Chapitre 5

TORSION

5.1. Torsion

Définition

Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés dont les moments sont parallèles à l'axe du cylindre.
(on suppose la poutre comme cylindrique et de section circulaire constante)

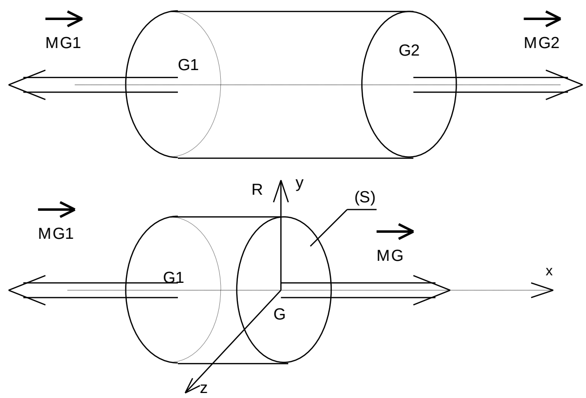


Figure 5.1 représentation d'une éprouvette en torsion

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.2 Essai de torsion

Un dispositif permet d'effectuer un essai de torsion sur une poutre encastrée à son extrémité G_1 et soumise à un torseur couple à son extrémité G_2.
Cette machine permet de tracer le graphe du moment appliqué en G_2 en fonction de l'angle de rotation d'une section droite. (Fig.5.2)

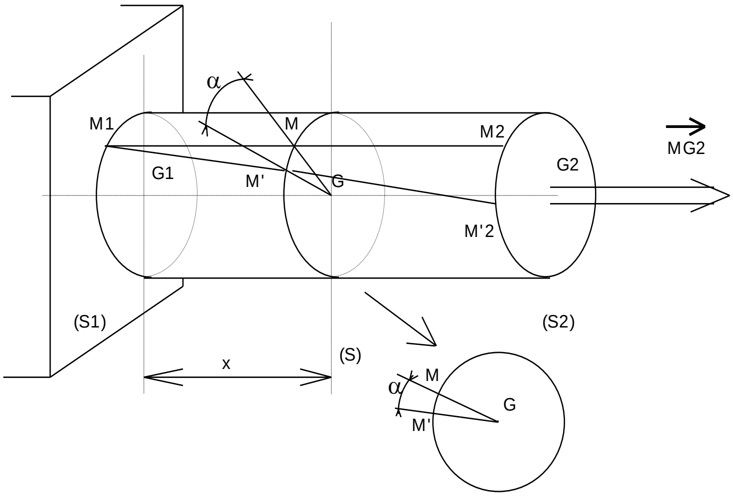


Figure 5.2: Essai de torsion

On note lors de l'essai que, pour une même valeur du moment, l'angle α croit de façon linéaire avec x, l'abscisse de la section droite étudiée : $\alpha = k.x$

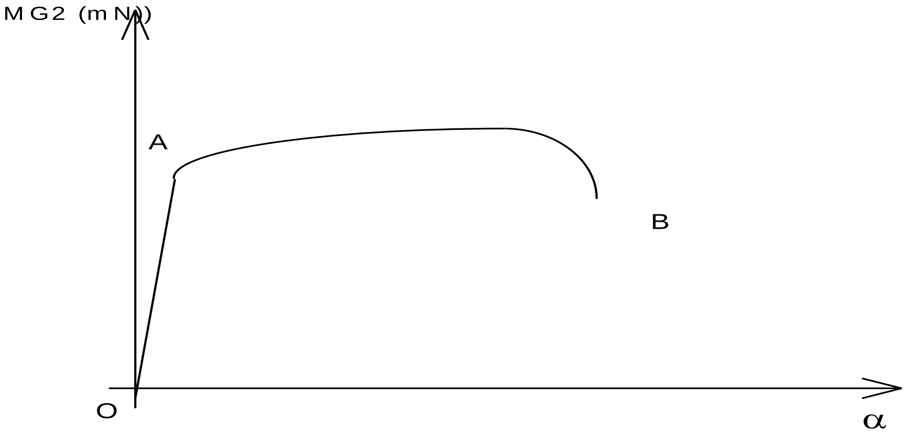


Figure 5.3 : diagramme de l'essai de torsion

Analyse de la courbe obtenue

◊ **Zone OA :** c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur du moment jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa forme initiale. Dans cette zone, *l'angle α de torsion est proportionnel au couple appliqué.* Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.

◊ **Zone AB :** c'est la zone des déformations permanentes. L'éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale après déformation.

5.3 Déformations élastiques

La propriété constatée ci-dessus a permis d'établir la relation : $\alpha = \dfrac{Mt.x}{G.I_0}$ (5.1)

Unités : Mmoment de torsion en N.mm

G module d'élasticité transversal en MPa

α en radian

Io moment quadratique polaire de la section (S) en mm^4

En définissant l'angle unitaire de torsion par : $\theta = \alpha / x$ (exprimé en rad/mm), notre relation devient alors :

$$\boxed{Mt = G.\theta.I_O} \tag{5.2}$$

5.4 Contraintes

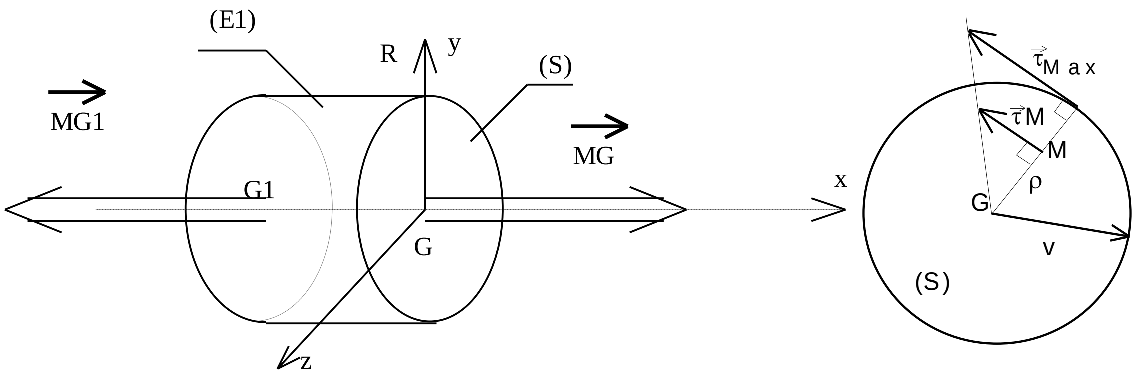


Figure 5.3 tronçon d’arbre isolé

Soit M un point de la section droite (S) de la poutre situé à une distance ρ du centre G de la section (voir ci-dessus). On définit la contrainte de torsion τ en M par la relation :

$$\boxed{\tau_{M} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_o}{\rho}\right)}} \tag{5.3}$$

Avec : τ contrainte tangentielle en MPa.

Mt moment de torsion en N.mm

Io moment quadratique polaire de la section (S) en mm^4

Contrairement aux phénomènes étudiés jusqu'à maintenant, la contrainte varie en fonction du point choisi dans une section droite. Plus ce point est éloigné du centre de la section, plus la contrainte y sera importante.

La contrainte est maximale pour $\rho = \rho_{maxi}$,soit :

$$\tau_M = \frac{Mt}{\left(\frac{I_O}{\rho_{\max i}}\right)} \qquad (5.4)$$

5.5 Conditions de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique τ_p (voisine de la contrainte pratique de cisaillement). On a :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{s} \qquad (5.4)$$

s est un coefficient de sécurité.

τ_e est la contrainte élastique de cisaillement

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\boxed{\tau_{réelle} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_O}{\rho_{\max i}}\right)} < \tau_p} \qquad (5.5)$$

5.6. Influence des variations de section

Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus.

Il faut alors appliquer un coefficient de concentration de contraintes

Exemple : épaulement (figure 6.3)

$$\boldsymbol{\tau_{réel}} = k\tau_{nominal} \qquad (5.6)$$

Le tableau 6.1donne les valeurs de k en fonction de r,d et D

Tableau 6.1: Valeurs de

r/D D/d	0,1	0,05	0,02
1,09	1,3	1,5	1,7
1,2	1,5	1,7	2,5
1,5	1,7	2,2	2,7

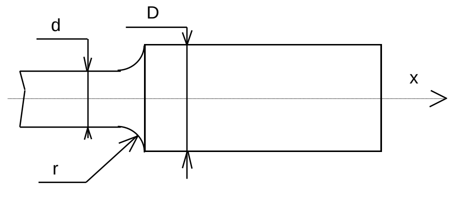
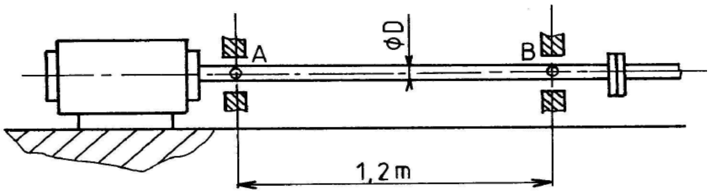


Figure 5.3 arbre présentant une variation de d'appl**ication**

Exercice N°1

Un arbre AB (longueur 1,2m) de section cylindrique constante, doit transmettre une puissance P (P=24 KW) d'un moteur électrique à un manchon d'accouplement avec une fréquence de rotation N (N=1600 tr/min)

On admettra : $\tau e = \frac{Re}{2}$;Re =390 N/mm² , s = 5



Calculer :

1- Le diamètre de l'arbre
2- L'angle de torsion unitaire et l'angle de torsion total (on prend G=8000 daN/mm²)

Solution :

1) Diamètre de l'arbre :

On applique la formule de la contrainte Maxi

$\tau_{MAX} = \frac{Mtmax\ .R}{Io} \leq Rpg$

Mtmax= $\frac{P}{\omega}$; P= 24000w ;$\omega = \frac{\pi\ N}{30}$

N =1600tr/min ; $\omega \frac{\pi.1600}{30} = 167{,}55\ rad/$s

Mtmax =$\frac{24000}{167{,}55} = 143{,}24\ Nm$⇨143240 N.mm

Ce qui nous donneen fonction de Rpg : $\frac{143240}{\frac{\pi D3}{16}} \leq Rpg$

Sachant que Rpg = $\frac{Reg}{s}$ avec Reg=$\frac{Re}{2} = \frac{390}{2} = 195\ N/mm^2$; s=5

Rpg =$\frac{195}{5}$ = 39 N/mm² et$\frac{143240}{\frac{\pi D3}{16}} \leq 39$

$d = \sqrt[3]{\frac{143240.16}{\pi.39}}$ =26,54 mm

En pratique on prendra au minimum un diamètre de 27mm

2) Déformation ,angle unitaire de torsion **$\alpha°_{AB}$**

on applique la formule :

$\theta = \frac{Mt}{G.Io}$(1)

Mais par définition : $\theta_{AB} = \frac{\alpha_{AB}}{L}$ (2)

On pose (1) = (2) ; $\frac{M_t}{G.Io} = \frac{\alpha_{AB}}{L} \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{L.M_t}{GIo}$

M_t = 143240 N.mm

L= 1200mm ; G =80000 N/mm²

$I_o = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 27^4}{32} = 52174\ mm^4$

$\alpha_{AB} = \frac{1200.143240}{80000.52174} = 0{,}04118\ rad$

πrad =180° ; $\boldsymbol{\alpha°_{AB}} = = \frac{0{,}04118\ x180}{\pi} = 2{,}36$degrés

$$\theta_{AB} = \frac{0{,}04118}{1200} = 0{,}0000343\ rad/mm$$

$\theta°_{AB} = \frac{0{,}000343.180}{\pi} = 0{,}00196$degrés /mm

Exercice N°2

Un arbre creux en acier , de diamètre extérieur 25 cm et intérieur 15 cm, tourne à N=1000 tr/mn (tours par minutes) . Quelle est la puissance développée en kilowatts (KW) , sachant que τ_{max}= 6 0 N/mm²

Exercice N°3

Pour transmettre un couple de 600 N.m on envisage d'utiliser un arbre plein ou un arbre creux .Ces deux arbres sont constitués du même acier pour lequel τ_e=240MPa et G = 8x10^4 MPa .On adopte un coefficient de sécurité s =3 pour les deux cas .

L'arbre plein a un diamètre d_1, l'arbre creux a pour diamètres D(extérieur)et d (intérieur) tels que d= 0,8 D.

1) Déterminer le diamètre d_1 de l'arbre plein et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 200 mm.

2) Déterminer les diamètres D et d de l'arbre creux et la déformation angulaire entre deux sections distantes de 200 mm .Comparer avec le 1).