Chapitre 1 : Systèmes de numération

- Introduction
- Système décimal
- Système binaire , octal et hexadécimal
- Conversion d'un système de numération vers un autre système .
- Opérations arithmétiques en binaire, octal et hexadécimal.

Objectifs

- Comprendre c'est quoi un système de numération .
- Apprendre la méthode de conversion d'un système à un autre .
- Apprendre à faire des opérations arithmétiques en binaire.

Introduction

- Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
- Ce système est appelé le système décimal (déci signifie dix).
- Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.
  - Exemple :
    - système binaire (bi: deux),
    - le système octal (oct: huit),
    - le système hexadécimal (hexa: seize).
- En fait, on peut utiliser n'importe quel nombre de symboles différents (pas nécessairement des chiffres).
- Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé la base du système de numération.

1 . Le système décimal

- On utilise dix symboles différents:
  { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }
- N'importe quelle combinaison des symboles **{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }** nous donne un nombre.

$\boxed{2}\,3\,3\,4\,5\,6\,\boxed{7}$

Poids fort

Poids faible

$\boxed{\mathbf{345}}\,\mathbf{,}\,\boxed{\mathbf{567}}$

Partie entière

Partie fractionnelle

Développement en polynôme d'un nombre dans le système décimal

- Soit le nombre 1978, ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

$$1978 = 1000 + 900 + 70 + 8$$
$$1978 = 1*1000 + 9*100 + 7*10 + 8*1$$
$$1978 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0$$

Cette forma s'appelle la forme polynomiale

Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale

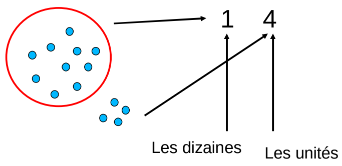
$$1978{,}265 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} + 5*10^{-3}$$

Comptage en décimal

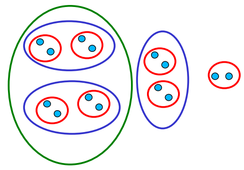
- Sur une seule position : 0 ,1,2,3,4,5,….9= 10^1-1
- Sur deux positions : 00 , 01,02, …..,99=10^2-1
- Sur trois positions 000,001,……,999=10^3-1
- Sur n positions : minimum 0
  maximum 10^n-1
  nombre de combinaisons 10^n

2 . Système binaire (système à base 2): exemple illustratif

Supposons qu'on a 14 jetons , si on forme des groupes de 10 jetons. On va obtenir 1 seul groupe et il reste 4 jetons.



. Maintenant on va former des groupes de 2 jetons (on obtient 7 groupes)
. Par la suite on va regrouper les 7 groupes 2 à 2 (on obtient 3 groupes).
. On va regrouper ces derniers aussi 2 à 2 (on obtient 1 seul groupe)
. Le schéma illustre le principe :



Nombre de jetons qui restent en dehors des groupes : 0
Nombre de groupes qui contiennent 2 jetons : 1
Nombre de groupes qui contiennent 2 groupes de 2 jetons : 1
Nombre de groupes qui contiennent des groupes de 2 groupes de 4 jetons : 1

Si on regroupe les différents chiffres on obtient : 1110
1110 est la représentation de 14 dans la base 2

- Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : { 0 , 1}

Un bit $(\boxed{1}101)_2$ La base

Le bits du poids forts $(\boxed{1}\ 1\ 0\ \boxed{1})_2$ Le bits du poids faible

. Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomial

$$(1110)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 = (14)_{10}$$

$$(1110{,}101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (14{,}625)_{10}$$

Comptage en binaire

- Sur un seul bit : 0 , 1

.Sur 2 bits :

Binaire	Décimal
00	0
01	1
10	2
11	3

4 combinaisons= 2^2

Sur 3 Bits

Binaire	Décimal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

8 combinaisons= 2^3

Le système octal (base 8)

- 8 symboles sont utilisés dans ce système:
  { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

- **Exemple 1 :**

$$(127)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0$$

$$(127{,}65)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0 + 6*8^{-1} + 5*8^{-2}$$

Exemple 2 :
Le nombre (1289) n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base .

Le système hexadécimal (base 16)

- On utilise seize (16) symboles différents:

$$(17)_{16} = 1*16^1 + 7*16^0$$

$$(AB)_{16} = A*16^1 + B*16^0 = 10*16^1 + 11*1$$

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Résumé

- Dans une base X , on utilise X symboles distincts pour représenter les nombres.
- La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieur à la base X.
- Chaque nombre dans une base X peut être écrit sous sa forme polynomiale .

3. Conversion d'une base X à la base 10

- Cette conversion est assez simple puisque il suffit de faire le développement en polynôme de ce nombre dans la base X , et de faire la somme par la suite.

Exemple :

$$(1101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (13)_{10}$$

$$(1A7)_{16} = 1*16^2 + A*16^1 + 7*16^0 = 1*16^2 + 10*16^1 + 7*16^0 = 256 + 160 + 7 = (423)_{10}$$

$$(1101{,}101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13{,}625)_{10}$$

$$(43{,}2)_5 = 4*5^1 + 3*5^0 + 2*5^{-1} = 20 + 3 + 0{,}4 = (23{,}4)_{10}$$

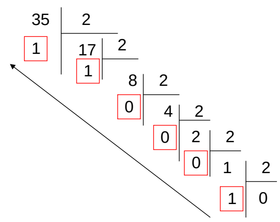
Exercice

- Effectuer les transformations suivantes à la base 10 ?
  - $(123)_6 = (?)_{10}$
  - $(45{,}76)_8 = (?)_{10}$
  - $(1100{,}11)_2 = (?)_{10}$
  - $(1ABC)_{16} = (?)_{10}$

Conversion de la base 10 à la base 2

Le principe consiste à faire des divisions successives du nombre sur 2 , et prendre le reste des divisions dans l'ordre inverse.

Exemple 1 : $(35)_{10} = (?)_2$



Après division :
on obtient : $(35)_{10} = (100011)_2$

Conversion de la base 10 à la base 2 : cas d'un nombre réel

- Un nombre réel est constitué de deux parties : la partie entière et la partie fractionnelle.
- La partie entière est transformée en effectuant des divisions successives.
- La partie fractionnelle est transformée en effectuant des multiplications successives par 2 .

Exemple : $35{,}625 = (?)_2$

P.E= 35 $= (100011)_2$

PF= 0,625 = $(?)_2$

$0{,}625 * 2 = \boxed{1}{,}25$

$0{,}25 * 2 = \boxed{0}{,}5$

$0{,}5 * 2 = \boxed{1}{,}0$

$(0{,}625) = (0{,}101)_2$

Donc $35{,}625 = (100011{,}101)_2$

- **Exemple 2:** $(0{,}6)_{10} = (?)_2$

$0{,}6 * 2 = 1{,}2$

$0{,}2 * 2 = 0{,}4$

$0{,}4 * 2 = 0{,}8$

$0{,}8 * 2 = 1{,}6$

$\longrightarrow (0{,}6) = (0{,}1001)_2$

Remarque :

Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision .

Exercice :

Effectuer les transformations suivantes :

$(23{,}65) = (?)_2$

$(18{,}190) = (?)_2$

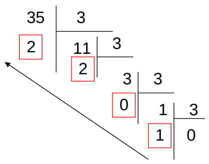
Conversion du décimal à une base X

- La conversion se fait en prenant les restes des divisions successives sur la base X dans le sens inverse.

Exemple :

$35 = (?)_3$

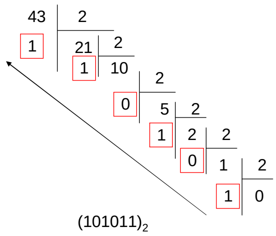
$35=(1022)_3$



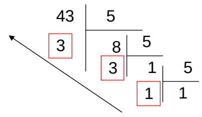
- **Question :** Effectuer les transformations suivantes :

$(43)_{10}=(?)_2=(?)_5=(?)_8=(?)_{16}$

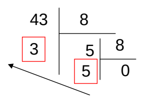
19



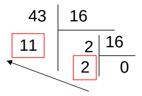
$(101011)_2$



$(133)_5$



$(53)_8$

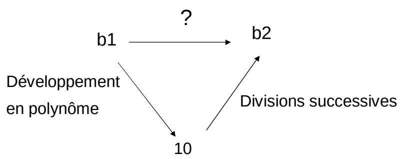


$(2B)_{16}$

20

Conversion d'une base b1 à une base b2

- Il n'existe pas de méthode pour passer d'une base b1 à une autre base b2 directement.
- L'idée est de convertir le nombre de la base b1 à la base 10 , en suit convertir le résultat de la base 10 à la base b2 .

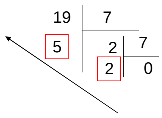


21

Exemple : $(34)_5=(?)_7$

$$(34)_5 = 3*5^1 + 4*5^0 = 15 + 4 = (19)_{10} = (?)_7$$

$(19)_{10}=(25)_7$
$(34)_5=(25)_7$



Exercice : effectuer les transformations suivantes

$(43)_6=(?)_5=(?)_8$
$(2A)_{16}=(?)_9$

22

Conversion : binaire → octal

. En octal chaque, symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire.
. L'idée de base est de replacer chaque symbole dans la base octal par sa valeur en binaire sur 3 bits (faire des éclatement sur 3 bits).

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Exemples :
$(345)_8=(\underline{011}\ \underline{100}\ \underline{101})_2$
$(65,76)_8=(\underline{110}\ \underline{101},\ \underline{111}\ \underline{110})_2$
$(35,34)_8=(\underline{011}\ \underline{101}\ ,\ \underline{011}\ \underline{100})_2$

Remarque :
le remplacement se fait de droit à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle .

23

Conversion : Octal → binaire

- L'idée de base est de faire des regroupements de 3 bits à partir du poids faible.
- Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur octal correspondante .

Exemple :

$(11001010010110)_2=(\underline{011}\ \underline{001}\ \underline{010}\ \underline{010}\ \underline{110})_2=(31226)_8$

$(110010100,10101)_2= (\underline{110}\ \underline{010}\ \underline{100}\ ,\ \underline{101}\ \underline{010})_2=(624,51)_8$

Remarque :
le regroupement se fait de droit à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle .

24

Conversion : hexadécimal → binaire

. En Hexa chaque symbole de la base s'écrit sur 4 bits.

. L'idée de base est de replacer chaque symbole par sa valeur en binaire sur 4 bits (faire des éclatement sur 4 bits).

Décimal	Hexadécimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Exemple :

$(345B)_{16}$=(0011 0100 0101 1011)$_2$

$(AB3,4F6)_{16}$ = (1010 1011 0011 , 0100 1111 0110) $_2$

Conversion : binaire →hexadécimal

. L'idée de base est de faire des regroupements de 4 bits à partir du poids faible.

Par la suite remplacer chaque regroupement par la valeur Héxa correspondante .

Exemple :

$(11001010100110)_2$=(0011 0010 1010 0110)$_2$=$(32A6)_{16}$

$(110010100,10101)_2$= (0001 1001 0100,1010 1000)$_2$=$(194,A8)_{16}$

4. Opérations arithmétiques en binaire

```
  0      0      1      1
+ 0    + 1    + 0    + 1
 ---    ---    ---    ---
  0      1      1     1 0

              1   1
    1   1   0   0   0   1   1
+ 1   0   0   0   1   0   1   1
-------------------------------
  1   1   1   0   1   1   1   0
```


Opérations arithmétiques en octal

```
    [1]  [1]
     4    3    6    5
+         4    5    1
----------------------
    [5]  [8]  [11] [6]
```

En octal 8 s'écrit 10 → [0]

En octal 11 s'écrit 13 → [3]

Le résultat final : **(5036)$_8$**

Opérations arithmétiques en hexadécimal

```
   [1]
    4    8    6    5
+   7    A    5    1
---------------------
  [12] [18] [11]  [6]
```

[C]

En hexa 18 s'écrit 12 → [2]

En hexa 11 s'écrit B → [B]

Le résultat final : **(C2B6)$_{16}$**

Exercice

- Effectuer les opérations suivantes et transformer le résultat au décimal à chaque fois:
- $(1101,111)_2+(11,1)_2=(?)_2$
- $(43)_8+(34)_8=(?)_8$
- $(43)_6+(34)_6=(?)_6$
- $(AB1)_{16}+(237)_8=(?)_{16}$

5. Quel est le système utilisé dans les dispositifs numériques ?

- Les machines numériques utilisent le système binaire.
- Dans le système binaire : uniquement 2 symboles sont utilisés : 0 et 1.
- C'est facile de représenter ces deux symboles dans les machines numériques.
- Le 0 et le 1 sont représentés par deux tensions .

Binaire (logique)	Tension
0	0 V
1	5 V