Université Mohamed Boudiaf -M'sila-
Faculté de mathématiques et de l'informatique
Département de mathématiques
3ème année licence
Equation de la physique mathématique

TD 2: EDP d'ordre1-Méthodes des caractéristiques
Corrigé

Exercice01
1) $\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(x) = -4x$
alors:

- l'équation est hyperbolique sur le domaine $D = R_*^- \times R$, (car: $\Delta > 0$)
- l'équation est parabolique sur le domaine $D = \{0\} \times R$, (car: $\Delta = 0$)
- l'équation est elliptique sur le domaine $D = R_*^+ \times R$, (car: $\Delta < 0$)

2) $\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(x)(y) = 4 - 4xy$
alors:

- l'équation est hyperbolique sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ xy < 1\right\}$
- l'équation est parabolique sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ xy = 1\right\}$
- l'équation est elliptique sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ xy > 1\right\}$

3) $\Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(1)(xy) = -4xy$
alors:

- l'équation est hyperbolique sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ xy < 0\right\}$
- l'équation est parabolique sur le domaine $D = \{0\} \times R \cup R \times \{0\}$
- l'équation est elliptique sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ xy > 0\right\}$

4) $\Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(e^{x+y}) = -4(e^{x+y}) < 0$
alors, l'équation est elliptique sur le domaine $D = R \times R$
5) $\Delta = B^2 - 4AC = (2xy)^2 - 4(1 + x)(-y^2) = y^2 \left[2x^2 + 4x + 4\right] > 0$
alors:

- l'équation est hyperbolique sur le domaine $D = R \times R^*$
- l'équation est parabolique sur le domaine $D = R \times \{0\}$

Exercice 02

1)

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$$

$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 0$, alors l'équation est parabolique sur tout R^2

L'équation caractéristique est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{6}{2(1)} = 3 \Rightarrow 3x - y = c$$

Les courbes caractéristiques associées est donc

$$\begin{cases} \zeta(x,y) = 3x - y \\ \eta(x,y) = x \end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u_x}{\partial \zeta} = -3\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial}{\partial \zeta}(3\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(3\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta})$$
$$= 9u_{\zeta\zeta} + 6u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 3\frac{\partial}{\partial \zeta}(-\frac{\partial u}{\partial \zeta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\frac{\partial u}{\partial \zeta}) = u_{\zeta\zeta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -3u_{\zeta\eta} - u_{\zeta\eta}$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par

$$u_{\eta\eta} = 5u_\zeta + u_\eta$$

2)

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

$\Delta = 0^2 - 4(y^2)(-x^2) = 4x^2y^2$, alors si $x = 0$ ou $y = 0$ l'équation est parabolique , sinon elle est hyperbolique

Considérons le domaine $D = \{0\} \times R \cup R \times \{0\}$ où l'EDP est hyperbolique à tous ses points.

L'équation caractéristique est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{0 \pm \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \pm\frac{x}{y} \Rightarrow y^2 \pm x^2 = c$$

Les courbes caractéristiques associées est donc

$$\begin{cases} \zeta(x,y) = y^2 + x^2 \\ \eta(x,y) = y^2 - x^2 \end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2x(u_\zeta-u_\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2(\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\partial u}{\partial \eta})+2x\frac{\partial (u_\zeta-u_\eta)}{\partial x}$$

$$=2u_\zeta-2u_\eta+2x[\frac{\partial (u_\zeta-u_\eta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial (u_\zeta-u_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}]$$

$$=2(u_\zeta-u_\eta)+4\,x^2(u_{\zeta\zeta}-2u_{\zeta\eta}+u_{\eta\eta})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y(u_\zeta+u_\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=2(\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \eta})+2y\frac{\partial (u_\zeta+u_\eta)}{\partial y}$$

$$=2u_\zeta+2u_\eta+2y[\frac{\partial (u_\zeta+u_\eta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial (u_\zeta+u_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}]$$

$$=2(u_\zeta+u_\eta)+\ 4\,y^2(u_{\zeta\zeta}+2u_{\zeta\eta}+u_{\eta\eta})$$

et finalement

$$y^2(2(u_\zeta-u_\eta)+4\,x^2(u_{\zeta\zeta}-2u_{\zeta\eta}+u_{\eta\eta}))-x^2(2(u_\zeta+u_\eta)+4\,y^2(u_{\zeta\zeta}+2u_{\zeta\eta}+u_{\eta\eta}))=0$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par

$$u_{\zeta\eta}=\frac{1}{2}\frac{\eta u_\zeta-\zeta u_\eta}{\zeta^2-\eta^2}$$

3)

$$u_{xx}+xu_{yy}=0, x>0$$

$\Delta=0^2-4(1)(x)=-4x,<0$, pour $x>0$ alors l'équation est elliptique
L'équation caractéristique est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{0\pm\sqrt{-4x}}{2(1)}=\pm i\sqrt{x}\Rightarrow\frac{3}{2}y\pm ix^{\frac{3}{2}}=c$$

Les courbes caractéristiques associées est donc

$$\begin{cases}\zeta(x,y)=\mathrm{Re}(\frac{3}{2}y\pm ix^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}y\\ \eta(x,y)=\mathrm{Im}(\frac{3}{2}y\pm ix^{\frac{3}{2}})=-x^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}u_\eta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{9}{4}xu_{\eta\eta}-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u_\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{3}{2}u_\zeta$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{9}{4}u_{\zeta\zeta}$
et finalement

$$\frac{9}{4}xu_{\eta\eta} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u_\eta + x(\frac{9}{4}u_{\zeta\zeta}) = 0$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par

$$u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = -\frac{1}{3\eta}u_\eta$$

4)

$$u_{xx} - u_{xy} + u_x + u_y + u = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 > 0$,alors l'équation est hyperbolique
L'équation caractéristique est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2(1)} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{dy}{dx} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = c_1 \\ y = -x + c_2 \end{cases}$$

Les courbes caractéristiques associées est donc

$$\begin{cases} \zeta(x,y) = y \\ \eta(x,y) = y + x \end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\eta$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_{\eta\eta}$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\zeta + u_\eta$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_{\eta\eta} + u_{\zeta\eta}$

et finalement

$$u_{\eta\eta} - (u_{\eta\eta} + u_{\zeta\eta}) + u_\eta + (u_\zeta + u_\eta) + u = 0$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par

$$u_{\eta\zeta} = 2u_\eta + u_\zeta + u$$

Exercice 03

$$y^3 u_{xx} - yu_{yy} + u_y = 0, \quad y > 0$$

1) On a $\Delta(x,y) = 4y^4 > 0$, donc l'équation est hyperbolique.

L'équation caractéristique est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \pm\frac{1}{y} = \pm\frac{x}{y} \Rightarrow y^2 \pm 2x = c$$

2) Les courbes caractéristiques associées est donc

$$\begin{cases} \zeta(x,y) = y^2 - 2x \\ \eta(x,y) = y^2 + 2x \end{cases}$$

3) Par la règle de chaînes, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2u_\zeta + 2u_\eta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 4u_{\zeta\zeta} - 8u_{\zeta\eta} + 4u_{\eta\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y(u_\zeta + u_\eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} &= 2(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}) + 2y\frac{\partial(u_\zeta + u_\eta)}{\partial y} \\ &= 2u_\zeta + 2u_\eta + 2y[\frac{\partial(u_\zeta u_\eta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial(u_\zeta + u_\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}] \\ &= 2(u_\zeta + u_\eta) + \ 4\ y^2(u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

et finalement

$$-16y^3 u_{\zeta\eta} = 0$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par

$$u_{\zeta\eta} = 0$$

4) On a $u_{\zeta\eta} = 0 \Rightarrow u(\zeta,\eta) = F(\zeta) + G(\eta)$ où F,G$\in C^2(R)$, Par conséquent, la solution générale de l'équation est

$$u(x,y) = F(y^2 - x) + G(y^2 + x)$$

5)On a $u(0,y) = F(y^2) + G(y^2) = -y^2$ et $u_x(0,x) = -2F'(y^2) + 2G'(y^2) = 4$, on obtient

$$\begin{cases} 2yF' + 2yG' = -2y \\ -2F' + 2G' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F' + G' = -1 \\ -F' + G' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F' = -\frac{3}{2} \\ G' = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(s) = -\frac{3}{2}s + c_1 \\ G(s) = \frac{1}{2}s + c_2 \end{cases}$$

avec $c_1 + c_2 = 0$,d'où ma splution est

$$u(x,y) = 4x - y^2$$

Exercice 04

1) $A = 1, B = 2\alpha, c = 1$, d'où $\Delta = 4(\alpha^2 - 1)$

- si $|\alpha| > 1 \Rightarrow \alpha \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ alors $\Delta > 0$, et l'équation est hyperbolique
- si $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha \in]-1, 1[$ alors $\Delta < 0$, et l'équation est elliptique
- si $|\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$ alors $\Delta = 0$, et l'équation est parabolique

2) Par la règle de chaînes, on a
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}u_\zeta + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}u_\eta$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u_x}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}u_{\zeta\zeta} + \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}u_{\zeta\eta} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}u_{\eta\eta}$
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}u_\zeta - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}u_\eta$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial u_t}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial u_t}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}u_{\zeta\zeta} - \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}u_{\zeta\eta} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}u_{\eta\eta}$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial u_t}{\partial \zeta}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial u_t}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}u_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}u_{\eta\eta}$
et finalement

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xt} + u_{tt} = 0 \Rightarrow u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = 0$$

d'où la forme canonique de cette équation est donnée par l'équation de Laplace

$$u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = 0$$