CHAPITRE 01 : Généralités sur les signaux

1-1 Définition d'un signal :

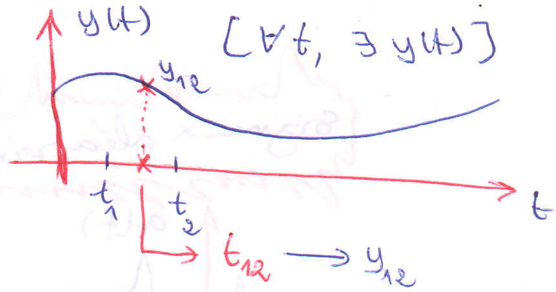
un signal est la Représentation physique de l'information qu'il convoi de sa source à son déstinataire

* grandeurs physiques (éléctriques V, i, E , mécaniques F, Ce , chimiques T ... etc)
* la description mathématique des signaux est l'objectif fondamental de la théorie du signal { Amplitude / fréquence

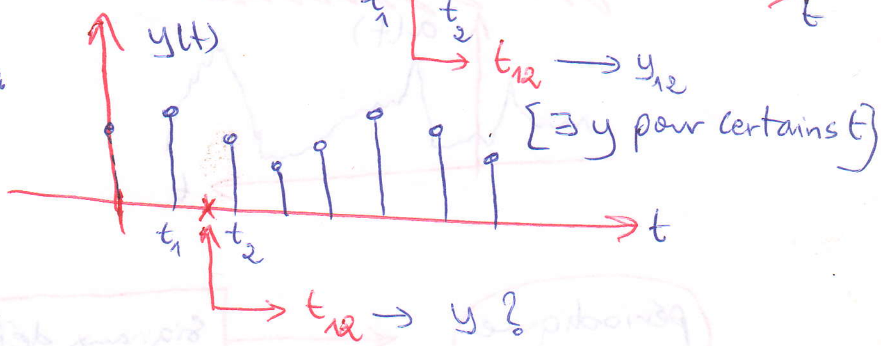
1-2 Classification des signaux

1. le signal est considéré comme une fonction du temps celon la variable "t", on a 2 catégorie :

* Les signaux analogiques (continues) :



* Les signaux numériques (discrets) :



2. on considérons la nature de l'évolution du signal en fonction du temps on peut remarque qu'il existe 2 catégorie

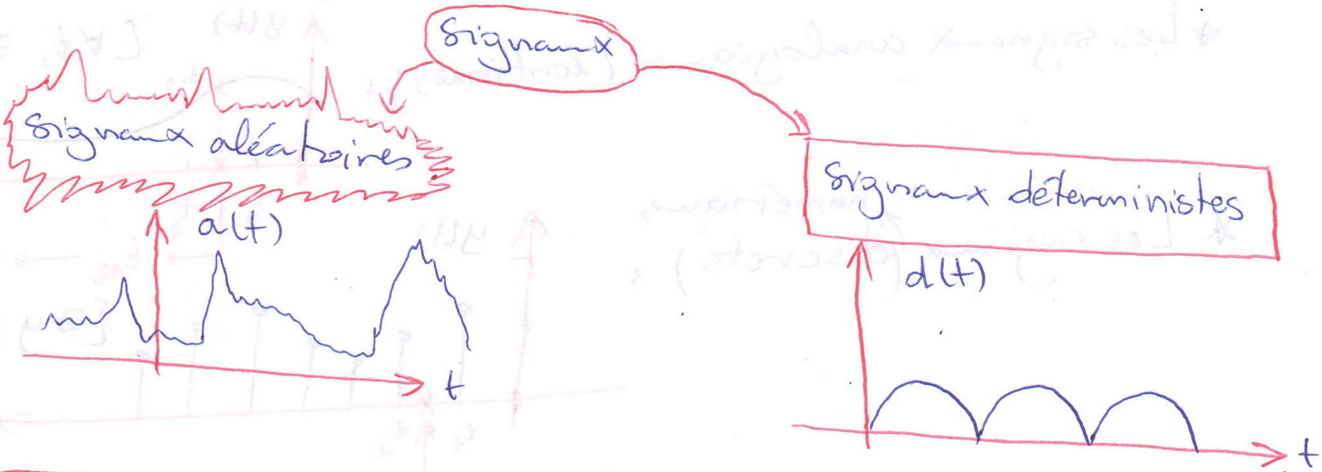
Signaux { déterministe / aléatoire

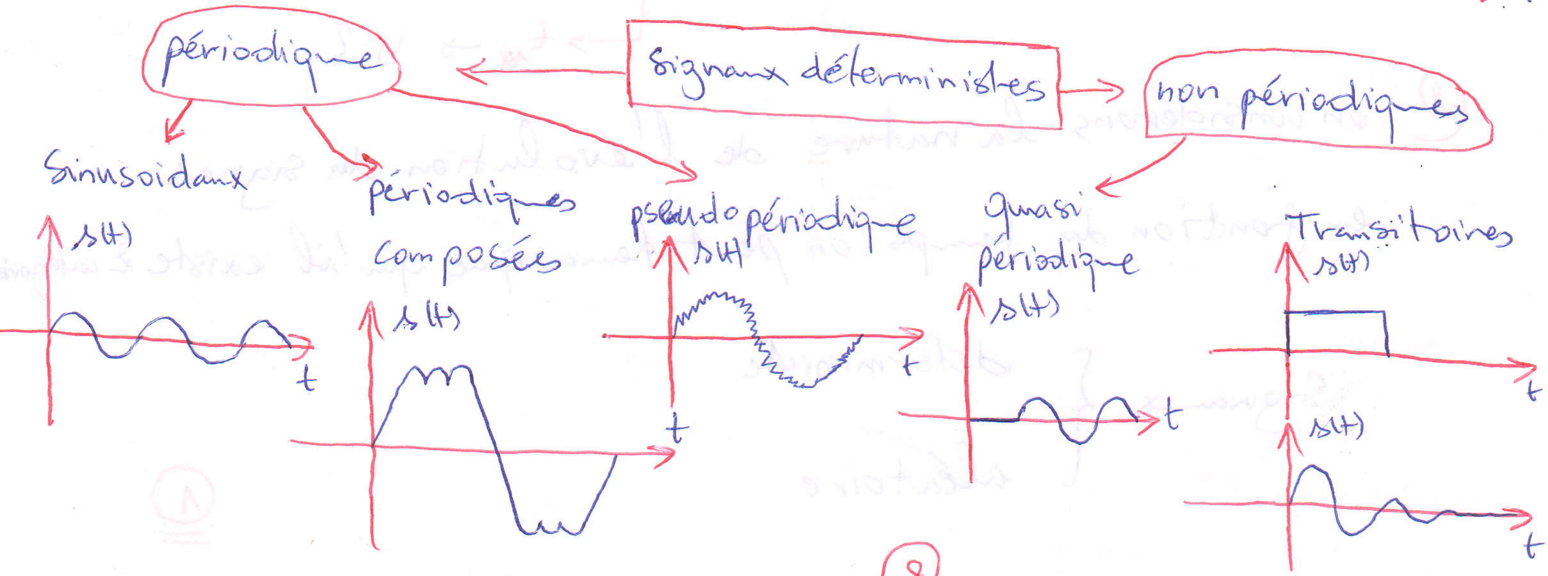
a) Signaux déterministes :

l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrire par un modèle mathématique [$\sin(t)$].
Les signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat.

b) Signaux aléatoires :

le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.





aléatoires

stationnaire → Ergodique, non Ergodique

non stationnaire

{ ppts statistique (S)
{ ppts temporelle (T)

si $S = T \Rightarrow$ Ergodique
$S \neq T \Rightarrow$ non Ergodique

3 classification et étude énergitique des signaux

modes de classification :

3-1 classification phénoménologique → déterministes
→ aléatoires

3-2 ″ morphologique → continue (analogique)
→ discret (numérique)

3-3 ″ spectrale → hautes fréquences
→ bases fréquences

3-4 ″ dimensionnelle → nbres de variables (2, 3 ...)

3-5 ″ Energitique → signaux à energie finie (Signaux transitoires)
→ ″ ″ puissance moyenne finie (signaux periodique)

* en Electricité $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ [$W = V \cdot A$]
↳ puissance instantané

$v(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow p(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{1}{R} \cdot v^2(t)$

pour $R = 1\,\Omega \Rightarrow p(t) = i^2(t) = x^2(t)$ [carré d'un signal]

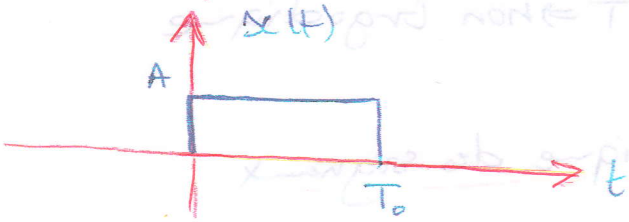
$p = \frac{dE}{dt} \Rightarrow E = \int p(t)\,dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)|\,dt$ {energie Totale}

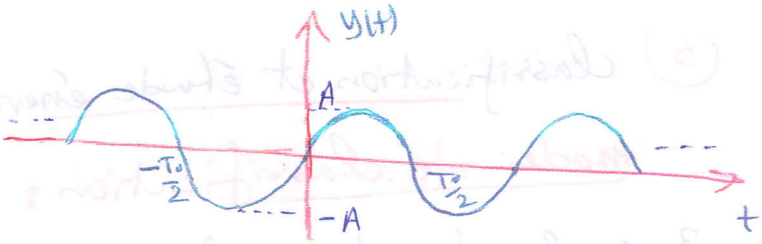
puissance moyenne $\longrightarrow P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x^2(t)|\,dt$

* Signaux à Energie finie $\Rightarrow E_x < \infty$ bornée $\Rightarrow$ la puissance moyenne $= 0$

* Signaux à puissance moyenne finie $\Rightarrow 0 < P_x < \infty$ bornée $\Rightarrow$ Energie infinie

Exemple Soient les 2 signaux :





① la différence entre To pour $x(t)$ et $y(t)$

② ~ ~ ~ $x(t)$ et $y(t)$

③ calculer l'energie et la puissance moyenne de $x(t)$ et $y(t)$

Sol :

① To pour $x(t)$: largeur et pour $y(t)$: période

② $x(t)$ non periodique mais deterministe (transitoire)

$y(t)$ deterministe, periodique.

③ $E_x = \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} A^2 dt = A^2 \Rightarrow P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{E_x}{T_0} = 0$

$P_y = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |y(t)|^2 dt = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin^2(t)\, dt = \frac{A}{2} < \infty \neq 0$

$\Rightarrow E_y = \infty$

devoir) Exo Soient les signaux : $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ et $y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

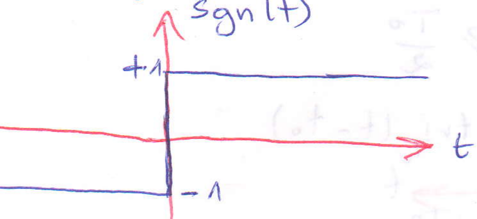
① calculer l'energie de ces signaux

② calculer la puissance d'interaction $P_{xy} = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) y(t)\, dt$

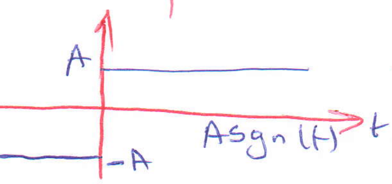
③ tracer la courbe P_{xy} en fonction de φ.

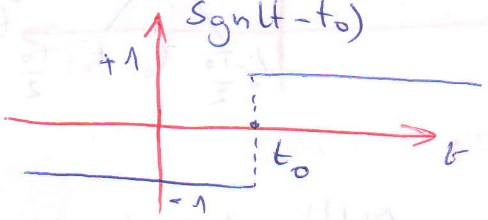
1-3 Signaux particuliers :

① fonction Signe :



$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} = \frac{t}{|t|} \quad \text{pour } t \neq 0$$





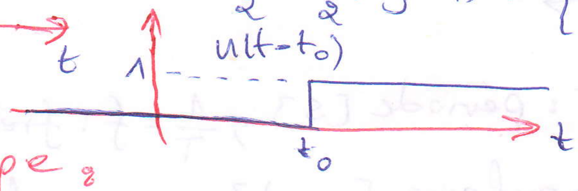
décalage en t

$$\mathrm{sgn}(t-t_0) = \begin{cases} +1 & t > t_0 \\ -1 & t < t_0 \end{cases}$$

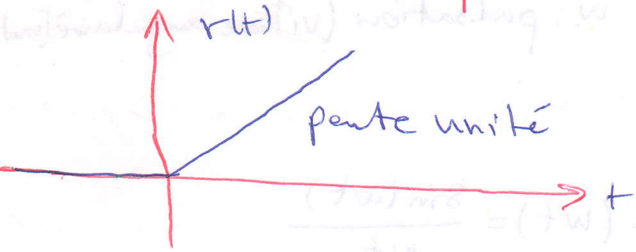
② fonction échelon :

décalage en y

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



③ fonction rampe :

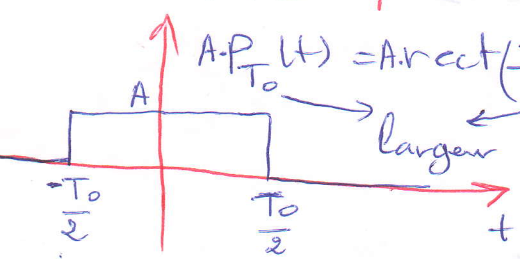


$$r(t) = t \cdot u(t) = \int u(t)\,dt \Rightarrow u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad \text{pour } t \neq 0$$

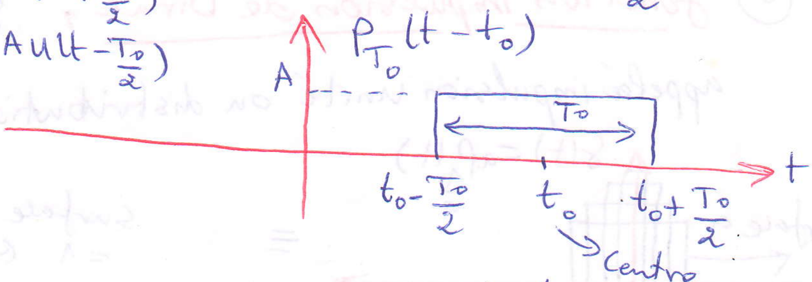
④ fonction porte (rectangulaire)

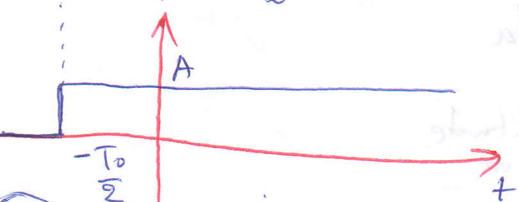
$$A \cdot P_{T_0}(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} A & t \in \left[-\frac{T_0}{2} ; \frac{T_0}{2}\right] \quad |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{si non} \quad |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

largeur

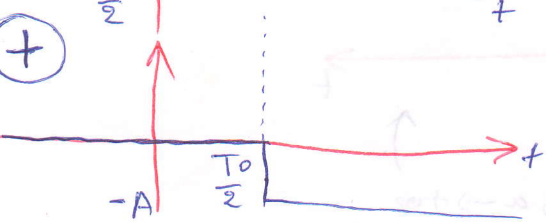


$$= A\,u\left(t+\frac{T_0}{2}\right) - A\,u\left(t-\frac{T_0}{2}\right)$$





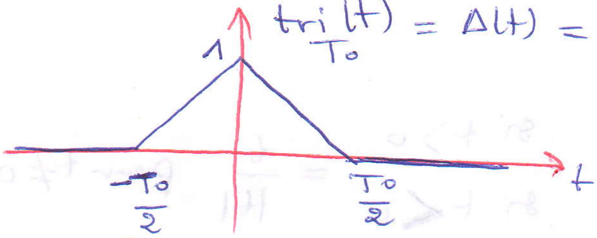
+

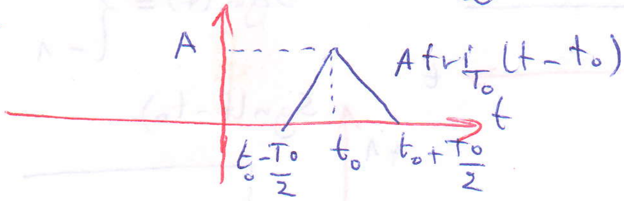


$$A \cdot P_{T_0}(t-t_0) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T_0}\right)$$

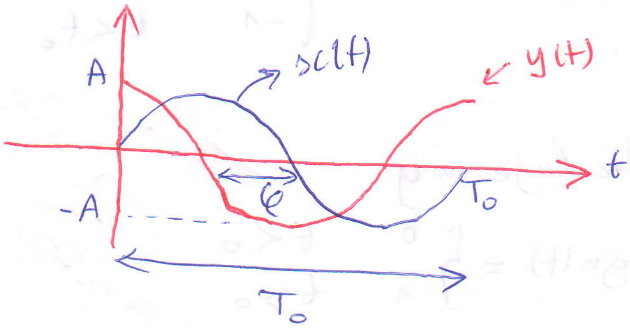
⑤ fonction triangulaire :

$$\mathrm{tri}_{T_0}(t) = \Delta(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T_0}|t| & |t| \leqslant \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| \geqslant \frac{T_0}{2} \end{cases}$$





⑥ fonction sinusiodale :



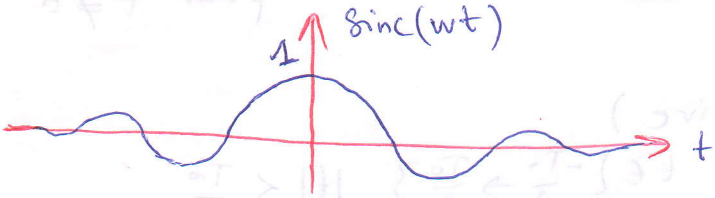
$$x(t) = A\sin(wt)$$

$$y(t) = A\sin(wt + \varphi)$$

A : amplitude ; T : période [s] ; $\frac{1}{T} = f$: fréquence [Hz, s^{-1}] ;
φ : déphasage angulaire [rad] ; w : pulsation (vitesse angulaire [rad/s])
wt : Angle [rad].

⑦ fonction sinus-cardinal :

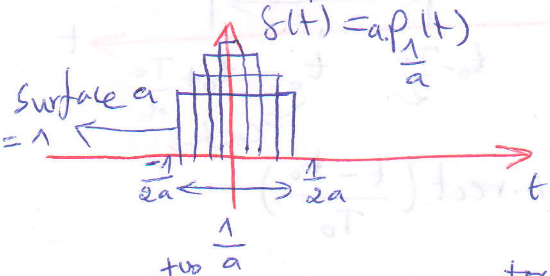
$$\mathrm{sinc}(wt) = \frac{\sin(wt)}{wt}$$



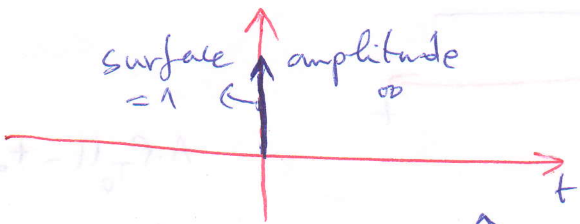
$$\mathrm{sinc}(0) = 1$$

⑧ fonction impulsion de Dirac : δ(t)

appelée impulsion unité ou distribution delta

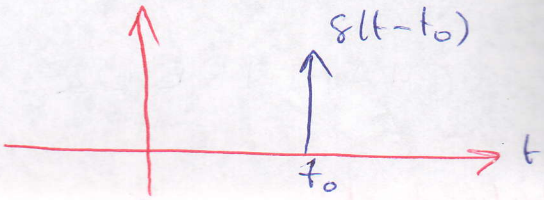


≡



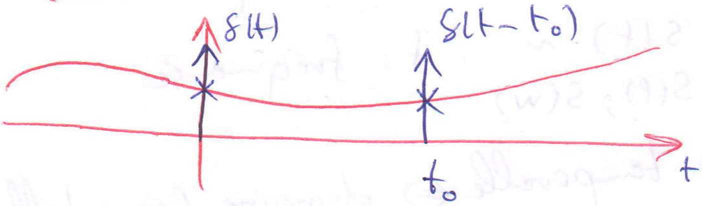
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} a\,p_{\frac{1}{a}}(t)\,dt \;/\; \text{si } \frac{1}{a} \to 0 \Rightarrow a \to +\infty$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \overset{\text{surface}}{1}\ (\infty) & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$$



RQ : $u(t) = \int \delta(\tau)\, d\tau \Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

ppts :



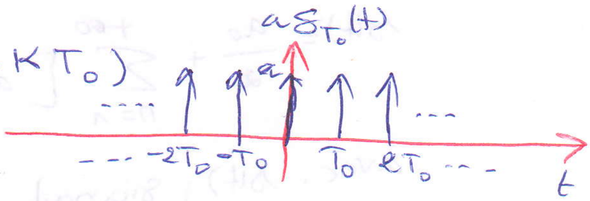
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t)\, dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0) = x(t_0)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

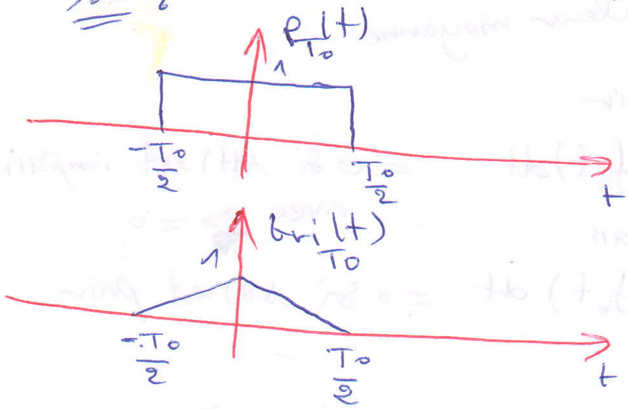
9 opérateur de répétition :

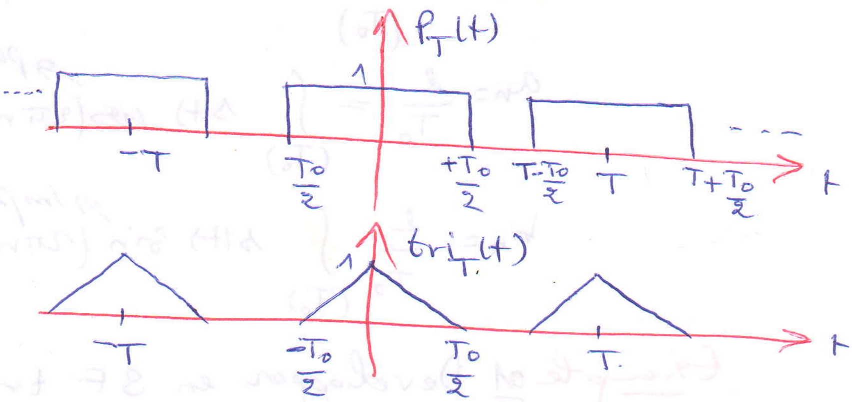
$\longrightarrow$ $\delta_{T_0}(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a\,\delta(t-KT_0)$



Exemple représenter la répétition de $p_{T_0}(t)$ et $tri_{T_0}(t)$ pour une periode $T > T_0$; puis donner $p_T(t)$ et $tri_T(t)$

Sol :





$$p_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} p_{T_0}(t-KT) \quad ; \quad tri_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} tri_{T_0}(t-KT)$$

* quel est la différence entre $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} p_{T_0}(t-KT)$ et $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} p_{T_0}(t+KT)$?