Université de M'sila(2019/2020) **Le 19/01/2020**
Département des Sciences Techniques ($1^{\text{ère}}$année ST) **Durée**: 1^h30mn

Epreuve du 1^{er}semestre
Module: Mathématiques 01

Exercice 01 (5pts)

Soit U l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-2,+\infty[$ définie par $\forall x \in$, $U(x) = e^x - 2$

1. $U^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R},\ U(x) \in \{0\}\}$, $U(x) = e^x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \ln 2$, alors $U^{-1}(\{0\}) = \{\ln 2\}$

et $U([0, \ln 2])= \{U(x) \in]-2,+\infty[,\ x \in [0, \ln 2]\} = [-1, 0]$

2 Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

a) L'injectivité, Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, supposons que $U(x) = U(x') \Longrightarrow e^x - 2 = e^{x'} - 2 \Longrightarrow x = x'$ alors U est injective

b) La surjectivité, Soit $y \in]-2,+\infty[$, Supposons que $y = U(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $y = U(x) \Longrightarrow e^x - 2 = y \Longrightarrow x = \ln(y+2)$

Alors, pour tout $y \in]-2,+\infty[$, $\exists x = \ln(y+2) \in \mathbb{R}$ tel que $y = U(x)$, alors U st surjective. U est injective et surjective alors elle est bijective et
$$\begin{aligned} U^{-1} :]-2,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x \longrightarrow &\quad U^{-1} = \ln(x+2) \end{aligned}$$

Exercice 02 (5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \dfrac{1}{a} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a \end{cases}$

$[x]$ est la partie entière de x, et a un réel positif ($a > 0$).

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur son domaine de définition D_f.

$D_f =]-\infty, a]$, $f$est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, a[$ et en $x_0 = a$ on a $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} x^2 + x + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}$,

et $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} \dfrac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} a\dfrac{\sin ax}{ax} + (x-a)[x] - \sqrt{x} = a$

f est continue en $0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} f(x) = f(0) \Longrightarrow \dfrac{1}{a} = a \Longrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

et tantque a est positif alors la valeur de a pour que f soit continue est $a = 1$

2 Pour la valeur de a trouvée dans (1). Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = 0$.

Pour $a = 1$. f est continue sur $]0, a[$, et on a $f(0) = 1 > 0$, et $f(a) = f(1) = \sin 1 - 1 < 0$
alors par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in c \in]0, a[$, tel que $f(c) = 0$.

Exercice 03 (**6pts**)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(\cosh x)}{x\ln(1+x)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f

Le premier terme dans le dénominateur $(x\ln(1+x))$ est de dégrée 2 alors on effectue le D.L à l'ordre 4

$\ln(\cosh x) = \ln(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \circ(x^4) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)$

$x\ln(1+x) = x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} \circ (x^4)$

$$f(x) = \frac{\ln(\cosh x)}{x\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} \circ (x^4)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \circ (x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2).$$

2 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$. D'après la formule de Taylor on a $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ alors $f^{(n)}(0) = n!c_n$

$f'(0) = 1!c_1 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $f''(0) = 2!c_2 = 2 \times \frac{-1}{8} = \frac{-1}{16}$.

3 Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

L'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$, $f(x) - y = -\frac{x^2}{8} + \circ(x^2) \leq 0$
alors la courbe de f est en dessus de sa tangente au voisinage de 0.

1. **Ind**: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$
   $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$

Exercice 04 (**4pts**)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a * b = a + b + ab$

1. Montrer que $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ est un groupe.

a L'associativité; Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a * (b * c) = (a * b) * c$

b l'élément neutre; Pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, supposons que $a * e = e * a = a$ pour certain $e \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$a * e = e * a = a \Longrightarrow e = 0$, alors la loi $*$ admet un élément neutre $e = 0$

c la symétrie; Pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, supposons que $a * a' = a' * a = e = 0$ pour certain $a' \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$a * a' = a' * a = 0 \Longrightarrow a' = \dfrac{-a}{1+a}$. Alors tout élément $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ admet un symétrie $a^{-1} = \dfrac{-a}{1+a}$ pour la loi $*$

2 Le groupe $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ est-il abélien?.

On a $a * b = b * a$, alors la loi $*$ est commutatif donc le groupe $(\mathbb{R}\setminus\{-1\}, *)$ est abélien.