CHAPITRE 05 : corrélation des signaux

5-1 définition : elle est utilisée dans le but de l'interprétation des signaux (extraction de l'information).

5-2 fonction d'autocorrélation des signaux à énergie finie :

elle est donnée par $R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\, s(t+\tau)\, dt$

pour un signal réel :

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, s(t+\tau)\, dt$$

5-3 propriétés :

① $R_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot s(t)\, dt = E$ (énergie d'un signal)

② $R_s(\tau) = R_s(-\tau) \longrightarrow$ fonction pair

③ $TF\{R_s(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t+\tau)\, dt \cdot e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{S(f)\, e^{j2\pi f t}} \cdot dt = S(f) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt}_{S^*(f)}$$

$= S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 \longrightarrow \varphi_s(f)$: densité spectrale d'énergie
D S E

④ $s(t) = e(t) * h(t) \Rightarrow S(f) = E(f) \cdot H(f)$

$$|S(f)|^2 = |E(f) \cdot H(f)|^2$$

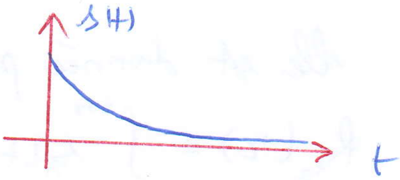
$$\varphi_s(f) = |E(f)|^2 \cdot |H(f)|^2$$

$$\varphi_s(f) = \varphi_e(f) \cdot |H(f)|^2$$

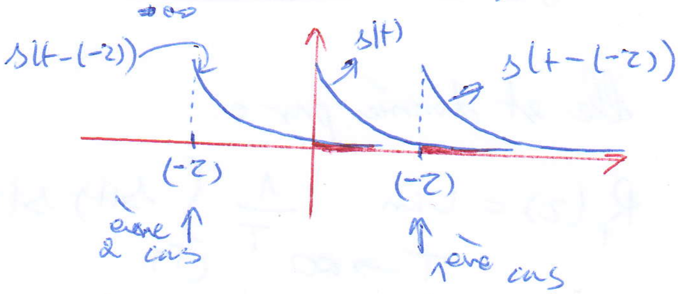
Exemple : soit le signal $s(t) = e^{-at} \cdot u(t)$ $a > 0$.

① calculer la fonction d'autocorrélation.

② " " DSE.



Sol : $R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, s(t-(-\tau))\, dt$

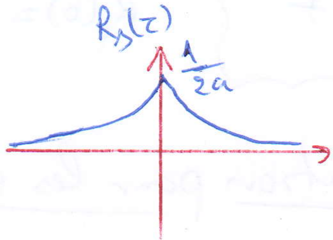


① 1ère cas $(-\tau) > 0 \Rightarrow \tau < 0$

$$R_s(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} s(t) \cdot s(t+\tau)\, dt = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-a(t+\tau)}\, dt = e^{-a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at}\, dt = \frac{e^{a\tau}}{2a}$$

② 2ème cas $(-\tau) < 0 \Rightarrow \tau > 0 \Rightarrow R_s(\tau) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-a(t+\tau)}\, dt = \frac{e^{-a\tau}}{2a}$

$$R_s(\tau) = \frac{e^{-a|\tau|}}{2a}$$



DSE : $\varphi_s(f) = |S(f)|^2$; $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$\varphi_s(f) = S(f) \cdot S^*(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \cdot \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

2ème méthode : $\varphi_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{a\tau}}{2a}\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-a\tau}}{2a}\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$

$$= \frac{1}{2a} \frac{1}{a - j2\pi f}\, e^{(a - j2\pi f)\tau} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2a} \frac{-1}{a + j2\pi f}\, e^{-(a + j2\pi f)\tau} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$\varphi_s(f) = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{a + j2\pi f} \right) = \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

5-4 fonction d'intercorrélation pour les signaux à énergie finie :

elle est donnée par :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt \; ; \; \phi_{12}(f) = TF\{R_{12}(\tau)\} \left\{ \begin{array}{l} \text{densité} \\ \text{interspectrale} \\ \text{d'énergie} \end{array} \right.$$

5-5 fonction d'autocorrélation pour les signaux à puissance moyenne finie :

elle est donnée par :

$$R_p(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t)\, s(t+\tau)\, dt \qquad [W] \text{ puissance}$$

$$TF\{R_p(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = \phi(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{densité} \\ \text{spectrale de} \\ \text{puissance} \end{array} \right.$$

$$\boxed{R_p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f)\, e^{j2\pi f \tau}\, df} \qquad R_p(0) = P = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f)\, df$$

5-6 fonction d'intercorrélation pour les signaux à puissance moyenne finie :

elle est donnée par :

$$R_{12p}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{(T)} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\, dt$$

$$TF\{R_{12p}(\tau)\} = \phi_{12p}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12p}(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau \left\{ \begin{array}{l} \text{densité} \\ \text{interspectrale} \\ \text{de puissance} \end{array} \right.$$

ppts :

$$\phi_s(f) = \phi_e(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_s(f)\, df$$