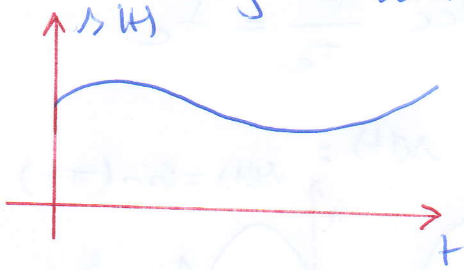
CHAPITRE 06 : Echantillonnage et signaux discrets :

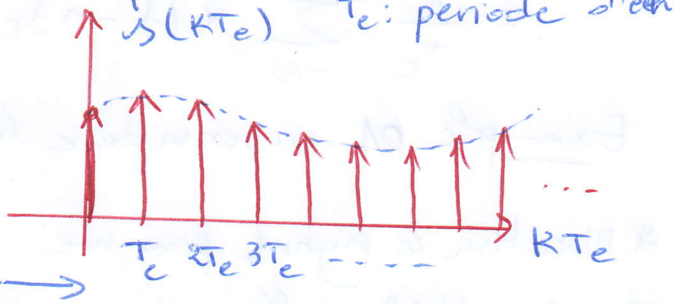
6-1 Echantillonnage :

Echantillonner un signal analogique signifie de remplacer par une suite de ses valeur pour des instants bien définis

6-2 expression mathematique d'échantillonnage :

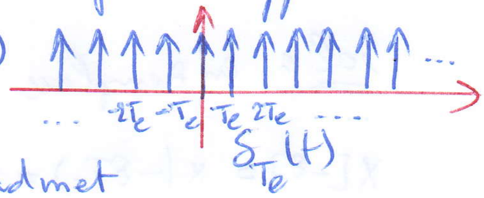
Soit un signal continu $s(t)$ telque :





aprés l'échantillonnage

l'échantillonnage est réalisé par une suite d'impulsion appelé fonction de dirac : $\delta_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e)$



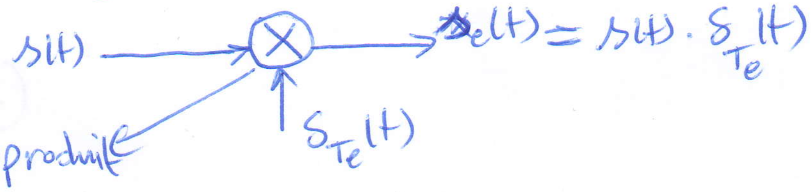
$\delta_{Te}(t)$ est périodique de periode T_e $\Rightarrow$ elle admet un devellppement en serie de Fourier complexe :

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+j2\pi n f_e t} \quad \text{avec : } C_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta_{Te}(t) e^{-j2\pi n f_e t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n f_e t} dt \quad ; \text{ ppts } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) x(t)\, dt = x(0)$$

$$C_n = \frac{1}{T_e} \Rightarrow \delta_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} e^{+j2\pi n f_e t}$$

un signal échantillonné $s_e(t)$ est représenté par



$$s_e(t) = s(t) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e)$$

6-3 Spectre d'un signal échantillonnées :

$$s_e(t) = s(t) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e)$$

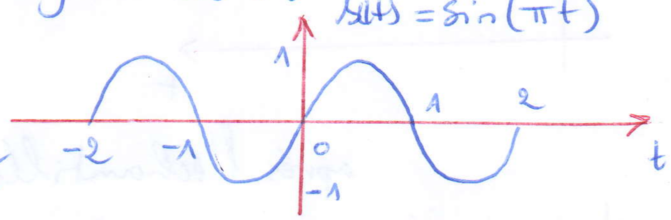
produit scalaire $\cdot \xrightarrow{TF} *$ produit de conv.

$$S_e(f) = S(f) * TF\left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e) \right\}$$

$$= \frac{1}{T_e} S(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) \quad : \text{avec } \frac{1}{T_e} = f_e$$

Exemple 01 on considère le signal $x(t)$:



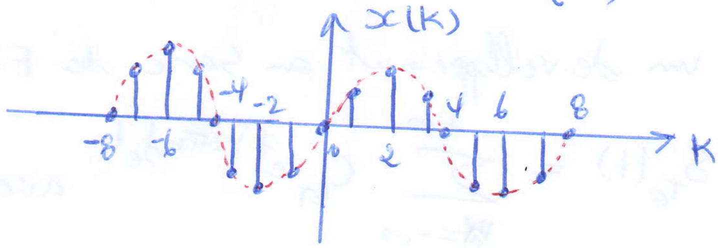
* Discrétiser le signal pour une période d'échantillonnage $T_e = 0{,}25$

avec $K = -8, -7, \dots, 8$

Sol : on remplace par $t = KT_e$

$X[-8] = x(-8T_e) = \sin(-2\pi) = 0$; $X[8] = x(8T_e) = \sin(2\pi) = 0$

$X[-7] = x(-7T_e) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ...

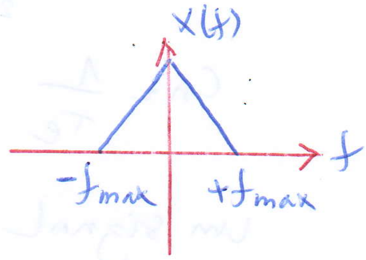


Exemple 2 : soit les signal $x(t) = A \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)$

Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale ?

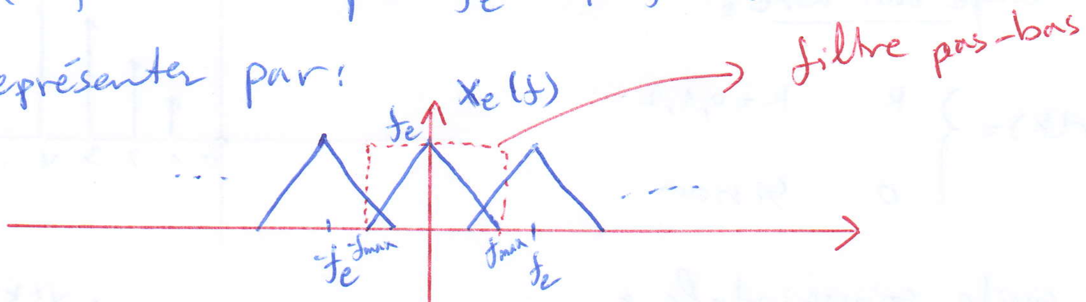
6-4 théorème de shannon :

soit un signal $x(t)$ de spectre $X(f)$ telque :



* Si $f_e < 2 f_{max}$ exemple $f_e = 1{,}5 f_{max}$

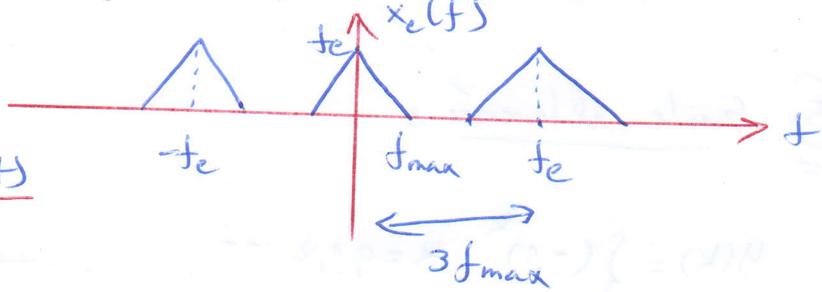
$X_e(f)$ représenter par :



on remarque qu'il y'à un chevauchement alors on ne peut pas extraire le signal $x(t)$ par un filtre pas-bas

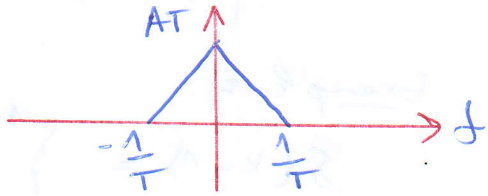
* Si $\boxed{f_e \geq 2 f_{max}}$ exemple $f_e = 3 f_{max}$

dans ce cas on peut extraire le signal $x(t)$



Sol de l'exemple 28

$$A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \xrightarrow{TF} AT \operatorname{tri}_{\frac{2}{T}}(f)$$



$$f_{max} = \frac{1}{T}$$

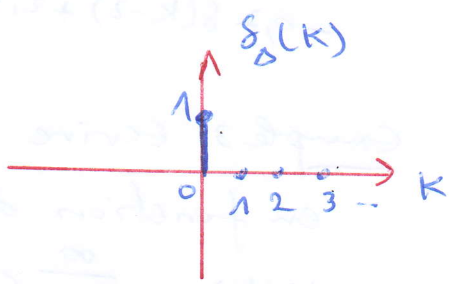
lorsque on prent $f_e = \frac{1}{T}$ $\Rightarrow$ dans ce cas ne peut pas reconstituer exactent le signal $(f_e \geq 2 f_{max}$

$\hookrightarrow = \frac{2}{T_e}$

6-5 Signaux Discrets :

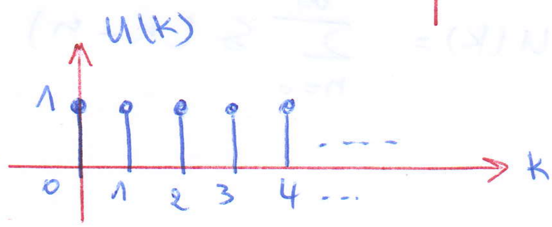
① Impulsion de Kronecker :

$$\delta_\Delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$



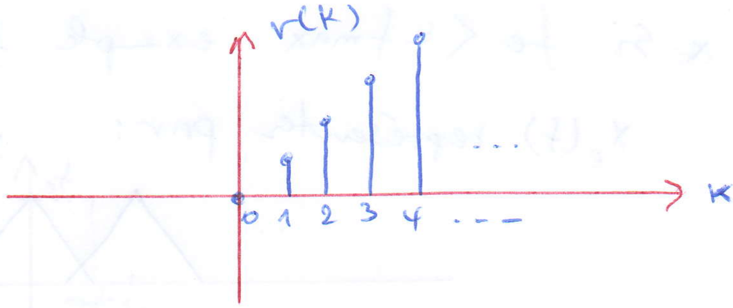
② Echelon unitaire :

$$U(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 3 \ldots \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$



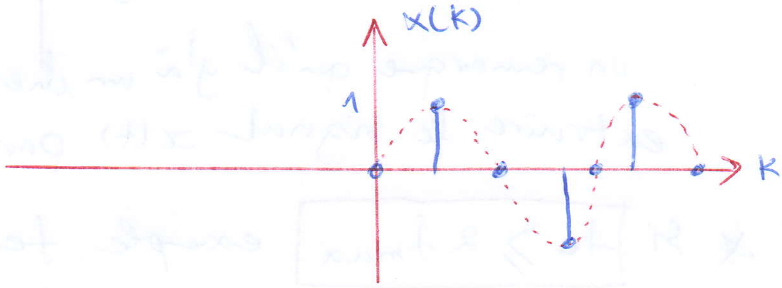
③ Rampe unitaire :

$$r(k) = \begin{cases} k & k = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



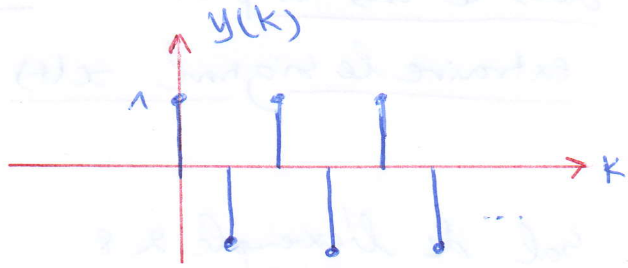
④ suite sinusiodale :

$$x(k) = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) & k = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



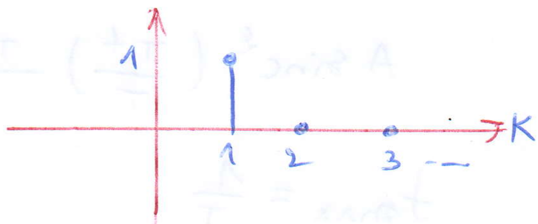
⑤ Suite alternée :

$$y(k) = \begin{cases} (-1)^k & k = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$



Exemple :

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

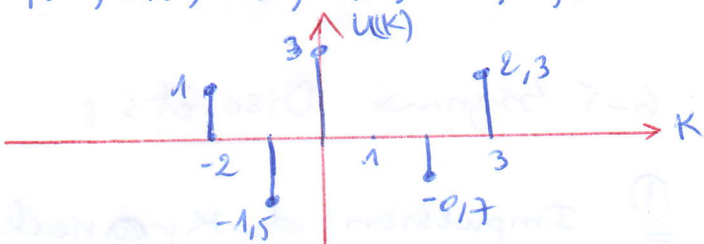


Exemple 2 : Représenter au moyen de la suite de Kroneker le signal discrets suivant

$$u(k) = \{ u(-2) = 1,\ u(-1) = -1{,}5,\ u(0) = 3,\ u(2) = -0{,}7,\ u(3) = 2{,}3$$

$$u(k) = \delta(k+2) - 1{,}5\,\delta(k+1) + 3\,\delta(k)$$

$$-0{,}7\,\delta(k-2) + 2{,}3\,\delta(k-3)$$



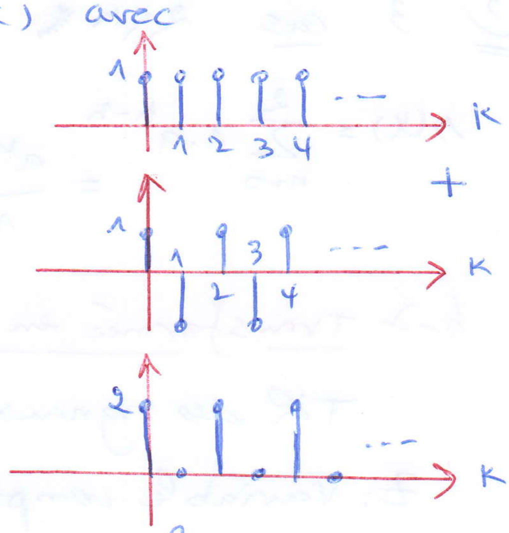
Exemple 3 Ecrire l'expression de l'échelon unitaire en fonction de la suite de Kroneker

$$u(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$

Exemple 4 trouver $g_1(k) + g_2(k)$ avec

$g_1(k)$: échelon unitaire

$g_2(k)$: suite alternée

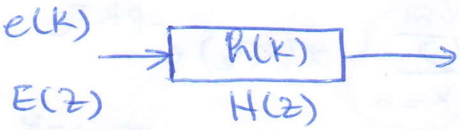


$$g(k) = g_1(k) + g_2(k)$$

$$= \begin{cases} 2 & k : \text{pair} \\ 0 & k : \text{impair} \end{cases}$$

6. produit de convolution :

$$s(k) = e(k) * h(k)$$

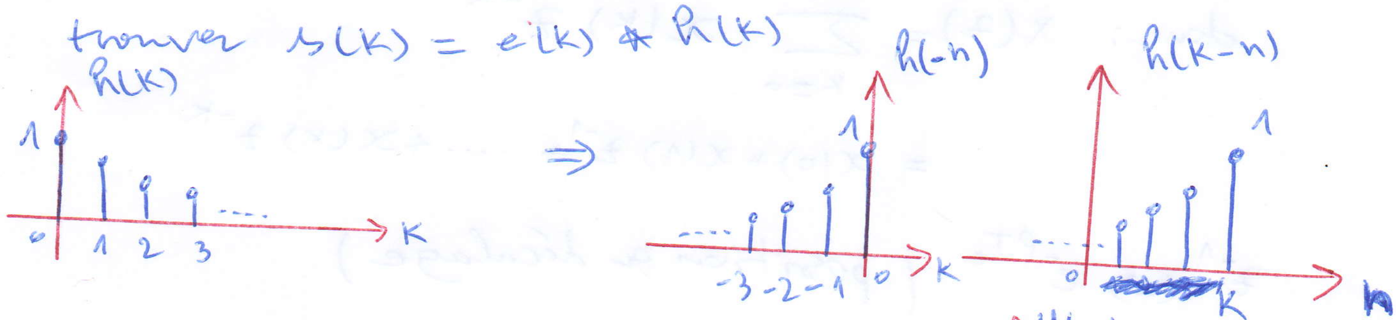


$$s(k) = \sum_{i=0}^{K} h(i)\, E(k-i)$$

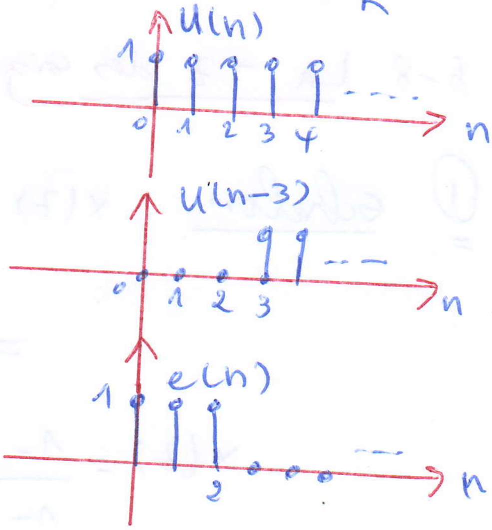
Exemple :

$h(k) = e^{-bkTe} \cdot u(k)$ et $e(k) = u(k) - u(k-3)$

trouver $s(k) = e(k) * h(k)$

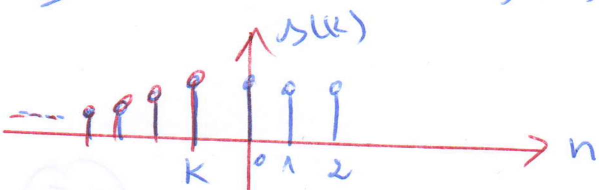


$$h(k-n) = \begin{cases} e^{-b(k-n)Te} = a^{k-n} \\ \text{avec } a = e^{-bTe} \end{cases}$$

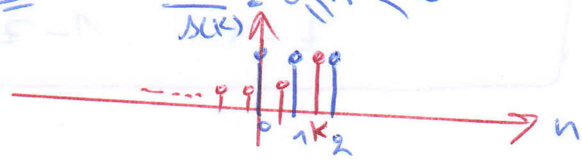


$$e(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① 1ère cas : $K < 0 \Rightarrow s(k) = 0$

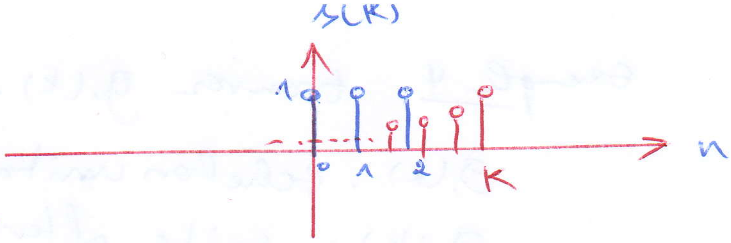


② 2ème cas : $0 \leq K < 2$



$$s(k) = \sum_{n=0}^{K} 1 \cdot a^{k-n} = \frac{a^k - a^{-1}}{1 - a^{-1}}$$

③ $3^{ème}$ cas $2 \leq K$



$$s(K) = \sum_{n=0}^{2} 1 . a^{K-n} = \frac{a^K - a^{K-3}}{1 - a^{-1}}$$

6-7 Transformée en Z :

la TZ est considérée comme la TL des signaux discrets.

Z : variable complexe

en cas continu : $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$

$$X(?) = \sum_{K=0}^{\infty} x(KT_e)\, e^{-pKT_e} \quad ; \; T_e = 1\,s$$

$$= \sum_0^{\infty} x(K) \left(e^{+pT_e}\right)^{-K}$$

$Z = e^{pT_e}$ ou e^p

donc : $$X(Z) = \sum_{K=0}^{+\infty} x(K)\, Z^{-K}$$

$$= x(0) + x(1) Z^{-1} + \dots + x(K) Z^{-K}$$

$Z^{-1} \Longleftrightarrow e^{-pT_e}$ (position ou décalage)

6-8 La TZ des signaux élémentaires :

① Echelon $$X(Z) = \sum_{K=0}^{+\infty} x(K)\, Z^{-K} = \sum_{K=0}^{+\infty} 1 . Z^{-K}$$

$$= 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \dots + Z^{-K}$$ (suite de base $(Z-1)$)

$$X(Z) = \frac{1 - Z^{-K}}{1 - Z^{-1}}$$ → convergence $X(Z) = \lim_{K \to \infty} \frac{1 - Z^{-K}}{1 - Z^{-1}}$

$$\boxed{X(Z) = \frac{Z}{Z-1} = \frac{1}{1 - Z^{-1}}}$$

② Rampe $X(z) = \frac{T z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T z}{(z-1)^2}$

③ Fonction polynomiale $a^k \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

avec $a = e^{-\alpha T_e}$

propriété de T.Z :

① $m \cdot x(k) \xrightarrow{TZ} m \cdot X(z)$; m cte

② $m_1 x_1(k) + m_2 x_2(k) \xrightarrow{TZ} m_1 X_1(z) + m_2 X_2(z)$

③ $a^k \cdot x(k) \xrightarrow{TZ} X(a^{-1}z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$

④ translation :

$x(k-n) \xrightarrow{TZ} z^{-n} X(z)$

$x(k+n) \xrightarrow{TZ} z^n \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \cdot z^{-k} \right\}$

Exemple : $x(k+3) \xrightarrow{TZ} z^3 \left\{ X(z) - x(0) - x(1) z^{-1} - x(2) z^{-2} \right\}$

$x(0), x(1), x(2)$ {conditions initiales}

⑤ théorème de la valeur finale et initiale :

$x(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

$\frac{z-1}{z}$

$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

⑥ théorème de différentiation :

$k \cdot x(k) \xrightarrow{TZ} -z \frac{d}{dz} X(z)$

$k^2 x(k) \xrightarrow{TZ} -z \frac{d}{dz}\left(-z \frac{d}{dz} X(z)\right)$

6-9 Transformée en Z inverse :

$n > m$

Soit
$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$
$$= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \; ; \; \left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right. \text{ les pôles}$$

① les pôles sont distincts (Réel) + $b_m = 0$

$$X(z) = \frac{z(b_0 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1})}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1}}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

$$a_i = (z-p_i) \cdot \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=+p_i}$$

donc
$$X(z) = \frac{a_1 z}{z-p_1} + \frac{a_2 z}{z-p_2} + \cdots + \frac{a_n z}{z-p_n}$$

TZ^{-1}

$$x(k) = a_1 (p_1)^k + a_2 (p_2)^k + \cdots + a_n (p_n)^k$$

② si $\frac{X(z)}{z}$ présente des pôles multiples

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1}}{(z-p_1)^n (z-p_2)(z-p_3)\cdots(z-p_n)}$$

$$= \frac{c_n}{(z-p_1)^n} + \frac{c_{n-1}}{(z-p_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_1}{(z-p_1)} + \frac{a_2}{z-p_2} + \frac{a_3}{z-p_3} + \cdots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

$$c_n = \frac{1}{0!} (z-p_1)^n \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_1} \; ; \; c_{n-1} = \frac{1}{1!} \left| \frac{d}{dz} \left((z-p_1)^n \frac{X(z)}{z} \right) \right|_{z=p_1}$$

$$c_{n-j} = \frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{dz^j}\left((z-p_1)^n \frac{X(z)}{z}\right)\right]\Bigg|_{z=p_1}$$

$\vdots$

$$c_1 = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left((z-p_1)^n \frac{X(z)}{z}\right)\right]\Bigg|_{z=p_1}$$

Exemple 1 : $X(z) = \dfrac{10\,z}{(z-1)(z-0{,}2)}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-0{,}2)} = \frac{a_1}{(z-1)} + \frac{a_2}{(z-0{,}2)}$$

$$a_1 = (z-1)\cdot\frac{10}{(z-1)(z-0{,}2)}\Bigg|_{z=1} = 12{,}5$$

$$a_2 = (z-0{,}2)\,\frac{10}{(z-1)(z-0{,}2)}\Bigg|_{z=0{,}2} = -12{,}5$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{12{,}5}{z-1} - \frac{12{,}5}{z-0{,}2} \Rightarrow X(z) = \frac{12{,}5\,z}{z-1} - \frac{12{,}5\,z}{z-0{,}2}$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} x(k) = 12{,}5\,u(k) - 12{,}5\,(0{,}2)^k \;;\; k = 0, 1, 2 \dots K$$

Exemple 2 $X(z) = \dfrac{z+2}{(z-2)\,z^2}$; $b_m \neq 0$

$$X(z) = \frac{a_1}{z-2} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_1}{z}$$

$$a_1 = (z-2)\cdot X(z)\Big|_{z=2} = 1 \;;\; c_2 = z^2 \cdot X(z)\Big|_{z=0} = -1$$

$$c_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(z^2\cdot X(z)\right)\right] = -1$$

$$X(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$ (si $b_m \neq 0$ ecrire $X(z)$ en fonction z^{-1})

$$X(z) = z^{-1}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}} - 1\cdot z^{-2} - 1\cdot z^{-1}$$

$\xrightarrow{TZ^{-1}} x(k) = 2^{k-1} - \delta(k-2) - \delta(k-1)$

6-10 Relation des équation aux différence par la TZ :

soit l'équation aux différence discrète suivante :

$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \longrightarrow$ cas discrets

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) = 0 \longrightarrow$ cas continu

$TZ\{x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0\} =$; conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

$z^2 X(z) - z^2 \cancelto{0}{x(0)} - z x(1) + 3 z X(z) - 3 z \cancelto{0}{x(0)} + 2X(z) = 0$

$X(z)\left[z^2 + 3z + 2\right] = z \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$

$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{a_1}{(z+1)} + \frac{a_2}{(z+2)}$

$a_1 = (z+1) \cdot \frac{X(z)}{z}\Big|_{z=-1} = 1$; $a_2 = (z+2) \cdot \frac{X(z)}{z}\Big|_{z=-2} = -1$

alors : $X(z) = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} = \frac{z}{z-(-1)} - \frac{z}{z-(-2)}$

$\xrightarrow{TZ^{-1}} x(k) = (-1)^k - (-2)^k$

Exemple 2 : $x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = e(k)$

avec $e(k)$: Impulsion de Kronecker ; $\begin{cases} x(0) = 0 \\ k \leq 0 \Rightarrow x(k) = 0 \end{cases}$

* calculer $x(1)$ et $x(k)$

Sol : pour $k = -1 \Rightarrow x(1) + 2\cancelto{0}{x(-1)} - 3\cancelto{0}{x(0)} = \cancelto{0}{e(-1)}$

$\Rightarrow x(1) = 0$

appliquant la TZ :

$$z^2 X(z) - 3X(z)z + 2X(z) = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$b_m \neq 0$ donc $X(z) = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$

$b_m \neq 0$ ecrire $X(z)$ en fonction z^{-1}

$$X(z) = -z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1} \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

TZ^{-1} $x(k) = -u(k-1) + 2^{k-1}$; $k = 1, 2 \ldots$