المحاضرة الخامسة: الصورة الرياضية لنموذج راش

عند وضع الصيغة الرياضية لاستجابة فرد ما عن الفقرة (i) فالمتغيرات الأساسية المؤثرة في الاستجابة، هما قدرة الفرد (ø) وصعوبة الفقرة (bi)، والنموذج الذي يمكن أن يوضح تأثير هاذين المتغيرين في الاستجابة الملحوظة هو الفرق بين هاذين المعلمين (ø−bi) ويعتمد حدوث الاستجابة الصحيحة على هذا الفرق. بمعنى أن احتمال حدوث الاستجابة الصحيحة دال لهذا الفرق. ويتمثل ذلك في المعادلة التالية:

$$P_i(\theta) = f(\theta - b_i)$$ ..../1

حيث pi(ø) احتمال نجاح الفرد ذي القدرة (ø) على الفقرة (i)، أي احتمال حدوث الاستجابة الصواب.

ومن الممكن بعد ذلك تحويل هذه الدالة إلى نموذج رياضي يحقق هذه العلاقة، فاحتمال الاجابة الصحيحة ينحصر بين القيمتين (صفر) و(واحد)، في حين أن الفرق (ø−bi) يمكن أن يكون أي عدد حقيقي، وقد يصل إلى سالب ما لانهاية (−∞) وحتى موجب ما لانهاية (+∞، لذا ينبغي أن نختار نموذجا احتماليا يعتمد على الفرق

(ø−bi) ويجعله منحصرا بين القيمتين (صفر) و(واحد)، وليكن احتمال التوزيع الأسي مثلا لذا تحول (ø−bi) إلى الصيغة الأسية للأساس الطبيعي (e) فتكون الصيغة:

$$e^{(\theta - b_i)} = \exp(\theta - b_i)$$ ..../2

ويعد المقدار exp(ø−bi) مميزا أو مرجحا للنجاح، وحيث أنه في حالة قدرة الفرد (ø) تكون أكبر من صعوبة الفقرة (bi) يكون احتمال الإجابة الصواب أكبر من (0.50) وتتراوح هذه الصيغة بين صفر ومالا نهاية. ولتحويلها من (صفر) إلى (واحد) نصل إلى النسبة:

$$\frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)}$$ ..../3

وهنا يمكن مساواتها بالطرف الأيسر من المعادلة (1) وتصبح المعادلة:

$$P_i(\theta) = \frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)}$$ ..../4

وبما أن هذه المعادلة تمثل احتمال النجاح في الاستجابة، فإن احتمال الخطأ في الاستجابة (ø)Qi يمكن تمثيله بالمعادلة الآتية:

/5 .....

$$Q_i(\theta) = 1 - \frac{\exp(\theta - b_i)}{1 + \exp(\theta - b_i)} = \frac{1}{1 + \exp(\theta - b_i)}$$

ومن المعادلتين (4) و(5) تكون المعادلة العامة لنموذج راش كالآتي:

6/.....

$$P_i(\theta) = \frac{\exp[x(\theta - b_i)]}{1 + \exp(\theta - b_i)} \quad x=٠,١$$

وتعد هذه الصورة العامة للنموذج والاكثر ألفة بين مجموعة من نماذج القياس التي ترجع ل "راش"، والتي توفر نموذجا فعالا للاستجابة، حيث تجمع بين خطية التدريج وعمومية القياس. وليس هناك صيغة غير صيغة نموذج "راش" يمكنها إعطاء تقدير لكل من قدرة الفرد وصعوبة الفقرة.

ولهذا يكون تقدير (ø) متحررا من تأثير (bi) كما يكون تقدير (bi) متحررا من (ø)، فهذه هي الصيغة الوحيدة التي يمكنه إعطاء تقدير لكل من قدرة الفرد () وصعوبة الفقرة () بحيث يستقل كل منهما عن الآخر.

وتكتب أيضا بالصيغة الرياضية التالية:

7/.....

$$P_i(\theta) = \frac{e^{D(\theta - b_i)}}{1 + e^{D(\theta - b_i)}}$$