Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Licence mathématique (S1) : 2022/2023 — B. Bougherara, M. Benmeddour

Module : Analyse 01

Sérier 04 (Les fonctions élémentaires)

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in [-1, +1]$, on a

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x)$$

Exercice 2. Soit $f : D \longrightarrow [-1, +1]$ la fonction définie par $f(x) = \sin x$ où $D = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

1. Vérifier que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1} en fonction de arcsin.
2. Même question pour $f(x) = \cos x$ et $D = [2022\pi,\ 2023\pi]$.

Exercice 3.

1. Calculer $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}),\ \arccos\cos(\frac{\pi}{3}),\ \arccos(\sin\frac{\pi}{3})$.
2. Calculer $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3}),\ \arccos(\cos\frac{7\pi}{3}),\ \arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}),\ \arcsin(\sin\frac{7\pi}{3})$.

Exercice 4.

1. Montrer que $\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$, avec $ab < 1$
2. Calculer $\arctan(1/2) + \arctan(1/3)$

Exercice 5.

1. Calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx), \quad S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$$

2. Linéariser $\mathrm{sh}x.\mathrm{ch}(2x)$, $\mathrm{ch}x.\mathrm{ch}^2x$
3. Vérifier que $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$ et puis calculer

$$P = \mathrm{ch}x.\mathrm{ch}(\frac{x}{2}).\mathrm{ch}(\frac{x}{2^2}).......\mathrm{ch}(\frac{x}{2^n}).$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \mathrm{argch}\sqrt{1+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \mathrm{argsh}|x|$.
4. Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
5. f est elle dérivable en 0 ?.

Exercice 7. (**Devoir**)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ \ell & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer ℓ.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ (Appliquer TAF entre 0 et x).
4. Déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Calculer g' où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arctan x^2$.
6. Calculer $\arctan x^2 + \arctan \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ et déduire $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
7. Montrer que $g : [0, +\infty[\to [0, \pi/2[$ est bijective et calculer g^{-1}.
8. Calculer $(g^{-1})'$ de deux manières.

Rappel

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad \arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-1}}{2}, \quad \text{ch}x + \text{sh}x = e^x$$

$$\text{ch}'x = \text{sh}x, \quad \text{sh}'x = \text{ch}x, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch}a\text{ch}b + \text{sh}a\text{sh}b, \quad \text{ch}(a-b) = \text{ch}a\text{ch}b - \text{sh}a\text{sh}b$$

$$\text{sh}(a+b) = \text{sh}a\text{ch}b + \text{ch}a\text{sh}b, \quad \text{sh}(a-b) = \text{sh}a\text{ch}b - \text{ch}a\text{sh}b$$

$$\text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x, \quad \text{sh}(2x) = 2\text{sh}x\text{ch}x$$

$$\text{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty], \quad \text{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\text{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{argth} : [-1, +1] \to \mathbb{R}, \quad \text{argth}' x = \frac{1}{x^2-1}$$