lambda \ln(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

pour $\lambda = 0$

$$\left(\frac{dx^\lambda}{d\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ln(x) y_1(x)$$

mettons $c_n = \dfrac{da_n}{d\lambda}$ pour tout $n \geq 1$.
Pour calculer les c_n on utilisera

$$\frac{d\ln(f(x))}{dx} = \frac{df}{dx}/f(x) \Longrightarrow \frac{df}{dx} = f(x)\frac{d\ln(f(x))}{dx}$$

donc

$$c_n = \frac{da_n}{d\lambda} = a_n \frac{d\ln(a_n)}{d\lambda}$$

mais

$$\frac{d\ln(a_n)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left([i+\lambda-1]^2+1\right)}{\prod_{i=1}^{n}(i+\lambda)^2}\right)$$

$$\frac{d\ln(a_n)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\lambda}\ln\left([i+\lambda-1]^2+1\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\lambda}\ln(i+\lambda)^2$$

$$\frac{d\ln(a_n)}{d\lambda} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i+\lambda-1}{[i+\lambda-1]^2+1} - \frac{1}{i+\lambda}$$

Donc pour $\lambda = 0$

$$c_n = 2a_0 \left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}[(i-1)^2+1]}{(n!)^2}\right\}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{j-1}{(j-1)^2+1} - \frac{1}{j}\right] \tag{1.19}$$

[5]on a

$$x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$$

et donc la deuxième solution est

$$y_2(x) = \ln(x)y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

les c_n sont données par l'équation 1.19.

- **Exemple 4**

Soit l'équation différentielle :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (3-x)y = 0$$

Ici on a $p(x) = -3$ et $q(x) = 3 - x$ et le point $x = 0$ est un point singulier régulier. La solution doit avoir la forme

$$z(x,\lambda) = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on remplace y et ces dérivées on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-4)+3\right] x^{n+\lambda} - a_n x^{n+\lambda+1} = 0$$

pour $n = 0$ on obtient l'équation indiciale

$$\lambda(\lambda-4)+3 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

et pour tout $n \geq 1$ on a

$$(n+\lambda-1)(n+\lambda-3)a_n - a_{n-1} = 0 \Longrightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+\lambda-1)(n+\lambda-3)}$$

L'équation indiciale accepte deux solutions $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ et leur différence est un entier donc on est soit dans le troisième ou le quatrième cas. Pour les distinguer on écrit explicitement les premiers coefficients

$$a_1 = \frac{a_0}{\lambda(\lambda-2)} \qquad a_2 = \frac{a_0}{\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)}$$

et

$$a_n = \frac{a_0}{\left[\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda+i)\right]\left[\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda+i-2)\right]} \qquad n \geq 3$$

On voit si on remplace par $\lambda = 1$ les coefficients a_n sont infinis pour tout $n \geq 2$ et par conséquent on est dans le troisième cas et les solutions de l'équation différentielle sont

$$y_1(x) = \left[(\lambda - 1)z(x, \lambda)\right]_{\lambda=1}$$

$$y_2(x) = \frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda - 1)z(x, \lambda)\right]$$

explicitement

$$y_1(x) = -a_0 x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n-2)!}$$

et on peut montrer que

$$y_2(x) = a_0 \ln(x) y_1(x) + a_0 x \left\{1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right\}$$

avec

$$c_n = \frac{2}{n!(n-2)!}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1\right\}$$

- **Exemple 5**

  Soit l'équation différentielle :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^3 - 2x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

Ici $p(x) = x^2 - 2$, $q(x) = -2$ et $x = 0$ est un point singulier régulier, et de même la solution est de la forme

$$z(x, \lambda) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en remplaçant y et ses derivées on obtient

$$a_0(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$a_1 \lambda(\lambda - 1) = 0$$

et

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{\lambda + n - 1}$$

On voit que l'équation indiciale admet deux solutions ($\lambda = 1$ et $\lambda = 2$)et leur difference est un entier, mais a_1 est indéterminé. Alors on a

$$y_1(x) = a_0 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \right)$$

et

$$y_2(x) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n+2}$$

Chapter 2

Les fonctions d'Euler : Gamma et Beta

Euler a découvert la fonction gamma,$\Gamma(x)$, quand il a étendu le domaine de la fonction factorielle. Ainsi $\Gamma(x)$ est une fonction méromorphe égale à $(x-1)!$ lorsque x est un nombre entier positif. La fonction gamma a plusieurs représentations, mais les deux plus importants, trouvées par Euler, la représentation comme une intégrale infinie et une représentation comme une limite de un produit fini. Nous prenons la première comme la définition de Gamma. En outre, nous étudierons également la fonction de Beta ($\beta(x,y)$). Au lieu de considérer la fonction bêta comme une fonction, il est plus éclairant de la considérer comme une classe d'intégrales, intégrales qui peuvent être évaluées en termes de fonctions de gamma. Nous avons donc fait souvent référence à des fonctions bêta comme intégrales bêta.

Dans ce chapitre, nous développons quelques propriétés élémentaires des fonctions bêta et gamma. Nous donnons plus d'une preuve pour certains résultats. On a démontré qu'elles peuvent être utilisées pour démontrer le théorème de Fermat, *un premier de la forme* $4n+1$ *est exprimable comme une somme de deux carrés.* Nous traitons également une extension multidimensionnelle de l'intégrale simple de bêta , due à Dirichlet, à partir de laquelle le volume d'un ellipsoïde à n dimensions peut être déduite. Nous présentons formule asymptotique de la Stirling pour $n!$ mais nous donnons une preuve analytique complexe de la belle formule de réflexion d'Euler (en exercice n ° 3 de TD).

Donc On définit les fonction $\Gamma(x)$ et $\beta(x,y)$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \tag{2.1}$$

et

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Ces deux définitions sont valable pour $x > 0$ pour $\Gamma(x)$ et pour $x > 0$ $y > 0$ pour $\beta(x, y)$[1].

2.1 Propriétés de la fonction Gamma

Théorème 2.1

$$\Gamma(1) = 1. \tag{2.3}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\, dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1\end{aligned}$$

Théorème 2.2

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0. \tag{2.4}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt \quad \text{par définition} \\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{intégrale par partie} \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Théorème 2.3 *Si x est un entier strictement positif ($x \in \aleph^+$), alors*

$$\Gamma(x+1) = x! \tag{2.5}$$

Théorème 2.4

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du. \tag{2.6}$$

Démonstration Par un changement de variable $t = u^2 \Leftrightarrow dt = 2udu$ dans la définition de la fonction Gamma (equ. 1), on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-u^2} (u^2)^x\, 2udu \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du.\end{aligned}$$

[1]Pour que les intégrales convergent.

Théorème 2.5

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}. \tag{2.7}$$

Démonstration Pour démontrer ce théorème, on considère l'intégrale double suivante

$$I = \iint_D e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1} dtdu$$

ou D est le quart de plan positif $t \in]0, \infty[$ et $u \in]0, \infty[$, comme les deux bornes d'intgrale sont indépendantes, on peur écrire donc

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1} dtdu \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt \times \int_0^{\infty} e^{-u^2} t^{2y-1} du \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(x)\frac{1}{2}\Gamma(y) \quad \text{En utilisant théorème 2-4}
\end{aligned}$$

Par un changement de variables (coordonnées polaires) $t = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r \in]0, \infty[$ et $\theta \in [0, \pi/2]$ on a :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1} dtdu \\
&= \iint_D e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1}(\theta) r^{2y-1} \sin^{2y-1}(\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \times \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(x+y) \times \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta \ \text{ En utilisant théorème 2-4}
\end{aligned}$$

Théorème 2.6

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{2.8}$$

Démonstration On utilise le théorème 2.5 et posons $x = y = \frac{1}{2}$ on aura

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

mais aussi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2 \quad x = y = 0$$

alors

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \pm\sqrt{\pi}$$

mais d'aprés la définition, Γ doit être positive pour $x > 0$, l'intégrant est positif, par conséquence

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Théorème 2.7

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.9}$$

Démonstration On fait un changement de variable dans la définition de β (equ. 2.2) $t = \cos^2(\theta)$, alors $(1-t) = \sin^2(\theta)$ et $dt = -\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$. Et quand $t = 0$, $\theta = \pi/2$ et pour $t = 1$ $\theta = 0$. L'intégrale 2.2 devient

$$\beta(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta)\sin^{2y-1}(\theta)d\theta$$

mais en utilisant le théorème 2.5, on aura

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Théorème 2.8

$$\beta(x, y) = \beta(y, x). \tag{2.10}$$

Démonstration On fait un changement de variable dans la définition de β (equ. 2.2) $1 - t = u$

Théorème 2.9

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x+y).$$
$$\beta(x,y+1) = \frac{y}{x+y}\beta(x+y).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y) &= \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} \\ &= \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}. \\ &= \frac{x}{x+y}\beta(x+y)\end{aligned}$$

De même pour $\beta(x,y+1)$.

Formule de duplication

Théorème 2.10

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

Démonstration En vertu du théorème 2.7, et si on pose $y = x$ on a

$$\begin{aligned}I = \beta(x,x) &= \frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

si on pose $t = \dfrac{s+1}{2} \Rightarrow dt = ds/2$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_{-1}^1 (1+s)^{x-1}(1-s)^{x-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_{-1}^1 (1-s^2)^{x-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{2^{2x-1}}\int_0^1 (1-s^2)^{x-1}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

maintenant si, en plus, on fait le changement de variable $u = s^2$

$$II = \frac{2}{2^{2x-1}} \int_0^1 (1-s^2)^{x-1}\,\mathrm{d}s = 2^{-2x+1} \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \quad = 2^{-2x+1}\beta(\frac{1}{2}, x)$$

$$= 2^{-2x+1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

mais $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $I = II$ on a donc

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

Exercice

1) Sachant que

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

montrer que

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}(2\theta) d\theta = 2^{\alpha-1} \frac{\left[\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})\right]^2}{\Gamma(\alpha+1)}$$

2) si on met $\varphi = 2\theta$, montrer que

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}$$

3) déduire que

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

Corollaire 2.11 *si $x = n$ est un entier positif, alors*

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

2.2 Définition de la fonction Gamma pour les arguments negatifs

Comme $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(1+x)}{x}$, et si on met $x \to 0^+$, alors $\Gamma(x) \to \infty$. Par conséquence, la fonction $\Gamma(x) \to \infty$ si $x \in \aleph^-$

Formule des compléments

Théorème 2.12 *La fonction gamma vérifie la formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments :*

$$\forall x \; 0 < \mathrm{Re}(x) < 1 \implies \Gamma(1-x)\,\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

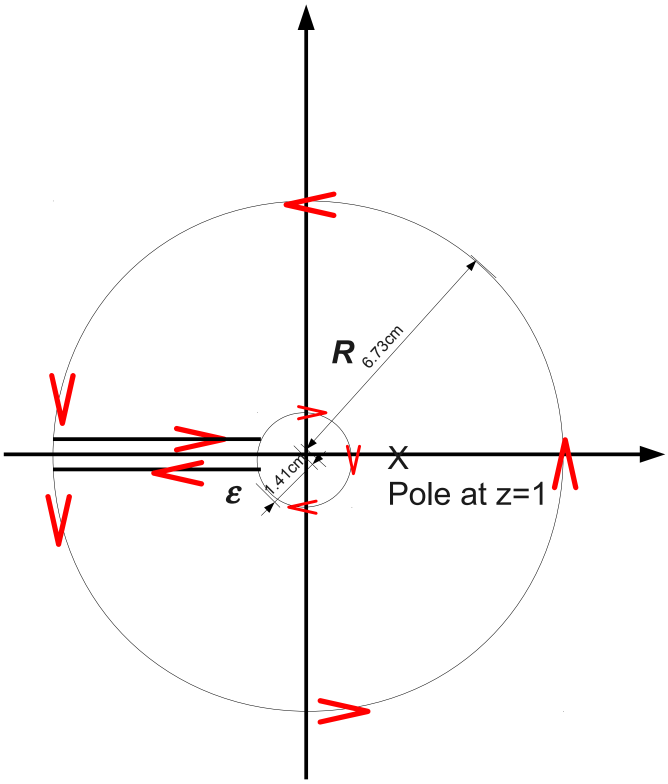

Figure 2.1: Contour d'intégration.

Démonstration On doit montrer initialement que

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$$

puis on utilise l'intégrale sur un contour fermé γ (voir figure) avec $R \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$

$$I(x) = \oint_\gamma \frac{z^{x-1}}{1-z}dz$$

En utilisant le théorème des résidues, on peut montrer ce théorème.

Exercice

1)montrer que $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x-n}$

2.3 Etude de la fonction $\Gamma(x)$

De la définition de Γ (equ.2.1) on montre que :

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t) t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.11}$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty [\ln(t)]^2\, t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.12}$$

La fonction $\Gamma''(x)$ étant positive, car l'intégrant l'est aussi. $\Gamma'(x)$ est donc une fonction croissante et s'annule au plus une fois. Or $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle[2] permet donc d'affirmer que sur$]1, 2[$ il existe au moins une valeur c telle que $\Gamma'(c) = 0$. Cette valeur correspond à un minimum de $\Gamma(x)$. Précisément on a établi que : $c \approx 1.46$ et $\Gamma(c) = 0.8856$. Enfin, $\Gamma(x)$ est croissante sur $]c, \infty[$ et on a $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} \to \infty$, d'où une branche parabolique de direction y pour le graphe de $y = \Gamma(x)$. Pour les valeurs négatives de x, $\Gamma(x) \to \pm\infty$ pour tout entier négatif.

Exercice

La constante d'Euler-Mascheroni γ est définie comme étant

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \simeq 0,5772$$

1) montrer que $\Gamma'(1) = \gamma$

Formule asymptotique de Stirling

Théorème 2.13

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \qquad x \to \infty$$

[2]Théorème — Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe (au moins) un réel c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

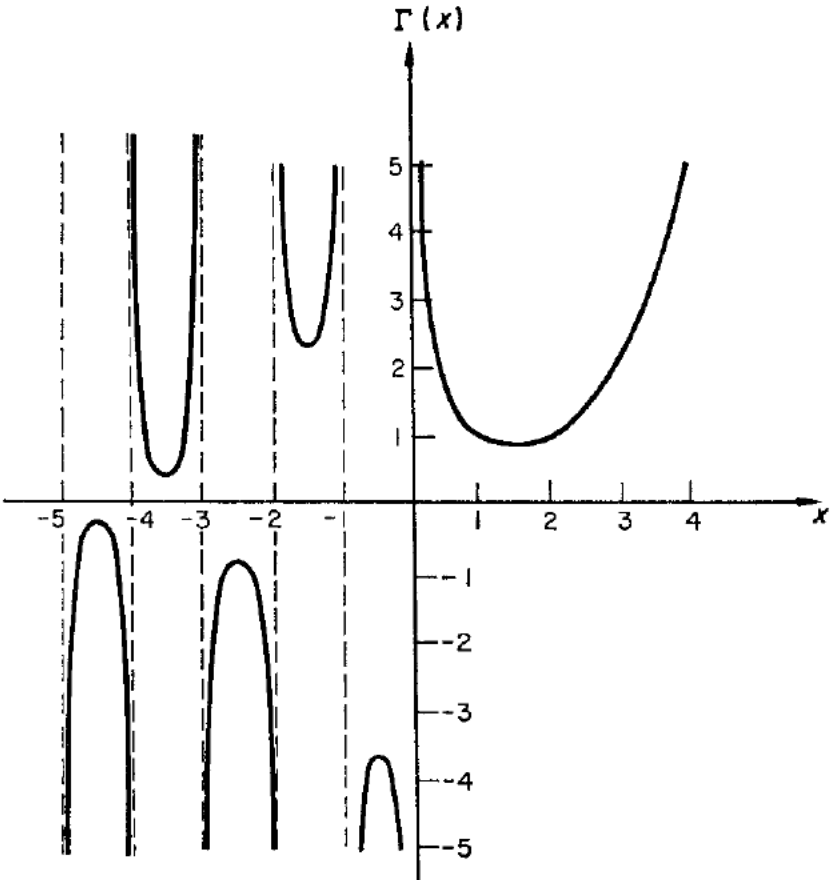

Figure 2.2: La fonction Gamma.

Formule de multiplication de Gauss pour $\Gamma(mx)$

Théorème 2.14 *Comme généralisation de la formule de duplication de la fonction Gamma (Legendre), la formule de Gauss pour la multiplication est donnée par*

$$\Gamma(mx)(2\pi)^{(m-1)/2} = m^{mx-1/2}\Pi_{i=0}^{m-1}\Gamma(x+i/m)$$

Intégrale de Dirichlet et le volume d'un éllipsoïde

Dirichlet a trouvé une généralistion multidimensionnelle de l'intégrale β.

Théorème 2.15 *Si* V *est un élement de volume de l'espace à* n *dimension,* *défini par* $x_i > 0\ \forall i \leq n$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, *alors pour* $Re\alpha_i > 0$,

$$\int\int\cdots\int_V dx_1dx_2\cdots dx_n x_1^{\alpha_1-1}.x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1} = \frac{\Pi_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i)}$$

Corollaire 2.16 *Si* V *est un élement de volume de l'espace à* n *dimension, défini par* $x_i > 0\ \forall i \leq n$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p_i} \leq 1$, *alors pour* $Re\alpha_i > 0$,

$$\int\int\cdots\int_V dx_1dx_2\cdots dx_n x_1^{\alpha_1-1}.x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1} = \frac{\Pi_{i=1}^{n}\Gamma(\frac{a_i^{\alpha_i}}{p_i})\Gamma(\frac{\alpha_i}{p_i})}{\Gamma(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i/p_i)}$$

Corollaire 2.17 *Le volume dans l'espace à* n *dimension enfermé par* $x_i > 0\ \forall i \leq n$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{p_i} \leq 1$, *est*

$$\frac{\Pi_{i=1}^{n} a_i\Gamma(1+\frac{1}{p_i})}{\Gamma(1+\sum\limits_{i=1}^{n}1/p_i)}.$$

En particulier le volume de l'éllipsoïde $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{2} \leq 1$ *est*

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a_1a_2\cdots a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

2.4 Exercices

Exercice 1

Exprimer les intégrales suivantes en fonction des fonction $\Gamma(x)$ ou $\beta(x,y)$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}d\theta$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$$

$$\int_0^\infty t^{-3/2}(1-e-t)dt$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} dx$$

Exercice 2

Montrer que $\beta(n,n+1) = \frac{1}{2}\frac{[\Gamma(n)]^2}{\Gamma(2n)}$ et déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^3(\theta)} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)^{1/4} \cos(\theta)d\theta = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{2\sqrt{\pi}}$$

Chapter 3

Fonctions de Bessel

Lorsqu'on suspond un fil à un crochet et on le lâche, quelle sera sa forme? Ce problème a été résolu par Daniel Bernoulli en 1732 et la solution fait intervenir les fonction de Bessel, lesquelles ne seront réellement étudiées que plus tard par l'astronome allemand Friedrich Bessel en 1824.

3.1 Equation de Bessel

L'équation de Bessel intervient dans de nombreux problèmes physique et plus particulièrement ceux avec une symmétrie cylindrique. On considère l'équation de la Laplace :

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

si on récrit cette équation dans les coordonnées cylrindrique, en exprimant Δ en fonction des dérivés partielles $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$, où

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

de même

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

on obtient finalement l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

On peut séparer les termes en z, en θ et en ρ par l'écriture de la fonction $U(\vec{r})$ comme suit

$$U(\rho,\theta,z)=y(\rho)g(\theta)h(z)$$

On obtient

$$\frac{y''}{y}+\frac{1}{r}\frac{y'}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{g''}{g}=-\frac{h''}{h}$$

et comme l'un des deux membres dépend de ρ et θ et l'autre dépend de z et on choisit $h(z)$ comme une fonction exponentielle :

$$\frac{h''}{h}=\alpha^2 \Longrightarrow h(z)=Ae^{\alpha z}+Be^{-\alpha z}$$

si en plus on prend $g(\theta)$ comme une fonction sinusoïdale

$$\frac{g''}{g}=-\lambda^2 \Longrightarrow g(\theta)=C\cos(\lambda\theta)+D\sin(\lambda\theta)$$

l'équation pour la partie radiale sera donc par :

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho}+(\alpha^2\rho^2-\lambda^2)y=0$$

si on fait le changement de variable $\rho=\alpha x$ on obtient

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\lambda^2)y=0 \tag{3.1}$$

c'est *l'équation différentielle de Bessel d'ordre* λ.
Dans l'équation de Bessel le point $x=0$ est un point singulier régulier et la solution donc sera donnée par

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

en remplaçant dans equ.3.1, on peut montrer que l'équation indiciale est donnée par

$$(s^2-\lambda^2)a_0=0,$$

$$\left[(s+1)^2-n^2\right]a_1=0$$

et

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(s+n+\lambda)(s+n-\lambda)}$$

de l'équation indiciale on a

$$s = \pm\lambda$$

et $a_1 = 0$[1], et par conséquence tous les coefficients impairs sont nuls ($a_{2n+1} = 0$). les coefficient pairs sont donnés alors par

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2n} n! \Gamma(n+\lambda+1)} a_0.$$

la première solution sera donc :

$$y(x) = \Gamma(\lambda+1) 2^\lambda a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+\lambda} n! \Gamma(n+\lambda+1)} x^{2n+\lambda}$$

d'où la définition de *fontion de Bessel de première éspèce* $J_\lambda(x)$

$$J_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda} \tag{3.2}$$

Si λ est un nombre réel la deuxième solution correspond à $s = -\lambda$ ($J_{-\lambda}(x)$)

Théorème 3.1 *Si λ est un entier n on a*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Pour démontrer ce théoreme on utilise la définition 3.2. c'est à dire que les deux solutions $J_\lambda(x)$ et $J_{-\lambda}(x)$ ne sont pas indépendantes pour $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 3.2 *les deux solutions indépendantes sont $J_\lambda(x)$ et*

$$Y_\lambda(x) = \lim_{\nu \to \lambda} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{3.3}$$

$Y_\lambda(x)$ *est la fontion de Bessel de deuxième éspèce*

Démonstration Il est claire que pour $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $J_\lambda(x)$ et $Y_\lambda(x)$ sont solutions de l'équation de Bessel et sont linéairement indépendantes. Cependant, pour $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, $Y_\lambda(x) = \frac{0}{0}$ est indéfinie, en utilisant le théoreme de L'Hôpital

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^\mu \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

[1]Sauf dans le cas où $\lambda = \pm\frac{1}{2}$

Maintenant si on dérive l'équation 3.1 par rapport ν on obtient

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)+(x^2-\lambda^2)\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-2\nu J_\nu(x)=0 \tag{3.4}$$

et de même pour $\partial_\mu J_{-\nu}$ on a

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)+(x^2-\lambda^2)\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)-2\nu J_{-\nu}(x)=0 \tag{3.5}$$

multiplions equ.3.5 par $(-1)^\nu$ et on soustrait equ.3.5 de equ.3.4, on arrivera à

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-(-1)^\nu\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)\right]+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-(-1)^\nu\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)\right]\\&+(x^2-\lambda^2)\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-(-1)^\nu\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)\right]-2\nu\left[J_\nu(x)-(-1)^\nu J_{-\nu}(x)\right]=0\end{aligned}$$

Pour $\nu=n$ le dernier terme s'annule en vertu du théorème3.1 et on aura

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}Y_n(x)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y_n(x)+(x^2-n^2)Y_n(x)=0 \tag{3.6}$$

Donc $Y_n(x)$ est une solution de l'équation de Bessel d'ordre n. On montrera aussi que J_n et Y_n sont indépendants.

Théorème 3.3 *L'expression éxplicite de $Y_n(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}Y_n(x)=&\frac{2}{\pi}\left\{\ln(\frac{x}{2})+\gamma-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right\}J_n(x)\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\sum_{r=1}^{s}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r+n}\right\}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}\end{aligned}$$

Théorème 3.4 *Pour un entier $n\in\mathbb{Z}$ on a*

$$Y_{-n}(x)=(-1)^nY_n(x)$$

Fonction génératrice

Théorème 3.5

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

Démonstration On utilisera ici le développement de MacLauren

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n z^n \qquad \forall f$$

avec

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

et on se sert aussi de la définition de la dérivée

$$f^{(p)}(z)|_{z=z_0} = \frac{p!}{2\pi\imath}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}dz$$

avec γ est un contour fermé contenant $z = z_0$ (Voir exercice 2 de TD).

Représentation intégrale pour les fonction de Bessel

Théorème 3.6 *Pour tout* $n \in \aleph$ *on a*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\phi - x\sin\phi\right) d\phi$$

Démonstration Il suffit prendre $z = e^{\imath\phi}$ et remplacer dans la fonction génératrice (théorème3.5) et se servir des intégrales suivantes

$$\int_0^\pi \cos(m\phi)\cos(n\phi)d\phi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ \pi & n = m = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

et

$$\int_0^\pi \sin(m\phi)\sin(n\phi)d\phi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \\ 0 & n = m = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Fonction de Hankel

On définit les fonctions de Hankel ($H^{(1)}$) et ($H^{(2)}$) (qlq fois appelées fonctions de Bessel de troisième éspèce)

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \imath Y_n(x) \qquad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \imath Y_n(x) \tag{3.9}$$

Relations de récurrence

Théorème 3.7 *Pour les fonctions de Bessel de première éspèce*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{x^n J_n(x)\right\} &= x^n J_{n-1}(x)\\
\frac{d}{dx}\left\{x^{-n} J_n(x)\right\} &= -x^{-n} J_{n+1}(x)\\
J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\\
J_n'(x) &= -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\\
J_n'(x) &= \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]\\
J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x)
\end{aligned}$$

Théorème 3.8 *Toutes les relations précédentes sont aussi valables pour* $Y_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ *et* $H_n^{(2)}(x)$

3.2 Equation réductible à l'équation de Bessel

L'équation différentielle de Bessel représente une famille d'équations différentielles qui peut être réduites à une équation analogue à equ.3.1.

Théorème 3.9 *La solution générale de l'équation différentielle :*

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\nu^2 x^2 - \mu^2)y = 0 \tag{3.10}$$

est

$$y(x) = AJ_\mu(\nu x) + BY_\mu(\nu x)$$

Démonstration Il suffit de faire le changement de variable $t = \nu x$, tel que :

$$\frac{dy}{dx} = \nu\frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \nu^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

On remplace dans l'equ.3.10 pour obtenir

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(t^2-\mu^2)y=0$$

qui est l'équation de Bessel (equ.3.1).

Théorème 3.10 *La solution générale de l'équation différentielle :*

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-2\alpha)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left\{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-\mu^2\gamma^2)\right\}y=0 \tag{3.11}$$

est

$$y(x)=Ax^\alpha J_\mu(\beta x^\gamma)+Bx^\alpha Y_\mu(\beta x^\gamma)$$

Démonstration On fait un changement de fonction $y(x)=x^\alpha z(x)$ alors

$$\frac{dy}{dx}=x^\alpha\frac{dz}{dx}+\alpha x^{\alpha-1}z(x)$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^\alpha\frac{d^2z}{dx^2}+2\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}+\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)$$

on obtient après certaine algèbre

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\left\{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}-\mu^2\gamma^2\right\}y=0$$

Maintenant on fait le changement de variable $t=x^\gamma$ et on remplace dans l'équation précédante pour arriver à

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+(\beta^2t^2-\mu^2)z=0$$

qui a, d'après le théorème 3.9, la solution

$$z(t)=AJ_\mu(t)+BY_\mu(t)$$

donc la solution de l'équation 3.11 est

$$y(x)=Ax^\alpha J_\mu(\beta x^\gamma)+Bx^\alpha Y_\mu(\beta x^\gamma)$$

3.3 Fonctions de Bessel sphériques

Considérons l'équation différentielle

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left\{ k^2 x^2 - l(l+1) \right\} y = 0 \tag{3.12}$$

avec $l \in \aleph$, cette équation est de même forme de l'équation3.11 avec

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha &= 2 \\ \gamma &= 1 \\ \beta^2 \gamma^2 &= k^2 \\ \alpha^2 - \mu^2 \gamma^2 &= -l(l+1) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \ \beta = k, \ \gamma = 1, \ \mu = l + \frac{1}{2}$$

donc la solution est donnée par

$$\mathbf{y}(x) = A x^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx) + B x^{-\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(kx)$$

or

$$\mathbf{y}(x) = A_1 j_l(kx) + B_1 y_l(kx)$$

Ainsi on a définit les fonction de Bessel sphérique de première éspèce $j_l(x)$ et de deuxième éspèce $y_l(x)$

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{3.13}$$

et

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{3.14}$$

avec $A_1 = \sqrt{2/\pi} A$ et $B_1 = \sqrt{2/\pi} B$.
On définit les fonctions de Hankel sphériques (ou bien les fonctions de Bessel sphériques de troisième éspèce)

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + \imath y_l(x)$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - \imath y_l(x)$$

Théorème 3.11 *Si* $f_n(x) est l'une des fonctions j_n(x)$, $y_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$ *ou* $h_n^{(2)}(x)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{x^{n+1}f_n(x)\right\} &= x^{n+1}f_{n-1}(x)\\
\frac{d}{dx}\left\{x^{-n}f_n(x)\right\} &= -x^{-n}f_{n+1}(x)\\
f_n'(x) &= f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x}f_n(x)\\
f_n'(x) &= \frac{n}{x}f_n(x) - f_{n+1}(x)\\
(2n+1)f_n'(x) &= nf_{n-1}(x) - (n+1)f_{n+1}(x)\\
f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x}f_n(x)
\end{aligned}$$

Théorème 3.12

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}\\
y_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}\\
h_0^{(1)}(x) &= -\imath\frac{e^{\imath x}}{x}\\
h_0^{(2)}(x) &= \imath\frac{e^{-\imath x}}{x}
\end{aligned}$$

Formule de Rayleigh

Théorème 3.13 *Si* $n \in \aleph$ *alors*

$$\begin{aligned}
j_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)\\
y_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)\\
h_n^{(1)}(x) &= -\imath(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{\imath x}}{x}\right)\\
h_n^{(1)}(x) &= \imath(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{e^{-\imath x}}{x}\right)
\end{aligned}$$

Comportement asymptotique des fonctions de Bessel

Théorème 3.14 *si* $x \to \infty$ *on a*[2]

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]$$

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\imath\left\{x - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right\}\right]$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-\imath\left\{x - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right\}\right]$$

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y_n(x) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim -\frac{1}{x} \exp\left[\imath\left\{x - \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$h_n^{(2)}(x) \sim \frac{1}{x} \exp\left[-\imath\left\{x - \frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

[2]Ici le symbole $\sim$ signifie *"se comporte comme"*. Une définition plus précise est que : $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to a$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Théorème 3.15 *si $x \to 0$ on a* [3]

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\Gamma(n)\left(\dfrac{x}{2}\right)^n & n \neq 0 \\ \dfrac{2}{\pi} & n = 0 \end{cases}$$

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad n \in \aleph$$

$$y_n(x) \sim -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \quad n \in \aleph$$

Orthonormalité des fonctions de Bessel

Théorème 3.16

$$\int_0^a x J_n(\xi_i x) J_n(\xi_j x) dx = \frac{a^2}{2}\left\{J_{n+1}(\xi_i a)\right\}^2 \delta_{ij}$$

où ξ_i et ξ_j sont les racine de l'équation $J_n(\xi a) = 0$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Démonstration On commence initialement par montrer l'égalité dans le cas où $i \neq j$,i. e,

$$\int_0^a x J_n(\xi_i x) J_n(\xi_j x) dx = 0$$

$J_n(\xi x)$ est la solution de l'équation différentielle

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 J_n(\xi_i x)}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}J_n(\xi_i x)}{\mathrm{d}x} + (\xi_i^2 x^2 - n^2) J_n(\xi_i x) = 0$$

[3]Par $n!!$ (factorielle double de n) on veut dire :

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 5.3.1 = \frac{n!}{2^m m!} \quad \text{si n est impaire } n = 2m+1$$
$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 6.4.2 = 2^m.m! \quad \text{si n est paire } n = 2m$$

et de même

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2J_n(\xi_jx)}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}J_n(\xi_jx)}{\mathrm{d}x}+(\xi_j^2x^2-n^2)J_n(_jx)=0$$

multiplions la première équation par $J_n(\xi_jx)$ et la deuxième par $J_n(\xi_jx)$ et soustrait les deux on obtient

$$\frac{d}{dx}\left\{J_n(\xi_jx)x\frac{dJ_n(\xi_ix)}{dx}\right\}-\frac{d}{dx}\left\{J_n(\xi_ix)x\frac{dJ_n(\xi_jx)}{dx}\right\}+(\xi_i^2-\xi_j^2)xJ_n(\xi_ix)J_n(\xi_jx)=0$$

par intégration on a

$$\left[J_n(\xi_jx)x\frac{dJ_n(\xi_ix)}{dx}-J_n(\xi_ix)x\frac{dJ_n(\xi_jx)}{dx}\right]_0^a+(\xi_i^2-\xi_j^2)\int_0^a xJ_n(\xi_ix)J_n(\xi_jx)dx=0$$

Le premier terme s'annule pour a car $J_n(\xi_ia)=J_n(\xi_ja)=0$ ainsi que pour 0 car le terme contient x et comme $\xi_i\neq\xi_j$ donc

$$\int_0^a xJ_n(\xi_ix)J_n(\xi_jx)dx=0$$

Pour completer la démonstration on doit montrer que

$$\int_0^a xJ_n(\xi x)^2dx=\frac{a^2}{2}\left\{J_{n+1}(\xi a)\right\}^2$$

si on note $J_n(\xi_ix)$ par z on

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(\xi^2x^2-n^2)z=0$$

multiplions par $2z'$ on aura

$$\frac{d}{dx}\left\{x^2z'^2-nz^2+\xi^2x^2z^2\right\}-2\xi^2xz^2=0$$

qui donne après intégration

$$\left[x^2z'^2-nz^2+\xi^2x^2z^2\right]_0^a-2\xi^2\int_0^a xz^2dx=0$$

On montre aussi que

$$nJ_n(0)=0\quad\forall n\in\aleph$$

donc le deuxième et troisième terme s'annule et il reste

$$\left[x^2\left(\frac{dJ_n(\xi x)}{dx}\right)^2\right]_{x=a} = 2\xi^2\int\limits_0^a xJ_n(\xi x)^2dx$$

on utilise le fait que

$$\frac{dJ_n(\xi x)}{dx} = \frac{n}{\xi x}J_n(\xi x) - J_{n+1}(\xi x)$$

donc

$$\left[x^2\left(\frac{dJ_n(\xi x)}{dx}\right)^2\right]_{x=a} = \left[x^2\left(J_{n+1}(\xi x)\right)^2\right]_{x=a} = a^2\left(J_{n+1}(\xi a)\right)^2$$

et on a montré ainsi que

$$\int\limits_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx = \frac{a^2}{2}\left\{J_{n+1}(\xi_i a)\right\}^2\delta_{ij}$$

Théorème 3.17 *Si $f(x)$ est définit sur un intervalle $0 \leq x \leq a$ et peut être dévolpper sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_iJ_n(\xi_i x)$ avec ξ_i sont les racines de l'équation $J_n(\xi a) = 0$, alors*

$$c_i = \frac{2\int\limits_0^a xf(x)J_n(\xi_i x)dx}{a^2\left\{J_{n+1}(\xi_i a)\right\}^2}$$

Intégrale contenant des fonctions de Bessel

Théorème 3.18 *Pour $n > m > -1$*

$$J_n(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n-m}}{\Gamma(n-m)}\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)^{n-m-1}t^{m+1}J(xt)dt$$

Théorème 3.19

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad a > 0$$

Théorème 3.20 *si* $n \in \aleph$ *alors*

$$\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b}$$

Théorème 3.21

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{b^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1} e^{-ax}dx = \frac{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{2}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{ab^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{3}{2}}}$$

Exercices

1) Utiliser la fonction génératrice pour montrer que

$$J_n(x+y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_{n-r}(x)$$

2) montrer que $\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}dx = \frac{1}{n}$

3) montrer que, si ξ_i sont les racines de $J_0(\xi) = 0$,

$$-\frac{1}{2}\ln x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi x)}{[x_i J_1(\xi)]^2}$$

4) montrer que $J_n(x)Y_n'(x) - Y_n(x)J_n'(x) = \frac{A}{x}$, A étant constante.

Chapter 4

Polynômes orthogonaux

4.1 Polynômes de Legendre

L'équation différentielle de Legendre est donnée par :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

λ est un nombre réel quelconque. On s'intérèsse essentiellement aux formes de $\lambda = l(l+1)$.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \tag{4.1}$$

On peut réecrire l'équation différentielle précédente comme

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0 \tag{4.2}$$

Comme le point $x = 0$ est un point ordinaire, la solution $y(x)$ est donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en remplaçant dans l'équation (4.1) ou (4.2) on obtient la relation de recurrence

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

On voit que les coefficients paires (a_{2n}) s'écrivent en fonction de a_0 et tous les coefficients impaires (a_{2n+1}) en fonction de a_1. On peut réecrire l'égalé comme :

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

ou bien explicitement :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{l(l+1)}{1.2}a_0 \\
a_3 &= -\frac{(l-1)(l+2)}{2.3}a_1 \\
a_4 &= \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{1.2.3.4}a_0 \\
a_5 &= \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{2.3.4.5}a_1 \\
&\vdots \\
a_{2n} &= (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)(l+5)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}a_0 \\
a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)(l-5)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)(l+6)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}a_1
\end{aligned}$$

donc

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

avec

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l(l-2)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

et

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux indépendantes solutions de l'équation de Legendre. On sait que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ convergent pour toute $-1 < x < 1$ (car le rayon de convergence de la série étant 1) mais les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers, et $y_1(x)$ et $y_2(x)$ divergent, en général, pour $x = \pm 1$. La seule façon, pour que y_1 et y_2 convergent pour $x = \pm 1$, est de rendre la somme infinie à une somme finie. Cela est possible pour toute valeur de l un entier positif ($l \in \aleph$). Si l est paire $y_1(x)$ converge, tandis que $y_2(x)$ diverge, et vis-versa pour l impaire (y_2 converge et y_1 diverge). Dans ce cas on exprime a_n en fonction de a_{n+2}

$$a_n = -\frac{(n+1)(n+2)}{(l-n)(l+n+1)}a_{n+2}$$

et la solution qui converge s'écrit

$$y(x) = \sum_{n=0}^{[l/2]} a_{l-2n} x^{l-2n}$$

ou

$$[\frac{l}{2}] = \begin{cases} \frac{1}{2}l \quad \text{si } l \text{ est paire} \\ \frac{1}{2}(l-1) \quad \text{si } l \text{ est impaire} \end{cases}$$

ou explicitement

$$y(x) = a_l \sum_{n=0}^{[l/2]} (-1)^n \frac{(l!)^2(2l-2n)!}{n!(l-2n)!(l-n)!(2l)!} x^{l-2n}$$

Ainsi on définit les polynômes de Legendre

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{[l/2]} (-1)^n \frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-2n)!(l-n)!} x^{l-2n} \tag{4.3}$$

Ces polynômes sont solutions de l'equ.4.1 et sont définis pour tout $x \in [-1, 1]$.

Fonction génératrice

Théorème 4.1

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

Démonstration Développons $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ en posant $z = 2tx - t^2 = t(2x-t)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{3}{2}z^2 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots.(2n-1)}{2^n} z^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{3}{2}z^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} z^n + \cdots$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} t^r (2x-t)^r$$

mais en utilisant la formule du binôme de Newton on a

$$(2x-t)^r = \sum_{P=0}^{r} C_r^p (2x)^{r-p}(-t)^p = \sum_{p=0}^{r} \frac{r!}{p!(r-p)!}(-1)^p 2^{r-p} x^{r-p} t^p$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \sum_{p=0}^{r} \frac{r!}{p!(r-p)!}(-1)^p 2^{r-p} x^{r-p} t^{r+p}$$

posons $r+p=n$ et comme $0 \leq p \leq r$ ça implique que

$$0 \leq n-r \leq r \Longrightarrow \frac{n}{2} \leq r \leq n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=[n/2]}^{n} \left\{ \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \frac{r!}{(n-r)!(2r-n)!}(-1)^{n-r} 2^{2r-n} x^{2r-n} \right\} t^n$$

posons $k=n-r$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2n-2k)!}{2^n(n-k)!} \frac{1}{(n-2k)!k!}(-1)^k x^{n-2k} \right\} t^n$$

l'expression entre les deux accolades est par définition le polynôme de Legendre d'ordre n ($P_n(x)$ et on a démontrer le théorème.

Formule de Rodrigues

Théorème 4.2

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right)^n$$

Démonstration On utilise la formule du binôme de Newton

$$(x^2-1)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^r x^{2(n-r)}$$

maintenant

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^r \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2r}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2r} = \begin{cases} 0 & 2r > n \\ \dfrac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r} & 2r \leq n \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right)^n = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r}$$

donc

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right)^n = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^n r!(n-r)!}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r} = P_n(x)$$

Expressions explicites:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^5-30x^2+3\right)
\end{aligned}
$$

Théorème 4.3

$$
\begin{aligned}
&(1)\ P_n(1) = 1\\
&(2)\ P_n(-1) = (-1)^n\\
&(3)\ P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}\\
&(4)\ P_n'(-1) = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\\
&(5)\ P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\\
&(6)\ P_{2n+1}(0) = 0
\end{aligned}
$$

Démonstration (1) et (2) On remplace dans la fonction génératrice (4.1)) x par ± 1 on obtient

$$\frac{1}{1\mp t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)(\mp t)^n$$

mais

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

on déduit donc

$$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n$$

(3) et (4) on remplace dans l'équation différentielle de Legendre (4.1) x par ± 1 pour obtenir

$$\pm 2P_n'(\pm 1) = n(n+1)P_n(\pm 1)$$

donc

$$P_n'(\pm 1) = \frac{n(n+1)}{2} \pm P_n(\pm 1)$$

en vertu de (1) et (2) on montre ainsi (3) et (4).
(5) et (6), on remplace dans la fonction génératrice x par 0 et on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)(\mp t)^n$$

mais

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} t^2$$

contient que des puissance de t paires et par conséquence

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

Orthogonalité des polynômes de Legendre

Théorème 4.4

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Démonstration On commence par montrer le cas $n \neq m$, i.e,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Les deux polynôme sont solutions de l'équation différentielle de Legendre (4.2)

$$(I) \ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0$$
$$(II) \ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right] + m(m+1)P_m = 0$$

Multiplions (I) par P_m et (II) par P_n et faire la soustraction et l'intégration de -1 à 1 on obtient

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]dx - \int_{-1}^{1} P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]dx$$
$$= [m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx$$

par intégration par partie on a

$$I = \int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]dx - \int_{-1}^{1} P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]dx =$$

$$\left[P_m(x)(1-x^2)\frac{dP_n}{dx} - P_n(x)(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]_{-1}^{1}$$

$$+\int_{-1}^{1} \frac{dP_m(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx - \int_{-1}^{1} \frac{dP_n(x)}{dx}(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}dx$$

$$= \left[P_m(x)(1-x^2)\frac{dP_n}{dx} - P_n(x)(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]_{-1}^{1}$$

le dernier terme s'annule pour ± 1 (à cause du terme $1-x^2$) et comme $n \neq m$ alors

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

il nous reste le cas $m = n$, on met la fonction génératrice au carré

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right]^2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)t^n t^m$$

en intégrant par rapport à x entre -1 et 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2tx+t^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx$$

les termes $m \neq n$ sont zéros.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2tx+t^2}dx = \frac{1}{t}\left\{\ln(1+t) - \ln(1-t)\right\}$$

mais

$$\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n} \qquad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$$

donc

$$\frac{1}{t}\left\{\ln(1+t) - \ln(1-t)\right\} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

par comparaison terme à terme on a

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

Théorème 4.5 *Si $f(x)$ est un polynôme d'ordre n, alors*

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

avec

$$c_r = (r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_r(x)f(x)dx$$

Corollaire 4.6 *si $f(x)$ est un polynôme d'ordre $m < n$, alors*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx = 0$$

Relations de recurrence

Théorème 4.7

$$(1)\ P_n'(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (2n-4r+1)P_{n-2r-1}(x)$$

$$(2)\ (2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$

$$(3)\ (l+1)P_{l+1}'(x) + lP_{l-1}'(x) = (2l+1)P_l(x)$$

$$(4)\ \sum_{k=0}^{l} (2k+1)P_k(x)P_k(y) = \frac{l+1}{x-y}\left\{P_{l+1}(x)P_l(y) - P_l(x)P_{l+1}(y)\right\}$$

Démonstration (1) $P_n'(x)$ est un polynôme d'ordre $n-1$ et en vertu du théorème (4.5)

$$P_n'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r P_r(x) \quad c_r = (r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_r(x)P_n'(x)dx$$

En intégrant par partie on montrera (1)

4.1.1 Polynômes de Legendre associés

Théorème 4.8 *Si z est une solution de l'équation différentielle de Legendre*

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+l(l+1)z=0$$

alors $y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^mz}{dx^m}$ *est une solution de "l'équation différentielle de Legendre associée"*

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0$$

ou bien

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \tag{4.4}$$

Corollaire 4.9 *On définit les polynôme de Legendre associés*

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l(x)}{x^m} \tag{4.5}$$

En utilisant la formule de Rodrigues (4.2) on montre aussi que

$$P_l^m(x)=\frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l \tag{4.6}$$

Les $P_l^m(x)$ sont bien définis pour $-l\leq m\leq l$, on peut aussi que les $P_l^{-m}(x)$ sont reliés aux $P_l^m(x)$ par

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{4.7}$$

Théorème 4.10

$$\begin{aligned}&(1)\ P_l^0(x)=P_l(x)\\&(2)\ P_l^m(x)=0\quad si\ |m|>l\end{aligned}$$

Relation d'orthogonalité

Théorème 4.11

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_l^m(x)dx=\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{nl}$$

Relation de Recurrence

Théorème 4.12

(1) $P_l^{m+1}(x) - \dfrac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_l^m(x) + \{l(l+1) - m(m-1)\} P_l^{m-1}(x) = 0$

(2) $(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)$

(3) $\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) = \dfrac{1}{2l+1}\left\{P_{l+1}^{m+1} - P_{l-1}^{m+1}\right\}$

(4) $\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) = \dfrac{1}{2l+1}\left\{(l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1} - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}\right\}$

4.1.2 Harmoniques sphériques

Dans plusieurs branches de la physique, et surtout pour des problèmes ayants une symmétrie sphériques, on obtient une équation différentielle pour la partie angulaire comme

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\right\}\Psi(\theta,\varphi) = 0 \tag{4.8}$$

Une méthode pour résoudre cette équation est d'écrire

$$\Psi(\theta,\varphi) = \Theta(\theta).\Phi(\varphi)$$

après séparation on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -m^2\Phi(\varphi) \tag{4.9}$$

et

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\right\}\Theta(\theta) = 0 \tag{4.10}$$

La solution de l'equ.(4.9) est donnée par

$$\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$$

si on exige que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ alors m doit être un entier.
Pour l'equ.(4.10), on fait un changement de variable $x = \cos\theta$, donc

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} \Longrightarrow \sin\theta\frac{d}{d\theta} = -(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

l'equ.(4.10) devient donc

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$

c'est l'équation de Legendre associée (4.4). Pour que cette équation accepte une solution finie pour $-1 \leq x \leq 1 (0 \leq \theta \leq \pi)$ il faut que l soit un entier positif($l \in \aleph$ et $m \in \aleph \ -l \leq m \leq l$). Alors

$$\Theta(\theta)=C\ P_l^m(\cos\theta)$$

ou C est une constante. La solution de l'équation angulaire est donc

$$\Psi(\theta,\varphi)=A_1P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}+A_2P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}$$

on définit l'harmonique sphérique

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=aP_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

on doit choisir la constante a telle que

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta Y_l^{m*}(\theta,\varphi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{4.11}$$

on trouve donc

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{(l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}\ P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{4.12}$$

Théorème 4.13

$$\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}^*=(-1)^mY_l^{-m}(\theta,\varphi)$$

Exercices

1) montrer que

$$\int_{-1}^{1}x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)dx=\frac{2l(l+1)}{(4l^2-1)(2l+3)}$$

déduire que la valeur de $\int_0^1 x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)dx$

4.2 Polynômes de Laguerre

L'équation différentielle de Laguerre d'ordre n est donnée par :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \qquad (4.13)$$

avec souvent une condition imposée sur la solution $y(x)$ pour qu'il soit finie pour toute valeur finie de x et que lorsque x tend vers l'infini, $y(x)$ tend aussi vers l'infini mais plus lentement que $e^{x/2}$. On applique la méthode de Frobenius développé dans le premier chapitre ($y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+\lambda}$), pour obtenir l'équation indiciale

$$\lambda^2 = 0$$

et la relation de récurrence

$$a_r = \frac{\lambda + r - n}{(\lambda + r + 1)^2} a_{r-1}$$

Les deux indépendantes solutions sont donc $y(x)|_{\lambda=0}$ et $dy(x)/d\lambda|_{\lambda=0}$. Cependant la deuxième solution diverge pour $x \to 0$. En plus pour $n \in \aleph$ $a_r = 0$ pour $r > n$. La solution est donnée par

$$y(x) = a_0 \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r$$

On définit la solution standard par poser $a_0 = 1$, et on appele les polynômes de Laguerre d'ordre n, notés $L_n(x)$

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r \qquad (4.14)$$

Fonction génératrice

Théorème 4.14

$$\frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

Démonstration on a

$$\frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}}$$

mais on sait que

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!} t^s,$$

donc

$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{1-t} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(r+s)!}{s!(r!)^2} x^r t^{r+s}$$

si on met $r+s=n$ alors $s=n-r$, le coefficient associé à $t^n = t^{r+s}$ est de la forme

$$(-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r$$

et on fait la somme sur toutes les valeurs permises de r, i.e,

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!(r!)^2} x^r = L_n(x)$$

Théorème 4.15

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Démonstration On utilise la règle de Leibniz [1], pour montrer que

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} x^n \right) \cdot \left(\frac{d^r}{dx^r} e^{-x} \right)$$

mais

$$\frac{d^r}{dx^r} e^{-x} = (-1)^r e^{-x}$$

et

$$\frac{d^p}{dx^p} x^q = \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p}$$

si on met $p = n-r$ et $q = n$ on a donc

$$\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} x^n = \frac{n!}{r!} x^r$$

[1]Dans le calcul, la règle générale de Leibniz, généralise la règle du produit (connu également comme la *"règle de Leibniz"*.) Il déclare que si f et g sont des fonctions n-fois différentiables, alors la n^{ième} dérivée du produit $f.g$ est donnée par

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

alors
$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{n!}{r!}x^r e^{-x}$$
et donc
$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r = L_n(x)$$

Expressions éxplicites des polynômes de Laguerre

On donne ici l'expression explicite de quelques polynômes de Laguerre, en se servant du théorème précédant

$$\begin{aligned}
L_0(x) =& 1\\
L_1(x) =& 1-x\\
L_2(x) =& \frac{1}{2!}(x^2-4x+2)\\
L_3(x) =& \frac{1}{3!}(-x^3+9x^2-18x+6)\\
L_4(x) =& \frac{1}{4!}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)
\end{aligned}$$

Théorème 4.16

$$\begin{aligned}
L_n(0) &= 1\\
L'_n(0) &= -n
\end{aligned}$$

Démonstration 1) Si on met $x=0$ dans la fonction génératice, on obtient:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)t^n$$

mais
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

par comparaison
$$L_n(0) = 1 \ \forall n \in \aleph$$

2) Il suffit de remplacer x par 0 dans l'équation différentielle de Laguerre

$$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

pour obtenir

$$\frac{dL_n}{dx}|_{x=0} = -nL_n(0)$$

mais comme$L_n(0) = 1$ on

$$L_n'(0) = -n$$

Relation d'orthogonalité

Théorème 4.17

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

Démonstration En utilisant la fonction génératrice (Théorème 4.14), et si on considère l'intégrale

$$I = \int e^{-x} \frac{\exp \dfrac{-xt}{1-t}}{1-t} \frac{\exp \dfrac{-xs}{1-s}}{1-s} dx$$

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int \exp -x \left(1 - \frac{t}{1-t} - \frac{s}{1-s}\right) dx$$

$$I = \frac{1}{1-st}$$

et finalement[2] on a

$$I = \sum_{n=0}^\infty t^n s^n = \sum_{n,m=0}^\infty t^n s^m \delta_{nm}$$

d'autre part on a

$$I = \sum_{n,m=0}^\infty \int\limits_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx t^n s^m$$

par comparaison, on a

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

[2]On a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$$

Relation de recurrence

Théorème 4.18

$$\begin{array}{ll}(1) & (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\\ (2) & xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)\\ (3) & L'_n(x) = -\sum r = 0^{n-1} L_r(x).\end{array}$$

Démonstration (1) Pour démontrer ce théorème, on se sert de la fonction génératrice (théorème 4.14) et en dérivant les deux côtés par rapport à t, puis on doit regrouper les coefficients de t^n pour la démontrer(Exercice).
(2) pour ça on fait la dérivé par rapport x de la fonction génératrice, puis on derive par rapport x (1) et après regroupement on obtient

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \qquad L'_{n-1}(x) = L'_n(x) + L_{n-1}(x)$$

et on simplifie pour obtenir

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

(3) Exercice

4.2.1 Polynômes de Laguerre associés

L'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{4.15}$$

est dite *"équation différentielle de Laguerre associée"*

Théorème 4.19 *si $z(x)$ est une solution de équation différentielle de Laguerre d'ordre n+k (equ.4.13), alors $\frac{d^kz}{dx^k}$ satistait l'équation différentielle de Laguerre associée (equ.4.15).*

Démonstration Comme $z(x)$ est une solution de équation différentielle de Laguerre d'ordre $n+k$, ç-à-d

$$x\frac{d^2z}{dx^2} + (1-x)\frac{dz}{dx} + (n+k)z = 0$$

si on dérive k-fois cette équation et en vertu du théorème de Leinitz on a

$$x\frac{d^{k+2}z}{dx^{k+2}} + k\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} + (1-x)\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} - k\frac{d^k z}{dx^k}(n+k)\frac{d^k z}{dx^k} = 0$$

en regroupant, pour obtenir

$$x\frac{d^{k+2}z}{dx^{k+2}} + (k+1-x)\frac{d^{k+1}z}{dx^{k+1}} + n\frac{d^k z}{dx^k} = 0$$

ainsi $\frac{d^k z}{dx^k}$ satisfait l'équation différentielle de Laguerre associée (equ.4.15)

On définit les polynômes de Laguerre associés solutions de l'équation 4.15 comme

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \tag{4.16}$$

Théorème 4.20

$$L_n^k(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} x^r \tag{4.17}$$

Démonstration A partir du théorème (4.19) et de l'équation 4.14 on a

$$L_{n+k} = \sum_{r=0}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2} x^r$$

si on dérive k-fois on obtient

$$\frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} = \sum_{r=0}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2} \frac{d^k}{dx^k} [x^r]$$

mais

$$\frac{d^k x^r}{dx^k} = r(r-1)(r-2)\cdot(r-k+1)x^{r-k} = \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \quad r \geq k$$

et

$$\frac{d^k x^r}{dx^k} = 0 \quad r < k$$

donc

$$\frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} = \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r-k)!r!} x^{r-k}$$

on pose $r - k = p$

$$\frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} = (-1)^k \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{(n+k)!}{(n-p)!(p+k)!p!} x^p$$

donc

$$(-1)^k \frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} = (-1)^{2k} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{(n+k)!}{(n-p)!(p+k)!p!} x^p$$

par définition equ.(4.16)

$$(-1)^k \frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{(n+k)!}{(n-p)!(p+k)!p!} x^p = L_n^k(x)$$

Fonction génératrice des polynômes de Laguerre associés

Théorème 4.21

$$\frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n$$

Démonstration Du théorème (4.14) on a

$$\frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) t^m$$

on dérive k-fois les deux membres par rapport à x

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{d^k}{dx^k} L_m(x)$$

mais

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)} = (-1)^k \left(\frac{t}{1-t}\right)^k \frac{\exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)}$$

et

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{d^k}{dx^k} L_m(x) = \sum_{m=k}^{\infty} t^m \frac{d^k}{dx^k} L_m(x)$$

posons $n = m - k$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{d^k}{dx^k} L_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+k} \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

mais

$$\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = (-1)^k L_n^k(x)$$

alors

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{d^k}{dx^k} L_m(x) = (-1)^k t^k \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x)$$

et on a finalement

$$\frac{\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n$$

Théorème 4.22

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+k}\right)$$

Théorème 4.23

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm}$$

Relations de recurrence

Théorème 4.24

(1) $L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = L_n^k(x)$

(2) $(n+1) L_{n+1}^k(x) = (2n + k + 1 - x) L_n^k(x) - (n+k) L_{n-1}^k(x)$

(3) $x {L_n^k}'(x) = n L_n^k(x) - (n+k) L_{n-1}^k(x)$

(4) ${L_n^k}'(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)$

(5) ${L_n^k}'(x) = -L_{n-1}^{k+1}$

Exercices

1)Démontrer que $L_n^{k+l+1}(x+y) = \sum\limits_{r=0}^{n} L_r^k(x) L_{n-r}^l(y)$

2) Montrer que

$$J_m(2\sqrt{xt}) = e^{-t}(xt)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{(n+m)!} t^n$$

où J_m est la fonction de Bessel d'ordre m ($m \in \aleph$).

3) Montrer que

$$\int\limits_x^{\infty} e^{-t} L_n^k(t)dt = e^{-x}\left\{L_n^k(x) - L_{n-1}^k(x)\right\}$$

4.3 Polynôme d'Hermite

Les polynômes d'Hermite sont solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \tag{4.18}$$

et en générale, on cherches des solutions qui sont finies pour toutes les valeurs finies de x et comme le point $x = 0$ est un point ordinaire pour cette équation la solution $y(x)$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on obtient, après remplacement de $y(x)$ dans 4.18

$$a_{r+2} = \frac{2(r-n)}{(r+1)(r+2)} a_r$$

si $n \in \aleph$ (un nombre entier) les coefficients paires avec un indice $r > n$ sont tous nuls et $y(x)$ est donné par

$$y(x) = a_n \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2.2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2.4} x^{n-4} + \cdots \right.$$
$$\left. +(-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2r+1)}{2^r.2.4\cdots 2r} x^{n-2r} + \cdots \right\}$$

ou bien

$$y(x) = a_n \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{n!}{2^r r!(n-2r)!} x^{n-2r}$$

avec

$$[\frac{n}{2}] = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{si n est paire} \\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{si n est impaire} \end{cases}$$

Ainsi les polynôme d'Hermite d'ordre n sont définis

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r} \tag{4.19}$$

Fonction génératrice

Théorème 4.25

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \tag{4.20}$$

Démonstration On veut calculer les facteurs de t^n dans le dévelopement de e^{2tx-t^2}, maintenant

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2x)^r}{r!s!} t^{r+2s}$$

Pour une valeur fixe de s on cherche la valeur de r telle que $r + 2s = n$. Les valeurs possible de s sont comprise entre 0 et $[\frac{n}{2}]$ (pour que r soit supérieur à 0). Par conséquence le coefficient de t^n est

$$\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{1}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r} = \frac{1}{n!} H_n(x)$$

par définition

Théorème 4.26 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Démonstration Par l'utilisation de la fonction génératrice et le développement de Taylor

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n F(t)}{dt^n} \right)_{t=0} \frac{t^n}{n!}$$

on a donc

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2}\right]_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$

mais

$$\frac{\partial f(x-t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x-t)}{\partial x}$$

donc

$$\frac{\partial^n f(x-t)}{\partial t^n} = (-1)^n \frac{\partial^n f(x-t)}{\partial x^n}$$

alors

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

Expressions explicites des polynômes d'Hermite

En utilisant soit la définition or le théorème 4.26, on donne les expressions de quelque polynômes d'Hermite

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Théorème 4.27 $H_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$ $\qquad H_{2n+1}(0) = 0$

Orthogonalité des polynômes d'Hermite

Théorème 4.28

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{n,m}.$$

Démonstration on a

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

et

$$e^{2sx-s^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x)$$

on peut montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2sx-s^2} e^{2tx-t^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n s^n}{n!}$$

mais aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2sx-s^2} e^{2tx-t^2} dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n!m!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

Par conséquence

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}.$$

Théorème 4.29

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \; n \in \aleph^* \qquad H_0'(x) = 0$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \; n \in \aleph^* \qquad H_1(x) = 2xH_0(x)$$

Fonction de Weber-Hermite

Une équation différentielle étroitement liée à l'équation d'Hermite (equ4.18) est

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda - x^2)y = 0 \tag{4.21}$$

Si on fait le changement de fonction $y(x) = z(x)e^{-x^2/2}$ on obtient

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + (\lambda - 1)z = 0$$

C'est une équation d'Hermite (4.18) avec $2n = \lambda - 1$. De même on cherche des solutions finies pour toute valeur finie de x on obtient, par analogie et avec la condition que $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ est un entier, la fonction de Weber-Hermite d'ordre n

$$\Psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{4.22}$$

Exercices

1) Montrer que si $m < n$ on a

$$\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

2) evaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

3) montrer que

$$P_n(x) = \frac{2}{n!\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt) dt$$

4.4 Polynômes de Chebyshev

On définit les polynômes de Chebyshev de premier espèse $T_n(x)$ et de deuxième espèse $U_n(x)$ par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{4.23}$$

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) \tag{4.24}$$

pour $n \in \aleph$

Théorème 4.30

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

$$U_n(x) = -\frac{\imath}{2}\left[\left(x + \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n - \left(x - \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

Démonstration il suffit de mettre $x = \cos\vartheta$ dans les définition de T_n et U_n (déf.4.23 et4.24) pour obtenir

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n \arccos[\cos(\vartheta)]) = \cos(n\vartheta) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(e^{\imath\vartheta}\right)^n + \left(e^{-\imath\vartheta}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\cos\vartheta + \imath\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta - \imath\sin\vartheta)^n\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x + \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - \imath\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

De même pour $U_n(x)$

Théorème 4.31

$$T_n(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{(2r)!(n-2r)!}\left(1-x^2\right)^r x^{n-2r}$$

$$U_n(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!}\left(1-x^2\right)^{r+\frac{1}{2}} x^{n-2r-1}$$

Pour démontrer ces propriétés on utilise le théorème 4.30 et la formule du binôme de Newton[3]

Théorème 4.32 *$T_n(x)$ et $U_n(x)$ sont deux indépendantes solutions de l'équation différentielle:*

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \tag{4.25}$$

Fonction génératrice

Théorème 4.33

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}=T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n \tag{4.26}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n \tag{4.27}$$

Relations d'orthogonalité

Théorème 4.34

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi/2 & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi/2 & n=m\neq 0\\ 0 & n=m=0\end{cases}$$

[3]Pour tout entier $n\in\aleph$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}y^k$$

Relations de recurrence

Théorème 4.35

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

$$(1 - x^2)T_n'(x) = -nT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

$$(1 - x^2)U_n'(x) = -nT_n(x) + nU_{n-1}(x)$$

Exercices

1) Montrer que

$$\sqrt{1 - x^2}T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$$

2) montrer que

$$\sum_{r=0}^{n} T_{2r}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}U_{2n+1}(x)\right)$$

4.5 Polynômes de Gegenbauer

Il est possibe de définir un nouveau ensembles des polynômes par la généralisation de quelque propriétés déja connues pour les polynômes de Legendre, d'Hermite ou de Chebyshev. On donne ici, une généralistion particulière de la fonction génératrice des polynômes de Legendre (théorème 4.1), en difinissant le polynôme de Gegenbauer de degré n et d'ordre α ($C_n^\alpha(x)$) comme les coefficients de t^n de developpement de la fonction

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha}$$

(on note que dans le cas particulier $\lambda = \frac{1}{2}$ $P_n(x)$ est effectivement égale à $C_n^{\frac{1}{2}}(x)$) et donc

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) t^n. \tag{4.28}$$

On peut montrer que ce developpement est valable pour $|t| < 1$, $\alpha > -\dfrac{1}{2}$ et $|x| \leq 1$.

Théorème 4.36 *si* $\alpha \neq 0$

$$C_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(\alpha) k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

et

$$C_n^0(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Formule de Rodriguez

Théorème 4.37

$$C_n^\alpha(x) = \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2n+2\alpha)} (1-x^2)^{-\alpha+1/2} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+\alpha-1/2}\right].$$

Equation différentielle

Théorème 4.38 *Les polynômes de Gegenbauer sont solutions de l'équation différentielle*

$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0$$

Relation d'orthogonalité

Théorème 4.39 *Pour* $\alpha \neq 0$

$$\int_{-1}^{1} C_n^\alpha(x) C_m^\alpha(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}\delta_{nm}$$

sinon

$$\int_{-1}^{1} C_n^0(x) C_m^0(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2\pi}{n^2}\delta_{nm}$$

Relations de recurrence

Théorème 4.40

$$\begin{aligned}
&(1)\ (n+2)C_{n+2}^\alpha(x) = 2(\alpha+n+1)xC_{n+1}^\alpha(x) - (2\alpha+n)C_n^\alpha(x)\\
&(2)\ nC_n^\alpha(x) = 2\alpha\left\{xC_{n-1}^{\alpha+1}(x) - C_{n-2}^{\alpha+1}(x)\right\}\\
&(3)\ (n+2\alpha)C_n^\alpha(x) = 2\alpha\left\{C_n^{\alpha+1}(x) - xC_{n-1}^{\alpha+1}(x)\right\}\\
&(4)\ nC_n^\alpha(x) = (n-1+2\alpha)xC_{n-1}^\alpha(x) - 2\alpha(1-x^2)C_{n-2}^{\alpha-1}(x)\\
&(5)\ \left[C_n^\alpha(x)\right]' = 2\alpha C_{n+1}^{\alpha+1}(x)
\end{aligned}$$

Exemples

(1) Montrer que

$$C_n^\alpha(1) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{n!\Gamma(2\alpha)} \quad C_n^0(1) = \frac{2}{n}$$

4.6 Polynômes de Jacobi

On peut aussi généraliser les polynômes de Legendre par la généralisation de la fonction génératrice et on définit les polynômes de Jacobi ($P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$) comme étant les coefficients de t^n dans le developpement de

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\left\{1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\alpha}\left\{1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\beta}} \tag{4.29}$$

Autrement dit

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\left\{1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\alpha}\left\{1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$

On voit que pour $\alpha = \beta = 0$ les polyômes de Jacobi se réduisent au polynômes de Legendre

$$P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$$

Théorème 4.41

(1) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(r+\alpha+1)\Gamma(n+\beta-r+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}$

(2) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(r+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r$

(3) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(r+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^r$

Théorème 4.42

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}$$

Relations de recurrence

Théorème 4.43

(1) $2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$

$$(2n+\alpha+\beta-1)\Big\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2\Big\}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

(2) $[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = \dfrac{1}{2}(1+\alpha+\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$

(3) $(x+1)[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x)$

(4) $(x-1)[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x)$

Equation différentielle

Théorème 4.44 *Le polynôme de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisfait l'équation différentielle suivante*

$$(1-x^2)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Les polynômes de Legendre, Gegenbauer et Chebyshev sont des polynômes particuliers de Jacobi

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \tag{4.30}$$

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})}P_n^{(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})}(x); \tag{4.31}$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{C_n^{\lambda}(x)}{\lambda} \tag{4.32}$$

et

$$U_n(x) = \sqrt{(1-x^2)}C_{n-1}^{1}(x) \tag{4.33}$$

Exercices

1) Montrer que :

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^{\lambda}(x) = 2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{n-m}^{\lambda+m}(x)$$

Sachant que :$C_n^{\lambda}{}'(x) = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(x)$.
2) Montrer que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)^n\right\}\ .$$