

# Chapitre 12 : Fonctions circulaires réciproques

## I La fonction Arcsin

### A) Étude

$$\text{Soit } f: \begin{matrix} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{matrix} .$$

Alors  $f$  est continue et strictement croissante, de plus  $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$  et  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Donc  $f$  est une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[-1, 1]$ .

### B) Définition

#### Définition :

Arcsin est la fonction de  $[-1, 1]$  dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  qui est la réciproque de la bijection

$$f: \begin{matrix} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{matrix} .$$

On a ainsi :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \text{Arcsin}(x) \iff y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \sin y = x) \quad (12.1)$$

Ou :

$\text{Arcsin}(x)$  est l'unique arc entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  dont le sinus est  $x$ .

### C) Propriétés de la fonction Arcsin

Elles résultent des propriétés de la fonction  $x \mapsto \sin x$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et des théorèmes portant sur les fonctions réciproques des bijections continues et strictement monotones sur un intervalle :

- $\forall x \in [-1, 1], -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2}$
- Arcsin est continue
- Arcsin est strictement croissante
- Arcsin est impaire (car  $x \mapsto \sin x$  l'est sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

En effet : Soit  $x \in [-1, 1]$ .

Alors  $-\text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et  $\sin(-\text{Arcsin}(x)) = -\sin(\text{Arcsin}(x)) = -x$ , donc  $-\text{Arcsin}(x)$  est l'unique arc entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  dont le sinus est  $-x$ , c'est-à-dire que  $-\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}(-x)$ .

- Arcsin est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et de plus :

$$\forall x \in ] -1, 1[, (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (12.2)$$

En effet : Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Posons  $\alpha = \text{Arcsin}(x)$ . Alors  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , et  $\sin \alpha = x$

Comme  $\sin$  est dérivable en  $\alpha$ , et  $(\sin)'(\alpha) = \cos(\alpha) \neq 0$ ,  $\text{Arcsin}$  est dérivable en  $x$  et  $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos \alpha}$ .

Mais  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , et  $\cos \alpha > 0$ .

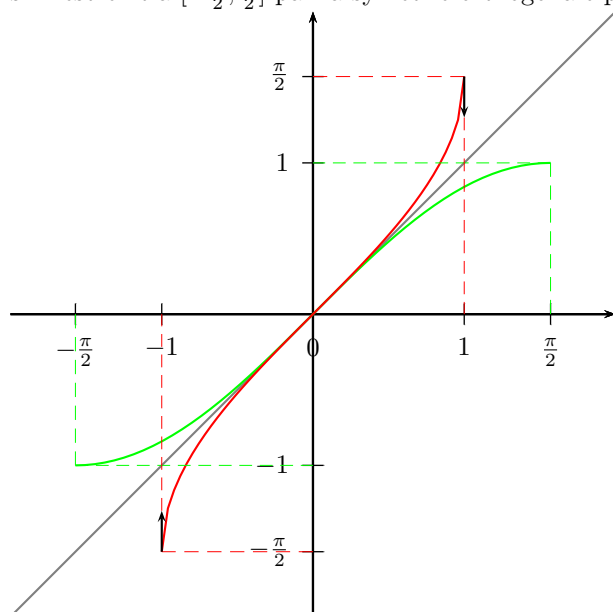
Donc  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , et de plus  $\sin \alpha = x$  donc  $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$

Donc finalement  $(\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Donc  $\text{Arcsin}$  est bien dérivable sur  $] - 1, 1[$ , et sa dérivée sur  $] - 1, 1[$  est  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, 1[$ .

Donc  $\text{Arcsin}$  est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, 1[$ .

- $\text{Arcsin}$  n'est pas dérivable en  $-1$  ni en  $1$ , mais sa courbe présente aux points d'abscisses  $-1$  et  $1$  une demi tangente verticale. En effet,  $\text{Arcsin}$  est dérivable sur  $] - 1, 1[$  et  $(\text{Arcsin})'$  a une limite à gauche en  $1$  (respectivement à droite en  $-1$ ) qui est  $+\infty$ , d'où le résultat avec le théorème liant limite de la dérivée et limite du taux d'accroissement.
- Enfin, la courbe représentative de  $\text{Arcsin}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se déduit de celle de  $\sin$  restreint à  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



La courbe est elle-même un résultat de cours, elle résume l'essentiel des points précédents. Noter aussi la position de la courbe par rapport à la tangente à l'origine.

## II La fonction Arccos

### A) Étude

La fonction  $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$  est une bijection continue et strictement décroissante.  
 $x \longmapsto \cos x$

**B) Définition****Définition :**

Arccos est la fonction de  $[-1, 1]$  dans  $[0, \pi]$  qui est la réciproque de la bijection  $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ .

$$\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

On a donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \mathbb{R}, (y = \text{Arccos}(x) \iff y \in [0, \pi] \text{ et } \cos y = x) \quad (12.3)$$

Ou :

Arccos( $x$ ) est l'unique arc entre 0 et  $\pi$  dont le cosinus est  $x$ .

**C) Propriétés de la fonction Arccos**

- $\forall x \in [-1, 1], 0 \leq \text{Arccos}(x) \leq \pi$
- Arccos est continue
- Arccos est strictement décroissante
- Arccos est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ , et de plus :

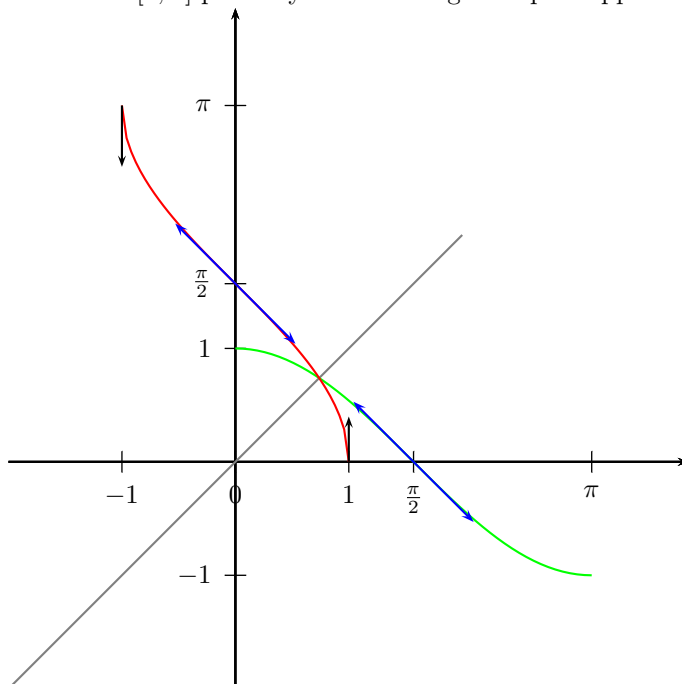
$$\forall x \in ] -1, 1[, (\text{Arccos})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (12.4)$$

En effet : Soit  $x \in ] -1, 1[$ . Posons  $\alpha = \text{Arccos}(x)$ . Alors  $\alpha \in ]0, \pi[$ , et  $\cos \alpha = x$

Comme  $\cos$  est dérivable en  $\alpha$ , et  $(\cos)'(\alpha) = -\sin(\alpha) \neq 0$ , Arccos est dérivable en  $x$  et  $(\text{Arccos})'(x) = \frac{1}{-\sin \alpha} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

D'où, comme pour Arcsin, Arccos est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

- Arccos n'est pas dérivable en  $-1$  ni en  $1$ , mais sa courbe présente aux points d'abscisses  $-1$  et  $1$  une demi tangente verticale.
- La courbe représentative de Arccos dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se déduit de celle de cosinus restreint à  $[0, \pi]$  par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :



- La fonction  $\cos$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , mais  $\text{Arccos}$  n'est pas paire (car  $\cos$  n'est pas paire sur  $[0, \pi]$  !)
- En revanche, la courbe présente un centre de symétrie : le point de coordonnées  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Cela se traduit par la formule :  $\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$

**Rappel :**

La courbe de  $f$  présente un centre de symétrie en  $A(x_0, y_0) \stackrel{\text{déf}}{\iff} I$  est centré en  $x_0$  et  $\forall h \in \mathbb{R}, ((x_0 + h \in I) \implies \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = y_0)$

**Démonstration :**

Soit  $x \in [-1, 1]$ .

Alors  $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$  et  $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$

Donc  $\pi - \text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$  et  $\cos(\pi - \text{Arccos}(x)) = -\cos(\text{Arccos}(x)) = -x$

Donc  $\pi - \text{Arccos}(x) = \text{Arccos}(-x)$  (car  $\pi - \text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$ )

- On déduit la courbe de  $\text{Arccos}$  de celle de  $\text{Arcsin}$  en opérant une symétrie orthogonale par rapport à  $Ox$ , puis une translation de vecteur  $\frac{\pi}{2}\vec{j}$ , ce qui se traduit par la formule :  $\forall x \in [-1, 1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$  ( $\text{Arccos}(x) = (-\text{Arcsin}(x)) + \frac{\pi}{2}$ )

**Démonstration :**

Soit  $x \in [-1, 1]$ .

Alors  $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$ .

Donc  $\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , et :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\text{Arccos}(x)) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\text{Arccos}(x)) \\ &= 1 \times \cos(\text{Arccos}(x)) - 0 = x \end{aligned} \quad (12.5)$$

Donc  $\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(x)$

Soit  $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ .

### III La fonction Arctan

#### A) Étude

La fonction  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une bijection continue et strictement croissante.  
 $x \mapsto \tan x$

#### B) Définition

**Définition :**

$\text{Arctan}$  est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  qui est réciproque de la bijection précédente.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \text{Arctan}(x) \iff y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \text{ et } \tan y = x) \quad (12.6)$$

Ou :

$\text{Arctan}(x)$  est l'unique arc entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  dont la tangente est  $x$ .

**C) Propriétés de la fonction Arctan**

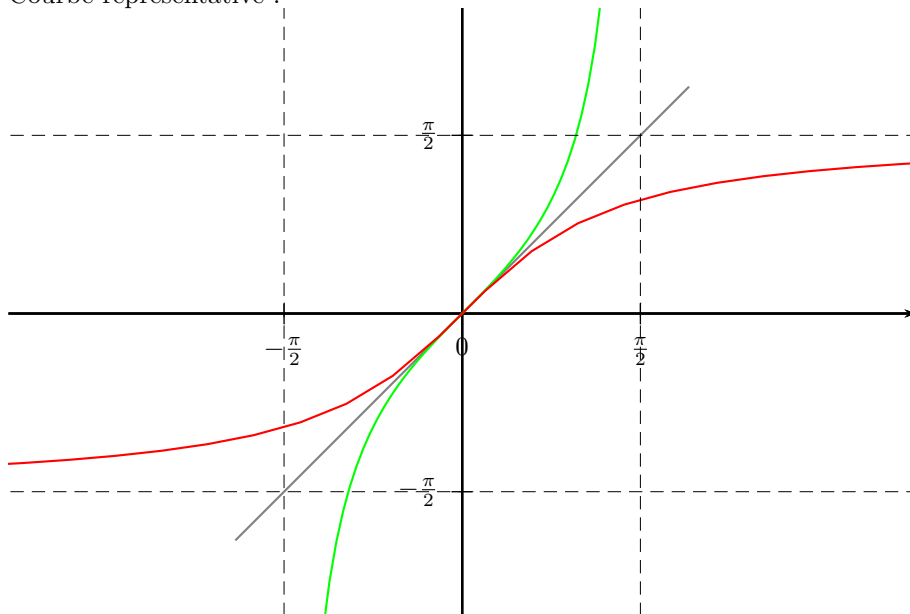
- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$
- Arctan est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- $\lim_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2}$
- Arctan est impaire.
- Arctan est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (12.7)$$

En effet : Soit  $x \in \mathbb{R}$ , notons  $\alpha = \text{Arctan}(x)$ . Alors  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , et  $\tan \alpha = x$ . Comme tan est dérivable en  $\alpha$  et  $\tan'(\alpha) = 1 + \tan^2 \alpha \neq 0$ , Arctan est dérivable en  $x$ , et :

$$(\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2} \quad (12.8)$$

- Courbe représentative :



- On a :

$$\forall x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (12.9)$$

$$\forall x < 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (12.10)$$

**Démonstration :**

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Notons  $\alpha = \text{Arctan}(x)$ .

- ◇ Si  $x > 0$  :

Alors  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc  $\frac{\pi}{2} - \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , et  $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{x}$ .

Donc  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ , c'est-à-dire  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

- ◇ Si  $x < 0$ , alors  $-x > 0$ ,

donc  $\text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2}$ , soit  $-\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$  car Arctan est impaire,

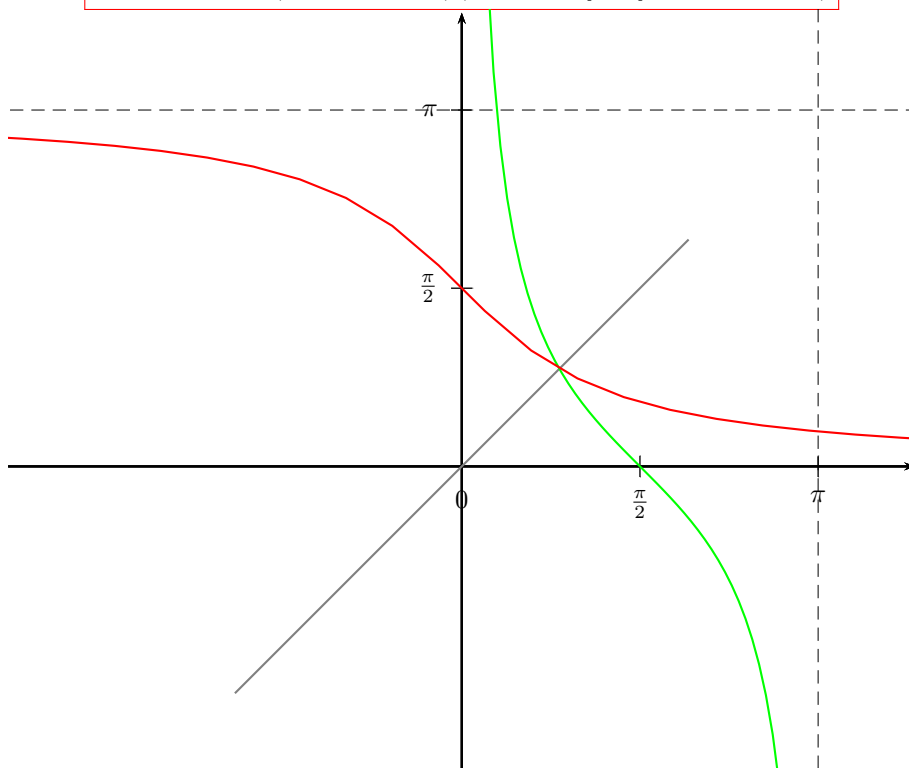
donc  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ .

## IV La fonction Arccotan

Arccotan est la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, \pi[$  qui est la réciproque de la bijection  $]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto \cotan x$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \text{Arccotan}(x) \iff y \in ]0, \pi[ \text{ et } \cotan y = x)$



- Arccotan est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

- $\lim_{-\infty} \text{Arccotan} = \pi$  et  $\lim_{+\infty} \text{Arccotan} = 0$

- Arccotan est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{Arccotan})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

- On a :

$$\forall x > 0, \text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (12.11)$$

$$\forall x < 0, \text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{2} \quad (12.12)$$

### Démonstration :

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Notons  $\alpha = \text{Arccotan}(x)$

- ◇ Si  $x > 0$  :

Alors  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Donc  $\frac{\pi}{2} - \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , et :

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \tan \alpha = \frac{1}{\cotan \alpha} = \frac{1}{x} \quad (12.13)$$

Donc  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right)$ , c'est-à-dire  $\text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

- ◇ Si  $x < 0$  :

Alors  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Donc  $\frac{3\pi}{2} - \alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , et :

$$\cotan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \tan \alpha = \frac{1}{\cotan \alpha} = \frac{1}{x} \quad (12.14)$$

Donc  $\frac{3\pi}{2} - \alpha = \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right)$ , soit  $\text{Arccotan}(x) + \text{Arccotan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{2}$