UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Module : Analyse 01
Année universitaire : 2022/2023

Limites , continuité et dérivabilité des fonctions

0.1 Motivation

Nous avons résoudre beaucoup d'équations (par exemple $ax + b = 0$, $ax^2bx + c = 0, ...$) mais ces équations sont très particulières. Pour la plupart des équations nous ne saurons pas les résoudre, en fait il n'est pas évident de dire s'il existe une solution, ni comme bien il y en a. Considérons par exemple l'équation extrêmement simple :

$$x + e^x = 0.$$

Il n'y a pas de formule connue (avec de somme , des produit, ... de fonctions usuelles) pour trouver la solution la solution x.
Dans ce chapitre nous voir que grâce à l'étude de la fonction $f(x) = x + e^x$ il possible d'obtenir beaucoup d'information sur la solution de l'équation plus générale $x + e^x = y$ (où $y \in \mathbb{R}$.)
Nous serons capable de prouver que pour chaque $y \in \mathbb{R}$ l'équation "$x + e^x = y$" admet une solution x ; que cette solution est unique ; et sourons dire comment varie x en fonction de y. Le point clé de tout cela est l'étude de la fonction f et en particulier de sa continuité. Même s'il n'est pas possible de trouver l'expression exacte de la solution x en fonction de y, nous allons mettre en place les outils théoriques qui permettent d'en trouver une solution approchée.

0.2 Notion de fonction

Définition 0.2.1 *Une fonction d'une variable réelle à valeures réelles est une application* $f : D \to \mathbb{R}$, *où* $D \subseteq \mathbb{R}$. *On appelle* D *le* ***domaine de définition*** *de la fonction* f.

Exemple 0.2.2 *La fonction inverse*

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est la partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $\mathcal{C} = \{(x, f(x))/x \in D\}$

0.2.1 Opérations sur les fonctions

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, et $g : D \to \mathbb{R}$, deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

— la somme de f et g est la fonction $f + g : D \to \mathbb{R}$, définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in D$
— le produit de f et g est la fonction $f.g : D \to \mathbb{R}$, définie par $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ pour tout $x \in D$
— la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda.f : D \to \mathbb{R}$, définie par $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ pour tout $x \in D$

0.2.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 0.2.3 *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :*
- $f \geq g$ *si* $\forall x \in D \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ *si* $\forall x \in D \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ *si* $\forall x \in D \quad f(x) > 0$;
- f *est dite constante sur* D *si* $\exists\, a \in \mathbb{R}\, \forall x \in D \quad f(x) = a$;
- f *est dite nulle sur* D *si* $\forall\, x \in D \quad f(x) = 0$;

Définition 0.2.4 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*
- f *est majorée sur* D *si* $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D \quad f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* D *si* $\exists\, m \in \mathbb{R}\, \forall x \in D \quad f(x) \geq m$;
- f *est bornée sur* D *si est à la fois majorée et minorée sur* D, *c'est-à-dire*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M.$$

0.2.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 0.2.5 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*
- f *est dite croissante sur* D *si* $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- f *est dite strictement croissante sur* D *si* $\forall x, y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- f *est dite décroissante sur* D *si* $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- f *est dite strictement décroissante sur* D *si* $\forall x, y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
- f *est monotone (resp. strictement monotone) sur* D *si* f *est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur* D.

Définition 0.2.6 *(Parité)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[ou [-a, a] ou \mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :
- f *paire si* $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$,
- f *impaire si* $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$,

Interprétation graphique :
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Définition 0.2.7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$.*

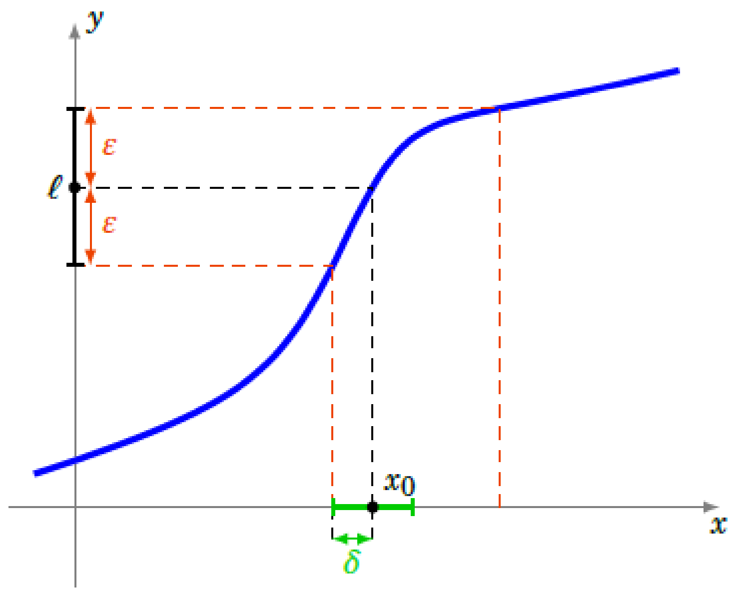
Interprétation graphique :
f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Définition 0.2.8 *(limite)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soir $x_0 \in \mathbb{R}$ un oint de I ou une extrémité de I. Soit $\text{ł} \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.



0.3 Continuité

Définition 0.3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue au point x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

On dit que f est continue à droite si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

On dit que f est continue à gauche si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Enfin on dit qu'une fonction est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
Dans cette définition, le nombre η dépend de ϵ et en général de x_0.
Par exemple, étudions la continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^3$. Nous avons :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = h(h^2 + 3x_0h + 3x_0^2)$$

Soit $\alpha > 0$ fixé, alors pour $|h| < \alpha$, nous pouvons écrire :

$$|h^2 + 3x_0h + 3x_0^2| \leq \alpha^2 + 3|x_0|\alpha + 3x_0^2$$

Soit $M = \alpha^2 + 3|x_0|\alpha + 3x_0^2$ et soit $\epsilon > 0$ donné, alors si nous prenons $\eta = \min(\alpha, \epsilon/M)$, nous déduisons de ce qui précède que :

$$(|h| < \eta) \Rightarrow (|(x_0 + h)^3 - x_0^3|) \leq M|h| < \epsilon$$

0.4 Dérivée

0.4.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 0.4.1 *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limie finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Définition 0.4.2 *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.*

Par exemple la fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2x_0.$$

Exemple 0.4.3 *Montrons que la dérivée de $f(x) = sin(x)$ est $f'(x) = cos(x)$. Pour x_0 quelconque on écrit :*

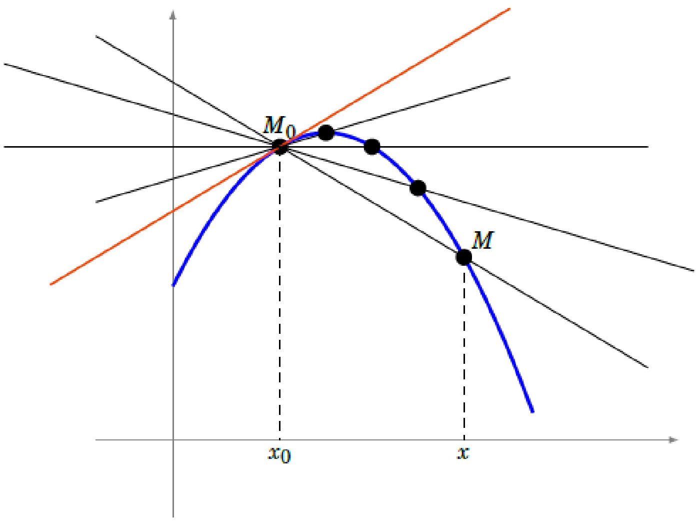
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}.\cos\frac{x+x_0}{2}$$

Lorsque $x \to x_0$ alors $\cos\frac{x+x_0}{2} \longrightarrow \cos x_0$

0.4.2 Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$



0.4.3 Autres écritures de la dérivée

Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en x_0.

Proposition 0.4.4 — *f est dérivable en x0 si et seulement si* $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

— *est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x)$ tend vers zéro quand $x \to x_0$*

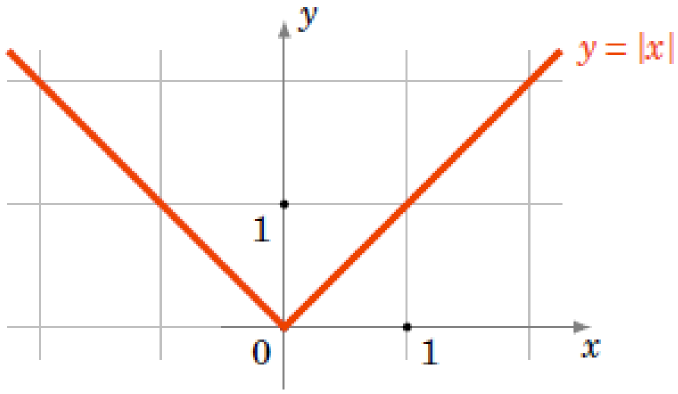
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x).$$

démonstration :
Il s'agit juste de reformuler la définition de $f'(x_0)$. Par exemple, après division par $x - x_0$, la deuxième écriture devient :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l + \epsilon(x).$$

Proposition 0.4.5 *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
— *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0*
— *Si f est dérivable I alors f est continue I.*

Remarque 0.4.6 *La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en* 0 *mais n'est pas dérivable en 0.*



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut $+1$), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$. Cela se lit aussi sur le dessin il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche mais elles ont des directions différentes.

0.4.4 Calcul des dérivés

Proposition 0.4.7 *Soient f g deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:*
— $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
— $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé,*
— $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$,
— $(\frac{1}{f})(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$,
— $(\frac{f}{g})(x) = -\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.$

0.4.4.1 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions, u représente une fonction $x \mapsto u(x)$

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}$	u^n	$nu'u^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$	u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$-\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$

Notons que si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x\ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2.e^{x\ln 2} = \ln 2.2^x$

Proposition 0.4.8 *(Composition) Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :*

$$(f \circ g)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

Par exemple. Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln x$ et $f(x) = 1 + x^2$. Alors

$$(f \circ g)'(x) = f'(x).g'(f(x)) = g'(1 + x^2).2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Corollary 0.4.9 *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bejective dont on note $f^- : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^- est dérivable et on a pour tout $x \in J$:*

$$(f^-)'(x) = \frac{1}{f'(f^-(x))}$$

Remarque : Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité $f(g(x)) = x$, où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.

0.4.5 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f", \quad f^{(n+1)} = (f^n)'$$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 0.4.10 *(Formule de Leibniz)*

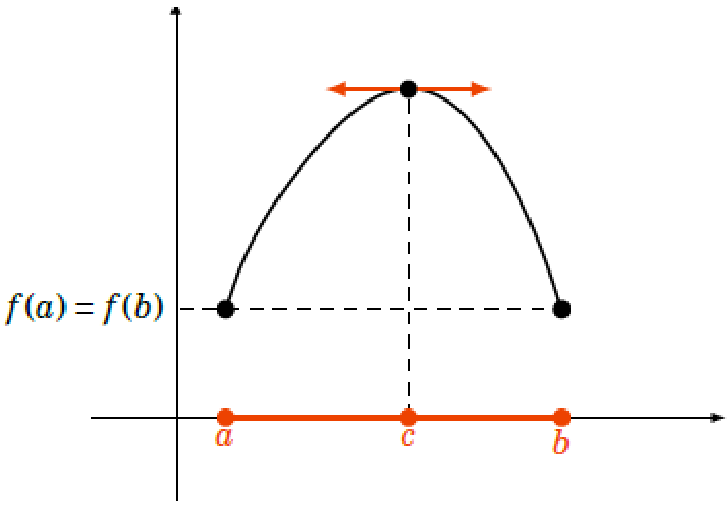
$$(f.g)^n = f^{(n)}.g + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + ... + C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + ... + f.g^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Par exemple :
— Pour $n = 1$ on retrouve $(f.g)' = f'.g + f.g'$.
— Pour $n = 2$ on retrouve $(f.g)" = f".g + 2f'.g' + f.g"$
Calculons les dérivées n-ième de $(x^2 + 1)e^x$ pour tout $n \geq 0$. Notons $f(x) = e^x$ et $g(x) = (1 + x^2)$
Appliquons la formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)} = e^x.(x^2 + 2nx + \frac{n(n-1)}{2} + 1).$$

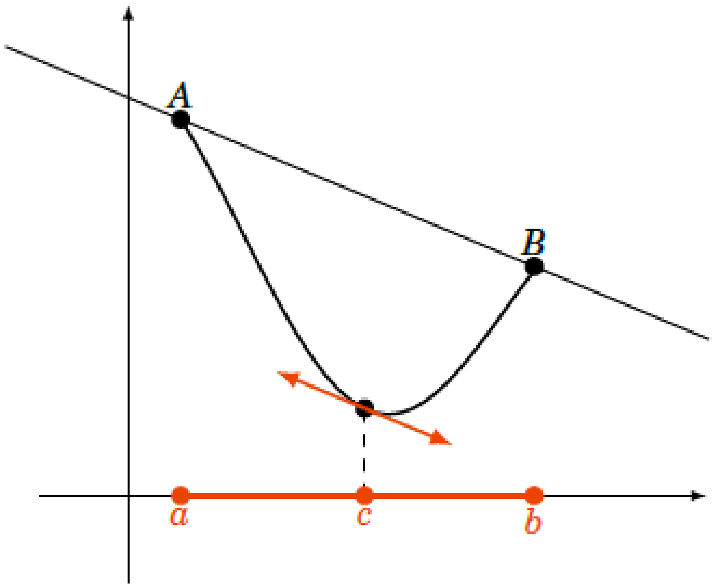
Théorème 0.4.11 ***Théorème de Rolle***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que
— *f continue sur $[a, b]$.*
— *f dérivable sur $]a, b[$.*
— *$f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.
Démonstration. Voir le cours.

Théorème 0.4.12 ***Théorème des accroissements finis***
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Démonstration. Voir le cours.

Corollary 0.4.13 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante.*
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est constante.*
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante.*
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante.*

Remarque :
La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollary 0.4.14 ***Inégalité des accroissements finis*** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I ouvert. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq M$ alors*

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Par exemple. Soit $f(x) = \sin x$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$\text{pour tout} x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

Corollary 0.4.15 ***Règle de l'Hospital*** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

— $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
— $\forall \in I \setminus \{x_0\} : g'(x) \neq 0$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 0.4.16 *Calculer la limite en 1 de $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :*

— $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), \quad f(1) = 0, \quad f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 1}$,
— $g(x) = \ln(x), \quad g(1) = 0, g'(x) = \dfrac{1}{x}$,

— *Prenons* $I =]0,1]$, $x_0 = 1$, *alors* g' *ne s'annule pas sur* $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x \longrightarrow 3 \textit{ quand } \quad x \to 1$$

Exercice :

— Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.

— Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que $\ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ pour tout $(x > 0)$.

— Soit $f(x) = e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?

— Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x \to 0$) :

$$\frac{x}{(1+x)^n - 1}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1-\cos x}{\tan x}, \quad \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

LES FONCTIONS USUELLES

0.5 Fonctions circulaires inverses

0.5.1 Arccosinus

Considérons la fonction **cosinus** $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction **cosinus** est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : \ [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x.$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : \ [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x.$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$$

Autrement dit :

$$\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

0.5.2 Arccosinus

la restriction

$$\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin x.$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : \ [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin x.$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Autrement dit :

$$\text{Si} \quad x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

Terminons avec la dérivée de arcsin :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

0.5.3 Arctangente

la restriction

$$\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x.$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan x.$$

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Autrement dit :

$$\text{Si} \quad x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\qquad \tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

La dérivée de arctan :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

0.6 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

0.6.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour. $x \in \mathbb{R}$ le **cosinus hyperbolique** est :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La restriction $ch : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $argch : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

0.6.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour. $x \in \mathbb{R}$ le **sininus hyperbolique** est :

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant

$$\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty,$$

c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

0.6.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la **tangente hyperbolique** est :

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

La fonction $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,+1[$ est une bijection, on note $argth :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

0.6.4 Trigonométrie hyperbolique

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$
$$ch(a+b) = ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b)$$
$$ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$$
$$sh(a+b) = sh(a).ch(b) + ch(a).sh(b)$$
$$sh(2a) = 2.sh(a).ch(a)$$
$$th(a+b) = \frac{th(a)+th(b)}{1+th(a).th(b)}$$
$$ch'(x) = sh(x)$$
$$sh'(x) = ch(x)$$
$$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$
$$argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (\quad x > 1)$$
$$argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}, (\quad |x| < 1)$$
$$argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), (\quad x \geq 1)$$
$$argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), (\quad x \in \mathbb{R})$$
$$argth(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), (\quad -1 < x < 1)$$

0.7 Solution de la série "5"

Exercice 1 :

1. $\arccos x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos(\arccos x) = \cos(\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{-\pi}{2} \leq \arctan(\frac{x}{2}) \leq \frac{\pi}{2}$, donc l'équation n'admet pas de solutions.
3. $\arcsin x = \arccos x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x) \Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 :

$$a) \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$b) \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$c) \quad \tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d) \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

e) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, on peut démontrer sa par deux méthodes.
Soit on considère la fonction $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = 0$. Donc f est constante sur $[-1,1]$, alors pour
$f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. D'où $\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \frac{\pi}{2}$
Où bien : on remarque que : $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ car cos est bijective sur $[0,\pi]$ alors $\cos(\arccos x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$. D'où on déduire le résultat volu.

f) On pose $y = \arctan x$, on a $\sin^2 y = \frac{\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$.
Donc :

$$\sin(\arctan x) = \sqrt{\frac{\tan^2(\arctan x)}{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

g) On a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

on pose $a = \arctan \alpha,\ b = \arctan x$, alors

$$\tan(\arctan \alpha + \arctan x) = \frac{\tan \arctan \alpha + \tan \arctan x}{1 - \tan \arctan \alpha.\tan \arctan x} = \frac{\alpha + x}{1 - \alpha.x}$$

Car arctan est un bijection, donc : $\quad \arctan \alpha + \arctan x = \arctan(\frac{\alpha+x}{1-\alpha.x})$

Exercice 3 :

1. Pour $\sqrt{1-x^2} \leq x$ a un sens, $x \geq 0$ et $1-x^2 \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1$, donc
   $1 - x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.
2. f définit sur $[-1,1]$ et $f'(x) = \frac{-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(x) > 0$, si $x \in]-1, \frac{\sqrt{2}}{2}[, \quad f'(x) < 0$, si $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$

Exercice 4 :

$$sh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$sh(x).ch(y) + ch(x).sh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

La meme chose pour l'autre formulle

Exercice 5 :

Pour $sh(x) \geq x$ on pose : $f(x) = sh(x) - x$ alors $f'(x) = ch(x) - 1, \quad x \geq 0$
Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante et $f(0) = 0$, alors
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x$.

Pour : $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

On pose $g(x) = ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$ on a $g(0) = 0$ et $g'(x) = sh(x) - x \geq 0$ donc g est croissante et $g(0) = 0$, d'où $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 6 :

D'aprés l'inégalité des accroissement finis. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée : $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$, et $|\frac{1}{1+x^2}| \leq 1$, d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |\arcsin x - \arctan y| \leq |x - y|$$

On applique le théorème des acroissements finis sur $[0, x]$ on obtien
$e^x - e^0 = e^c(x - 0) \Leftrightarrow e^x - 1 = x.e^c$, or on a $0 \leq c \leq x \Leftrightarrow x \leq xe^c \leq xe^x$. D'où

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$