CHAPITRE 02 : Analyse de Fourier

2-1 Introduction

: Il y a 2 domaines de representation des signaux

1. representation temporelle : $s(t)$ avec : t : temps
2. ~ fréquentielle : $S(f)$ ~ ; f : fréquence
   $S(P)$; $S(w)$

Les difficultées dans le domaine temporelle ⟺ domaine fréquentielle

2-2 Series de Fourier : pour les signaux périodiques

a) elle est donnée par :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) \right]$$

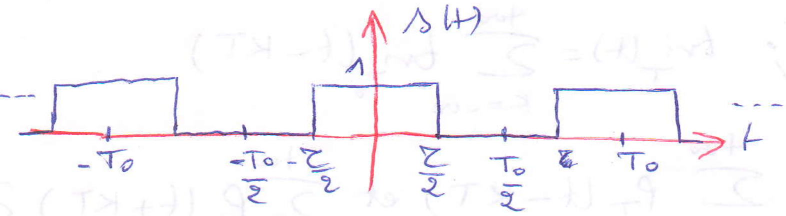
avec : $s(t)$: signal periodique de période T_0

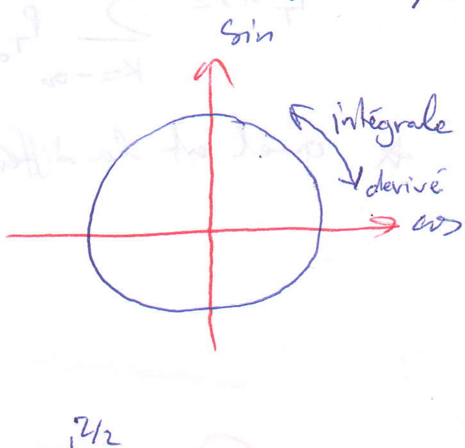
avec : $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t)\, dt$ → la valeur moyenne

$$a_n = \frac{2}{T_0} = \int_{(T_0)} s(t) \underset{\nearrow \text{pair}}{\cos(2\pi n f_0 t)}\, dt \quad = 0 \text{ si } s(t) \text{ est impair avec } a_0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \underset{\nearrow \text{impair}}{\sin(2\pi n f_0 t)}\, dt \quad = 0 \text{ si } s(t) \text{ est pair}$$

Exemple 01 Developper en SF trigonometrique ($1^{ère}$ forme) :





$s(t)$: pair ⟹ $b_n = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1\, dt = \frac{2}{T_0}\tau$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot \cos(2\pi n f_0 t)\, dt = \frac{2}{T_0 2\pi n f_0} \sin 2\pi n f_0 t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2}{\pi n} \sin \pi n f_0 \tau$$

9

donc : $s(t) = \frac{1}{T_0}\tau + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin(\pi n f_0 \tau)\right)$

(b) SF alternative ($2^{ème}$ forme) : elle est déffinie par :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$$

avec : $A_0 = \frac{a_0}{2}$; $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}$

(c) SF complexe ($3^{ème}$ forme) : elle est déffinie par :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

avec : $C_n = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ / $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$

$$C_n = \frac{1}{T_0}\left[\int_{(T_0)} s(t)\cos 2\pi n f_0 t\, dt - j\int_{(T_0)} s(t)\sin 2\pi n f_0 t\, dt\right]$$

avec : $\begin{cases} a_n = 2\,\mathrm{Re}\{C_n\} \\ b_n = -2\,\mathrm{Im}\{C_n\} \\ C_0 = \frac{a_0}{2} \end{cases}$; $C_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$

Exemple 2 refaire l'exemple 1 par la forme 3 (complexe)

Sol :

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\left|\frac{-e^{-j2\pi n f_0 t}}{j2\pi n f_0}\right|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$C_n = \frac{-1}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi n f_0 \frac{\tau}{2}}}{j2\pi n f_0} - \frac{e^{j2\pi n f_0 \frac{\tau}{2}}}{j2\pi n f_0}\right] = \frac{1}{T_0}\,\frac{\sin \pi n f_0 \tau}{\pi n f_0} \times \frac{\tau}{\tau} = \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(\pi n f_0 \tau)$$

$$C_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{\cancelto{0}{b_n}}{2} = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n f_0 \tau) \times \frac{f_0\tau}{f_0\tau} = \frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(\pi n f_0 \tau)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(\pi n f_0 \tau)\, e^{j2\pi n f_0 t}$$

E-3 Transformée de Fourier :

ⓐ la transformée d'un signal $s(t)$ est définie par :

$$\boxed{S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

Laplace

$$S(p) = \int_{0}^{+\infty} s(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad pt \to j\omega t = j2\pi f t$$

$$p \Leftrightarrow f$$

ⓑ Relation inverse :

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}$$

$$s(t) \underset{TF^{-1}}{\overset{TF}{\rightleftarrows}} S(f) \qquad s(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\rightleftarrows}} S(p)$$

Exemple 01 : ① trouver la TF de : $s(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$; $\alpha > 0$

$$0 \longrightarrow +\infty$$

Sol :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int e^{-(\alpha + j2\pi f)t}\, dt$$

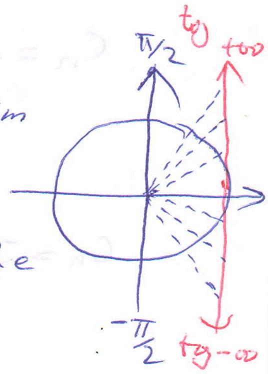
$$= \left. \frac{-e^{-(\alpha + j2\pi f)t}}{\alpha + j2\pi f} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

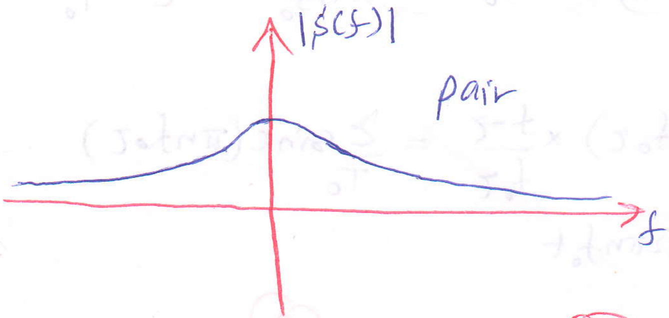
② Calculer le spectre d'amplitude et de phase de $S(f)$

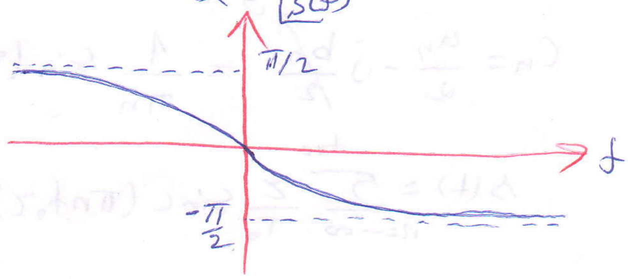
Sol :

$$|S(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}} \; ; \quad \angle S(f) = \operatorname{arctg} \frac{0\,(Im)}{1\,(Re)} - \operatorname{arctg} \frac{2\pi f\,(Im)}{\alpha\,(Re)}$$

$$= -\operatorname{arctg} \frac{2\pi f}{\alpha}$$







ppts :

① **Linearité :** si $s_1(t) \xrightarrow{TF} S_1(f)$ et $s_2(t) \xrightarrow{TF} S_2(f)$ $\Rightarrow$

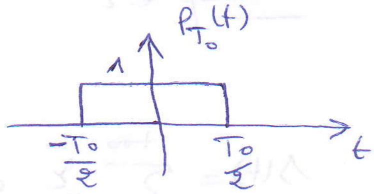
$$a\, s_1(t) + B\, s_2(t) \xrightarrow{TF} a\, S_1(f) + B\, S_2(f)$$

Exemple : $3e^{-at}u(t) + 2\,p_3(t) \Rightarrow S(f) = \frac{3}{a+j2\pi f} + 2.3\,\text{sinc}(3\pi f)$

② **Symetrie :** si $s(t) \xrightarrow{TF} S(f) \Rightarrow S(t) \xrightarrow{TF} s(f) = s(-f)$

Exemple : trouver la TF de $s(t) = p_T(t)$ et la TF de $S(t) = \text{sinc}(2\pi f_0 t)$
$= \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$

Sol :



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1.\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt$$

$$= \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f}\right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \frac{e^{j\pi f T_0} - e^{-j\pi f T_0}}{2j\,\pi f} \rightarrow \sin(\pi f T_0)$$

$$= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi f T_0) \times \frac{T_0}{T_0} = T_0\,\text{sinc}(\pi f T_0)$$

$P_{T_0}(t) \xrightarrow{TF}$ durée $\times$ sinc ($\pi f \times$ durée)
↳ durée

$TF\{\text{sinc}(2\pi f_0 t)\}$

ppt (Symetrie) $\Rightarrow P_{T_0}(t) \xrightarrow{TF} T_0\,\text{sinc}(\pi f T_0)$

$$\frac{2f_0}{2f_0}\,\text{sinc}(\pi t(2f_0)) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2f_0}\,P_{2f_0}(f) = \frac{1}{2f_0}\,P_{2f_0}(-f)$$

pair

③ **cas particuliers :**

3-1 **TF de l'impulsion de dirac $\delta(t)$:**

$$TF\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = e^{-j2\pi f . 0} = 1$$

↳ ppt de $\delta(t)$

$\delta(t) \xrightarrow{TF} 1$

$TF\{1\} = ?\ \Rightarrow S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1.\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f}\right|_{-\infty}^{+\infty} = ?$

ppt (symetrie) :

$1 \xrightarrow{TF} \delta(-f) = \delta(f)$

3-2 TF d'un signal periodique :

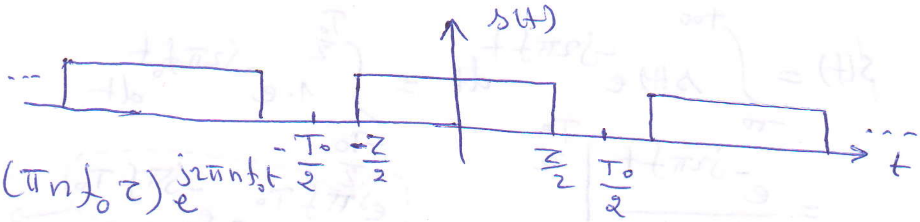
si $s(t)$ est un signal periodique de periode T_0

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{avec : } C_n = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi t (f - n f_0)} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, \delta(f - n f_0)$$

Exemple :



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}(\pi n f_0 \tau) e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}(\pi n f_0 t)\, \delta(f - n f_0)$$; un signal periodique caractérisé par son C_n.

④ Similitude : si $s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$ alors :

$$s(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

démonstration : on pose $at = u \Rightarrow t = \frac{1}{a} u \Rightarrow dt = \frac{1}{a} du$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} s(u) e^{-j2\pi \frac{f}{a} u} du = \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \rightarrow \text{pour } a > 0$$

$$= -\frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right) \rightarrow \text{si } a < 0$$

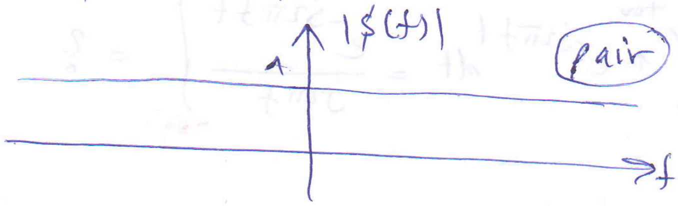
⑤ Translation en temps : si $s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$ alors

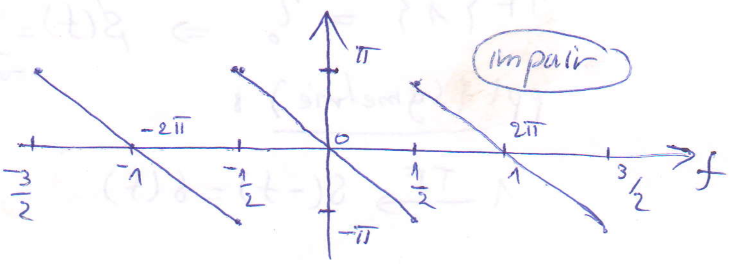
$$s(t \pm t_0) \xrightarrow{TF} S(f)\, e^{\pm j2\pi f t_0}$$

Exemple : trouver la TF de : $\delta(t-1) \longrightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi f}$

* représenter le spectre d'amplitude et de phase.

$|S(f)| = 1$; $\angle S(f) = -2\pi f$ $\qquad -\pi \leq \text{phase} \leq \pi$





⑥ Translation en fréquence : si $s(t) \xrightarrow{TF} \hat{S}(f)$ alors :

$$s(t)\cdot e^{\mp j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} \hat{S}(f \pm f_0)$$

Exemple : trouver la TF de : $s(t) = \cos 2\pi f_0 t$

Sol : $s(t) = \frac{1}{2} e^{+j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$

$\hat{S}(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$; $\sin 2\pi f_0 t \xrightarrow{TF}$?

$$P_{T_0}(t)\, e^{+j2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} T_0 \,\mathrm{sinc}(\pi T_0 (f - f_0))$$

⑦ Dérivation en temps : si $s(t) \xrightarrow{TF} \hat{S}(f)$ alors :

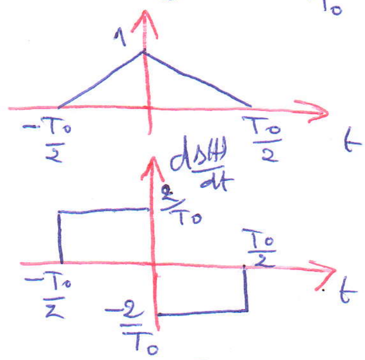
$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j2\pi f\, \hat{S}(f)$$

$\vdots$

$$\frac{d^n s(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j2\pi f)^n\, \hat{S}(f)$$

Exemple : trouver la TF $\mathrm{tri}_{T_0}(t)$ (ppt ⑦)

$s(t) = \mathrm{tri}_{T_0}(t)$



$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{2}{T_0} P_{\frac{T_0}{2}}\left(t + \frac{T_0}{4}\right) - \frac{2}{T_0} P_{\frac{T_0}{2}}\left(t - \frac{T_0}{4}\right)$$

$$TF\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = j2\pi f\, \hat{S}(f)$$

$$TF\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = \frac{2}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\pi f \frac{T_0}{2}\right) e^{j2\pi f\cdot\frac{T_0}{4}} - \frac{2}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\pi f \frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi f\cdot\frac{T_0}{4}}$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\pi f \frac{T_0}{2}\right)\left[e^{j\pi f \frac{T_0}{2}} - e^{-j\pi f \frac{T_0}{2}}\right] = j2\pi f\, \hat{S}(f)$$

$$\Rightarrow \hat{S}(f) = \frac{T_0}{2}\,\mathrm{sinc}^2 \pi f \frac{T_0}{2}$$

$$\mathrm{tri}_{\text{durée}}(t) \xrightarrow{TF} \frac{\text{durée}}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi f \cdot \frac{\text{durée}}{2}\right)$$

⑧ Dérivation en fréquence : si $s(t) \xrightarrow{TF} \hat{S}(f)$ alors :

$$(-j2\pi t)\, s(t) \xrightarrow{TF} \frac{d\hat{S}(f)}{df}$$

$$(-j2\pi t)^n s(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n \hat{S}(f)}{df^n}$$

⑨ Modulation : si $s(t) \xrightarrow{TF} \hat{S}(f)$ alors :

$$s(t)\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\left[\hat{S}(f + f_0) + \hat{S}(f - f_0)\right]$$

2-4 Théorème de parceval : l'energie d'un signal $s(t)$ est

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\, s(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{+j2\pi f t} df\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, df \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\, e^{+j2\pi f t} dt}_{S^*(f)} = \int S^*(f)\, S(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df.$$