Université Mohamed Boudiaf - Msila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Socle Commun MI&1$^{\text{ère}}$année math
AnnéeUniversitaire 2022-2023

Module : **Algèbre01**

(Série d'exercices N° 4)

Exercice n°1 : On définit sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $*$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = \ln(e^a + e^b)$$

1. La loi $*$ est elle commutative ? Associative ? Possède-t-elle un élément neutre ?
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définit dans $\mathbb{R}$ une loi de composition interne $\perp$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \perp y = ax + by$$

Déterminer a, b pour que la loi $\perp$: (1) Soit associative (2) Possède un élément neutre.

Exercice n°2 : Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de composition interne définie sur G par

$$\forall (x, y), (x', y') \in G : (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que l'ensemble $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

Exercice n°3 :
Soient $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ deux groupes et soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. Calculer $Ker(f)$. Que vous conclus.
3. Est ce que f est surjective ?

Exercice n°4 : On munit l'ensemble $A = \mathbb{Z}^2$ de deux lois définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif. $(*)$
2. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.
3. Déterminer l'élément neutre pour la loi $\star$.
4. Montrer que $(A, +, \star)$ est un anneau unitaire commutatif.
5. Montrer que $B = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(A, +, \star)$.
6. On munit l'ensemble $K = \mathbb{R}$ par l'addition et la multiplication usuelle.

(a) Pourquoi $(K, +, \cdot)$ est-il un corps ?

(b) On pose $L = \left\{x \in \mathbb{R},\ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \mid x = \alpha + \beta\sqrt{3}\right\}$ une partie de $\mathbb{R}$.
Montrer que $(L, +, .)$ est un sous-corps de $(K, +, .)$

Exercice n°5 :(Devoir maison)

1. On considère un ensemble E défini par $E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$ et on définit sur E une loi de composition $*$ par

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E : (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$$

   (a) Vérifier que $*$ est une loi interne sur E et trouver $(2, 0) * (1, 1)$

   (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

   (c) Déterminer l'ensemble $H = \{(x, y) \in E, \forall (a, b) \in E : (x, y) * (a, b) = (a, b) * (x, y)\}$

2. Soit $F = \{(a, b) \in E : b = 0\}$ une partie de E.

   (a) Montrer que F est un sous-groupe de E.

3. On considère une application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & (E, *) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, .) \\ & (a, b) & \longmapsto & f((a, b)) = a \end{array}$$

   (a) Montrer que f est un morphisme de groupe $(E, *)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, .)$

   (b) Déterminer le noyau de f.

4. On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2},\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ une partie de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.