Université Mohamed Boudiaf – M'sila
Faculté Des Sciences
Domaine : Sciences de la Matière (SM)
1ère année LMD
Semestre : S1

Travaux dirigés corrigés

Physique 1
Mécanique du Point Matériel

Préparé par : Dr. KHALFALLAH Fares

Année universitaire 2022/2023

CHAPITRE 1 : Rappel Mathématique

Ex. 1-1

La résistance R équivalente à un ensemble de deux résistances R_1 et R_2 montées en dérivation (en parallèle) a pour valeur : $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Après avoir effectué des mesures, on obtient $R_1 = 1 \pm 0{,}01\ \Omega$ et $R_2 = 2 \pm 0{,}01\ \Omega$.

1. Calculer la valeur de la résistance équivalente R .
2. Trouver l'incertitude absolue ΔR et l'incertitude relative $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R}$.

Solution

1. Nous avons : $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, avec $R_1 = 1\ \Omega$ et $R_2 = 2\ \Omega$ $\Rightarrow$ $R = \dfrac{1\times 2}{1+2} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667\ \Omega$.
2. <u>L'incertitude absolue :</u> $\Delta R = \left|\dfrac{\partial R}{\partial R_1}\right| \cdot \Delta R_1 + \left|\dfrac{\partial R}{\partial R_2}\right| \cdot \Delta R_2$

   Calcul des dérivées partielles : $\dfrac{\partial R}{\partial R_1} = \dfrac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1+R_2)^2} = \left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$

   et $\dfrac{\partial R}{\partial R_2} = \dfrac{R_1 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2}{(R_1+R_2)^2} = \left(\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2$

   $$\Rightarrow \quad \Delta R = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot \Delta R_1 + \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 \cdot \Delta R_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 0{,}01 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 0{,}01$$

   $$= \frac{5}{9} \times 0{,}01 \quad \approx 0{,}006\ \Omega$$

   Donc, la résistance équivalente s'écrit : $R = R \pm \Delta R = 0{,}667 \pm 0{,}006\ \Omega$

   <u>L'incertitude relative :</u> $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{5}{9} \times 0{,}01 \times \dfrac{2}{3} \approx 0{,}008$

   $= 0{,}8\ \%$

Ex. 1-2

Une bille est lâchée d'une hauteur h, à son arrivée au sol elle avait une vitesse $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$. Si la hauteur $h = 53{,}6\ \text{m}$, mesurée avec une incertitude $\Delta h = 1\ \text{cm}$, et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$, donnée avec une précision $\varepsilon_g = 0{,}1\ \%$.

Calculer la vitesse de la bille à l'arrivée au sol, et estimer l'incertitude absolue Δv ?

Solution

1. La vitesse de la bille à l'arrivée au sol : $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

   $$= \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 53{,}6} \approx 32{,}43\ \text{m.s}^{-1}$$

2. <u>L'incertitude absolue :</u> $\Delta v = \left|\dfrac{\partial v}{\partial g}\right| \cdot \Delta g + \left|\dfrac{\partial v}{\partial h}\right| \cdot \Delta h$

   Calcul des dérivées partielles : $\dfrac{\partial v}{\partial g} = \dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \dfrac{h}{v}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial h} = \dfrac{g}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \dfrac{g}{v}$

   $$\Rightarrow \quad \Delta v = \frac{h}{v} \cdot (g \cdot \varepsilon_g) + \frac{g}{v} \cdot \Delta h = \left[\frac{53{,}6}{32{,}43} \times (0{,}001 \times 9{,}81)\right] + \left[\frac{9{,}81}{32{,}43} \times \left(\frac{1}{100}\right)\right]$$

   $$\approx 0{,}02\ \text{m.s}^{-1}$$

   Donc, la vitesse à l'arrivée au sol s'écrit : $v = v \pm \Delta v = 32{,}43 \pm 0{,}02\ \text{m.s}^{-1}$

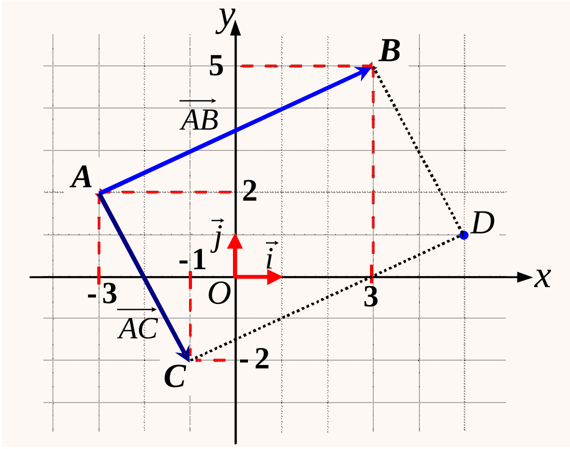
Ex. 1-3

Dans le plan (xOy) muni de la base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(-3,2)$, $B(3,5)$ et $C(-1,-2)$.

1. Représenter les points A, B et C.
2. Calculer les composantes et les modules des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer les vecteurs unitaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer un point D, du plan (xOy), tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution

Dans le plan (xOy) muni de la base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(-3,2)$, $B(3,5)$ et $C(-1,-2)$.



1. Représentation des points A, B et C.
2. Les composantes des bipoints $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} = (3-(-3))\,\vec{i} + (5-2)\,\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\,\vec{i} + (y_C - y_A)\,\vec{j} = ((-1)-(-3))\,\vec{i} + ((-2)-2)\,\vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

Les modules : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(6^2)+(3^2)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(2^2)+((-4)^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3. Les vecteurs unitaires :

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{j})$$

4. Un point $D(x,y)$, tel que $ABCD$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (ou $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$)

Alors, $6\vec{i} + 3\vec{j} = (x - x_C)\,\vec{i} + (y - y_C)\,\vec{j} = (x+1)\,\vec{i} + (y+2)\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+1 = 6 \\ y+2 = 3 \end{cases}$

Donc, les coordonnées du point D sont : $(5,1)$

Ex. 1-4

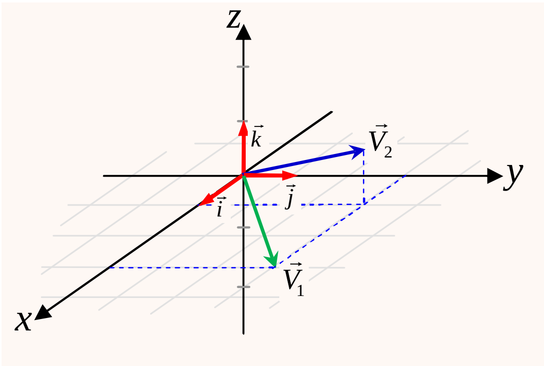
Dans un repère orthonormé direct (O.N.D) $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \quad ; \quad \vec{V}_3 = a\,\vec{i} - \vec{j} + b\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
2. Calculer les modules : $\left\|\vec{V}_1\right\|$ et $\left\|\vec{V}_2\right\|$
3. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et les composantes du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$.
4. Calculer par deux méthodes différentes l'angle α formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ($\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$).
5. Calculer, en fonction de a et b, les composantes du double produit vectoriel $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.
6. Trouver a et b pour que le vecteur $\vec{V}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
7. Calculer le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4)$ et montrer que le vecteur $\vec{V}_4$ appartient au plan (P).

Solution

Dans un repère O.N.D $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$



1. Représenter les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

2. <u>Les modules :</u> $\left\| \vec{V}_1 \right\| = \sqrt{(3^2)+(3^2)+0} \quad = 3\sqrt{2}$

$$\left\| \vec{V}_2 \right\| = \sqrt{1+(3^2)+1} \quad = \sqrt{11}$$

3. <u>Le produit scalaire :</u> $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = (3\times 1)+(3\times 3)+(0\times 1)$

$$=12$$

<u>Le produit vectoriel :</u> $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \vec{i}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \vec{j}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \vec{k}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= (3-0)\vec{i} - (3-0)\vec{j} + (9-3)\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

4. L'angle α formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

<u>Méthode 1 :</u> D'après le produit scalaire : $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\| \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \dfrac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\|}$

Alors, $\cos\alpha = \dfrac{12}{3\sqrt{2}\times\sqrt{11}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{11}} \approx 0{,}85 \quad \Rightarrow \alpha \approx 31{,}48°$

<u>Méthode 2 :</u> D'après le produit vectoriel : $\left\| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\| = \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\| \cdot \left| \sin\alpha \right|$

$$\Rightarrow \left| \sin\alpha \right| = \frac{\left\| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\|}{\left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\|}$$

Alors, $\left| \sin\alpha \right| = \dfrac{\sqrt{(3^2)+(-3^2)+(6^2)}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{11}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{11}} = \sqrt{\dfrac{3}{11}} \approx 0{,}52 \quad \Rightarrow \alpha \approx 31{,}48°$

5. Soit le vecteur : $\vec{V}_3 = a\vec{i} - \vec{j} + b\vec{k}$

<u>Le double produit vectoriel :</u> $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -1 & b \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$$= (-6+3b)\vec{i} - (6a-3b)\vec{j} + (-3a+3)\vec{k}$$

6. Le vecteur $\vec{V}_3$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$$

Alors, $(-6+3b)\vec{i} - (6a-3b)\vec{j} + (-3a+3)\vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{cases} -6+3b=0 \\ 6a-3b=0 \\ -3a+3=0 \end{cases}$

Donc, les valeurs de a et b sont : $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

7. Soit le vecteur : $\vec{V}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$

<u>Le produit mixte :</u> $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \bullet \vec{V}_4 = 6 - 6 \ = 0$

Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_4)$ est nul, donc les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_4$ sont coplanaires (appartiennent au même plan (P))

Ex. 1-5

Soit le repère $R(O, x, y, z)$ muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère, dans le plan (xOy), deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tournant autour de l'axe (Oz), avec $\theta = \omega t$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$ (ω est une constante).

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Déterminer un vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D.
3. Exprimer la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
4. Calculer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les dérivées : $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$.

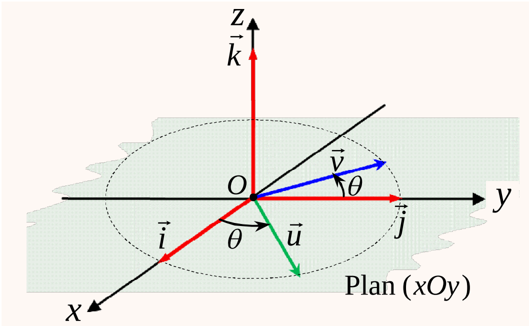
Soient le vecteur : $\vec{r} = cos(bt)\,\vec{i} + sin(bt)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ et la fonction scalaire $\lambda(t) = e^{-at}$ (a et b sont des constantes).

5. Calculer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les dérivées : $\left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R$.

Solution

Soit le repère $R(O, x, y, z)$ muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère, dans le plan (xOy), deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tournant autour de l'axe (Oz), avec $\theta = \omega t$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$ (ω est une constante).

1. D'après le produit scalaire (ou par projection) :

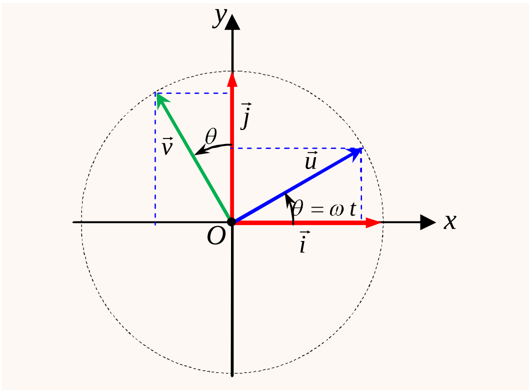


$$\frac{\vec{u} \bullet \vec{i}}{\|\vec{i}\|} = 1 \times cos\,\theta = cos(\omega\,t)$$

$$\frac{\vec{u} \bullet \vec{j}}{\|\vec{j}\|} = 1 \times cos\,(\frac{\pi}{2} - \theta) = sin(\omega\,t)$$

$$\frac{\vec{u} \bullet \vec{k}}{\|\vec{k}\|} = 1 \times cos\,(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Alors, le vecteur $\vec{u} = cos(\omega\,t)\,\vec{i} + sin(\omega\,t)\,\vec{j}$



$$\frac{\vec{v} \bullet \vec{i}}{\|\vec{i}\|} = 1 \times cos\,(\frac{\pi}{2} + \theta) = -sin(\omega\,t)$$

$$\frac{\vec{v} \bullet \vec{j}}{\|\vec{j}\|} = 1 \times cos\,(\theta) = cos(\omega\,t)$$

$$\frac{\vec{v} \bullet \vec{k}}{\|\vec{k}\|} = 1 \times cos\,(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Donc, le vecteur $\vec{v} = -sin(\omega\,t)\,\vec{i} + cos(\omega\,t)\,\vec{j}$

2. Soit un vecteur unitaire : $\vec{w} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ (c.à.d : $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$)

Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constituent une base O.N.D

$\Leftrightarrow$ Le produit mixte : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w} \ = 1$

Avec : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ cos(\omega\,t) & sin(\omega\,t) & 0\\ -sin(\omega\,t) & cos(\omega\,t) & 0\end{bmatrix}=\vec{k}$

Donc, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})\bullet\vec{w}=z=1$, et par conséquent : $x=0$ et $y=0$

Alors, le 3ème vecteur de la base O.N.D $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ c'est le vecteur unitaire : $\vec{w}=\vec{k}$

3. La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

D'après les relations : $\begin{cases}\vec{u}=cos(\omega\,t)\,\vec{i}+sin(\omega\,t)\,\vec{j}\\ \vec{v}=-sin(\omega\,t)\,\vec{i}+cos(\omega\,t)\,\vec{j}\\ \vec{w}=\vec{k}\end{cases}$, nous avons : $\begin{cases}\vec{i}=cos(\omega\,t)\,\vec{u}-sin(\omega\,t)\,\vec{v}\\ \vec{j}=sin(\omega\,t)\,\vec{u}+cos(\omega\,t)\,\vec{v}\\ \vec{k}=\vec{w}\end{cases}$

4. Le calcul, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, des dérivées

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R=\frac{dcos(\omega\,t)}{dt}\,\vec{i}+cos(\omega\,t)\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R+\frac{dsin(\omega\,t)}{dt}\,\vec{j}+sin(\omega\,t)\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R$$ (avec : $\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R=\vec{0}$ et $\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R=\vec{0}$)

Alors, $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R=-\omega\,sin(\omega\,t)\,\vec{i}+\omega\,cos(\omega\,t)\,\vec{j}=\omega\,\vec{v}$ (avec : $\omega=\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R=\frac{d\theta}{dt}\,\vec{v}$)

et aussi : $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R=-\frac{dsin(\omega\,t)}{dt}\,\vec{i}+\frac{dcos(\omega\,t)}{dt}\,\vec{j}=-\omega\,cos(\omega\,t)\,\vec{i}-\omega\,sin(\omega\,t)\,\vec{j}=-\omega\,\vec{u}\quad=-\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}$

5. Soient le vecteur : $\vec{r}=cos\,(bt)\,\vec{i}+sin\,(bt)\,\vec{j}+t^2\,\vec{k}$ et la fonction $\lambda(t)=e^{-a\,t}$.

Le calcul, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, des dérivées :

$$\left.\frac{d(\lambda\,.\,\vec{r})}{dt}\right|_R=\frac{d\lambda}{dt}\,\vec{r}+\lambda\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$$

$$=-a\,e^{-a\,t}\,(cos\,(bt)\,\vec{i}+sin\,(bt)\,\vec{j}+t^2\,\vec{k})+e^{-a\,t}\,(-b\,sin\,(bt)\,\vec{i}+b\,cos\,(bt)\,\vec{j}+2\,t\,\vec{k})$$

$$=e^{-a\,t}\,\big((-a\,cos\,(bt)-sin\,(bt))\,\vec{i}+(-a\,sin\,(bt)+cos\,(bt))\,\vec{j}+(-a\,t^2+2\,t)\,\vec{k}\big)$$

et : $\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R=\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R\wedge\vec{r}+\vec{u}\wedge\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$

Avec : $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R\wedge\vec{r}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\omega\,sin(\omega\,t) & \omega\,cos(\omega\,t) & 0\\ cos\,(bt) & sin\,(bt) & t^2\end{bmatrix}$

$$=\omega\,t^2\,(cos(\omega\,t)\,\vec{i}+sin(\omega\,t)\,\vec{j})-\omega\,\big(sin(\omega\,t)\,sin\,(bt)+cos(\omega\,t)\,cos\,(bt)\big)\vec{k}$$

$$=\omega\,t^2\,(cos(\omega\,t)\,\vec{i}+sin(\omega\,t)\,\vec{j})-\omega\,cos(\omega-b)\,t\,\vec{k}$$

Et : $\vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ cos(\omega\, t) & sin(\omega\, t) & 0 \\ -b\, sin\,(bt) & b\, cos\,(bt) & 2\,t \end{bmatrix}$

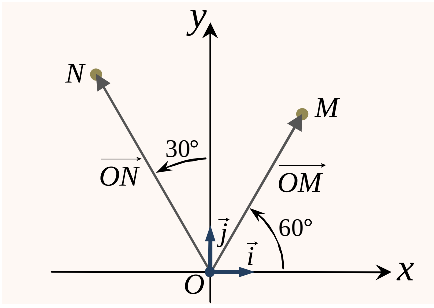
$$= 2\,t\,(sin(\omega\, t)\,\vec{i} - cos(\omega\, t)\,\vec{j}) + b\,\big(cos(\omega\, t)\, cos\,(bt) + sin(\omega\, t)\, sin\,(bt)\big)\,\vec{k}$$

$$= 2\,t\,(sin(\omega\, t)\,\vec{i} - cos(\omega\, t)\,\vec{j}) + b\, cos(\omega - b)\, t\,\vec{k}$$

Donc :

$$\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \big(\omega\, t^2\,(cos(\omega\, t) + 2\,t\, sin(\omega\, t)\big)\vec{i} + \big(\omega\, t^2\, sin(\omega\, t) - 2\,t\, cos(\omega\, t)\big)\,\vec{j} + (b - \omega)\, cos(\omega - b)\, t\,\vec{k}$$

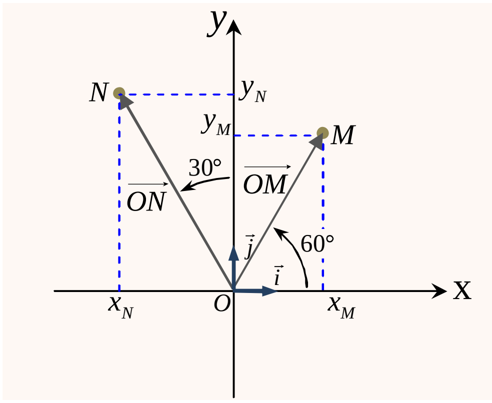
Ex. 1-6



Soient les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ illustrés à la figure ci-contre, avec $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 4$ et $\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = 5$.

1. Calculer les coordonnées polaires $(\rho\,,\theta)$ et cartésiennes $(x\,,y)$ des points M et N .
2. Déterminer et représenter, dans le plan (xOy), les bases vectorielles $(\vec{U}_\rho\,,\vec{U}_\theta)$ associées aux points M et N .

Solution



1. Les coordonnées polaires de :

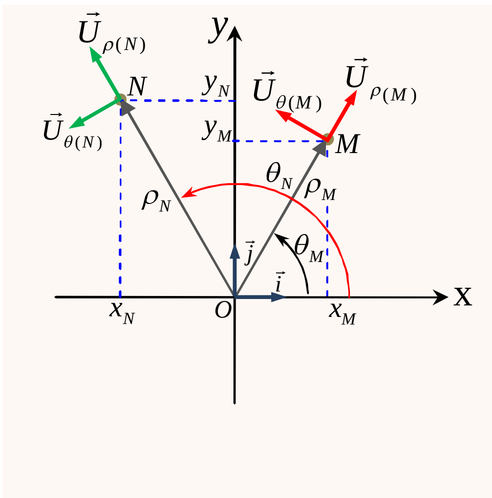
$$M\ :\ \begin{cases} \rho_M = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 4 \\ \theta_M = 60° \end{cases}$$

$$N\ :\ \begin{cases} \rho_N = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| = 5 \\ \theta_N = 90° + 30° = 120° \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes de :

$$M\ :\ \begin{cases} x_M = \rho_M \cdot cos(\theta_M) = 2 \\ y_M = \rho_M \cdot sin(\theta_M) = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$N\ :\ \begin{cases} x_N = \rho_N \cdot cos(\theta_N) = -2{,}5 \\ y_N = \rho_N \cdot sin(\theta_N) = 2{,}5\sqrt{3} \end{cases}$$



2. La base vectorielle $(\vec{U}_\rho\,,\vec{U}_\theta)$ de :

$$M\ :\ \begin{cases} \vec{U}_{\rho(M)} = cos(\theta_M)\cdot\vec{i} + sin(\theta_M)\cdot\vec{j} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + \sqrt{3}\cdot\vec{j}\right) \\ \vec{U}_{\theta(M)} = -sin(\theta_M)\cdot\vec{i} + cos(\theta_M)\cdot\vec{j} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\cdot\vec{i} + \vec{j}\right) \end{cases}$$

$$N\ :\ \begin{cases} \vec{U}_{\rho(N)} = cos(\theta_N)\cdot\vec{i} + sin(\theta_N)\cdot\vec{j} = \frac{1}{2}\left(-\vec{i} + \sqrt{3}\cdot\vec{j}\right) \\ \vec{U}_{\theta(N)} = -sin(\theta_N)\cdot\vec{i} + cos(\theta_N)\cdot\vec{j} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\cdot\vec{i} - \vec{j}\right) \end{cases}$$

Ex. 1-7

Soient les points P_1 et P_2 définis par les coordonnées cartésiennes, respectivement, $(1, 2, 2)$ et $(-1, -2, 2)$. Calculer leurs coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et sphériques (r, θ, φ).

Solution

1. Système cartésien $\rightarrow$ Système cylindrique :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \text{si} : x > 0 \\ z = z \end{cases} \quad ; \text{ ou } \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si} : x < 0 \\ z = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le point $P_1\,(1, 2, 2)$:

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \approx 2{,}24 \\ \theta_1 = \arctan\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right) \approx 63{,}43° \\ z_1 = z_1 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le point $P_2\,(-1, -2, 2)$:

$$\begin{cases} \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \approx 2{,}24 \\ \theta_2 = \arctan\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right) + 180° \approx 243{,}34° \\ z_2 = z_2 = 2 \end{cases}$$

2. Système cartésien $\rightarrow$ Système sphérique :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \text{si} : x > 0 \end{cases} \quad ; \text{ ou } \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si} : x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le point $P_1\,(1, 2, 2)$:

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 3 \\ \theta_1 = \arccos\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}\right) \approx 48{,}19 \\ \varphi_1 = \arctan\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right) \approx 63{,}43 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le point $P_2\,(-1, -2, 2)$:

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 3 \\ \theta_2 = \arccos\left(\dfrac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) \approx 48{,}19 \\ \varphi_2 = \arctan\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right) + 180° \approx 243{,}34° \end{cases}$$

Ex. Supp. 1-1

On considère un cylindre de béton de diamètre $d = 15{,}8 \pm 0{,}1\ \text{cm}$ *et de hauteur* $h = 32 \pm 0{,}1\ \text{cm}$. *La masse du cylindre est* $m = 15{,}2 \pm 0{,}1\ \text{kg}$. *Déterminer la masse volumique* ρ *du béton en précisant l'incertitude absolue* $\Delta\rho$ *et l'incertitude relative* ε_ρ.

Réponses

1. $\rho = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{m}{h\,d^2} = 2423{,}87\ \text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$; 2. $\Delta\rho = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\Delta m}{h\,d^2} + \frac{m\,\Delta h}{h^2\,d^2} + \frac{2\,m\,\Delta d}{h\,d^3}\right] = 54{,}2\ \text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
3. $\varepsilon_\rho = 2{,}2\ \%$

Ex. Supp. 1-2

Dans un repère O.N.D $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *soit les vecteurs* $\vec{U} = 3\,\vec{j} + \vec{k}$ *et* $\vec{V} = \vec{j} + 2\,\vec{k}$.

1. *Représenter les vecteurs* $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$.
2. *Calculer les modules* $\|\vec{U}\|$ *et* $\|\vec{V}\|$.
3. *Calculer le produit scalaire* $\vec{U} \bullet \vec{V}$.
4. *Calculer les composantes du produit vectoriel* $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ *; puis son module* $\|\vec{W}\|$.
5. *Déterminer le vecteur unitaire de* $\vec{W}$.

Réponses

2. $\|\vec{U}\| = \sqrt{10}$ *et* $\|\vec{V}\| = \sqrt{5}$; 3. $\vec{U} \bullet \vec{V} = 5$; 4. $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = 5\,\vec{i}$ *et* $\|\vec{W}\| = 5$;
5. *Vecteur unitaire de* $\vec{W}$: $\vec{w} = \vec{i}$

Ex. Supp. 1-3

Dans un repère O.N.D $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *on considère deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *définis à tout instant* t *par :*
$\vec{u} = sin(t)\,\vec{i} + cos(2\,t)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ *et* $\vec{v} = e^{-t}\,\vec{i} - 2\,cos(3\,t)\,\vec{j} + sin(3\,t)\,\vec{k}$

1. *Déterminer les dérivées :* $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ *et* $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$ *à l'instant* $t = 0$.
2. *Déterminer l'instant* τ *où le vecteur :* $\vec{w} = e^{3t}\,\vec{i} + cos(3\,t)\,\vec{j} - 2\,sin(3\,t)\,\vec{k}$ *est perpendiculaire à* $\vec{v}$.

Réponses

1. $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R = cos(t)\,\vec{i} - 2\,sin(2\,t)\,\vec{j} + 2\,t\,\vec{k} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R\ (\text{à}\ t=0)} = \vec{i}$

   $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = -e^{-t}\,\vec{i} + 6\,sin(3\,t)\,\vec{j} + 3\,cos(3\,t)\,\vec{k} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{R\ (\text{à}\ t=0)} = -\vec{i} + 3\,\vec{k}$
2. $\vec{w}$ *est perpendiculaire à* $\vec{v}$ *à l'instant :* τ : $\vec{w} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\ln(2)}{2}$

Ex. Supp. 1-4

1. *Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point* M *défini par ses coordonnées cylindriques* $(3, 30°, 2)$.
2. *Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point* N *défini par ses coordonnées sphériques* $(2, 45°, 60°)$.

Réponses

1. *Coordonnées cartésiennes de* M : $(2.6\,, 1.5\,, 2)$;
2. *Coordonnées cartésiennes de* N : $(0.71\,, 1.22\,, 1.41)$

CHAPITRE 2 : Cinématique du Point Matériel

Ex. 2-1

Un point matériel M se déplace dans le plan (xOy) suivant les équations horaires suivantes :

$$x(t) = t \qquad ; \qquad y(t) = t\,(4-t)$$

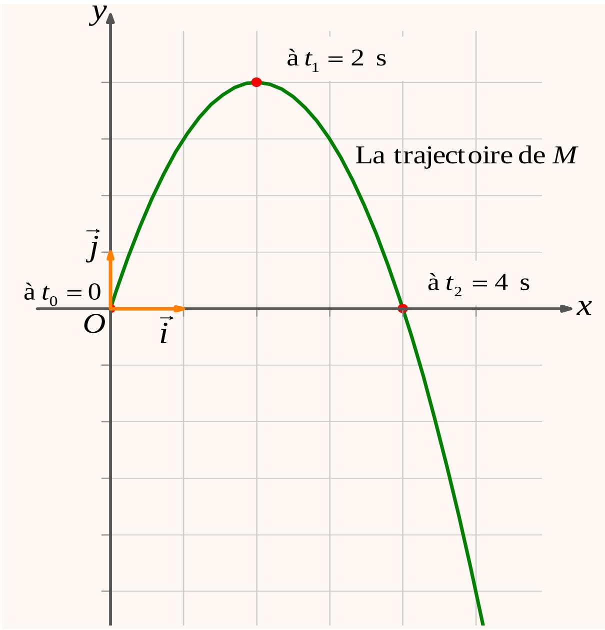
1. Déterminer l'équation $y = f(x)$ et la forme de la trajectoire suivie par le point M.
2. Tracer la trajectoire de M sur un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et préciser les positions correspondantes les instants $t_0 = 0$ s, $t_1 = 2$ s et $t_2 = 4$ s.
3. Déterminer, en fonction du temps t :
   a) Les composantes et le module $v(t)$ du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ de M.
   b) Les composantes et le module $a(t)$ du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ de M.

Solution

Les coordonnées cartésiennes du point M sont : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t\,(4-t) \end{cases}$

1. L'équation de la trajectoire : $x = t \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = x\,(4-x) = -x^2 + 4x$
   La trajectoire suivie par M a une forme parabolique.

2. Représentation de la trajectoire



3. a) Le vecteur vitesses est :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{j}$$

(ou $\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$)

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{i} + (2 - 2t)\,\vec{j}$$

Et le module de $\vec{V}(t)$ est :

$$v(t) = \left\| \vec{V}(t) \right\| = \sqrt{1 + (2-2t)^2}$$

b) Le vecteur accélération est :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{j}$$

(ou $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j}$)

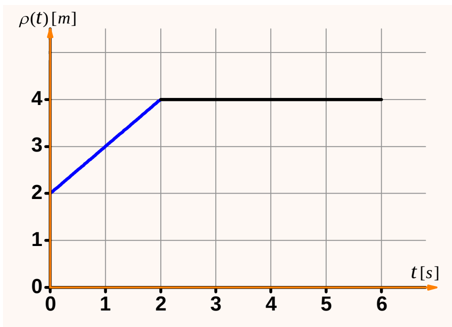
$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -2\,\vec{j}$$

Le module de $\vec{a}(t)$ est : $a(t) = \left\| \vec{a}(t) \right\| = 2$

Ex. 2-2

Un mobile M est repéré par ses coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ dont les variations en fonction du temps sont données par les graphes ci-contre :

On divise le mouvement de M en deux phases, la phase I durant l'intervalle de temps $[0, 2\mathrm{s}]$, et la phase II durant l'intervalle $[2\mathrm{s}, 6\mathrm{s}]$.

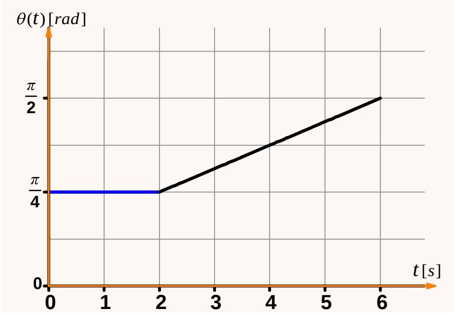


1. Pour chaque phase du mouvement,
   a) Déterminer les équations horaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$.
   b) Ecrire, en système de coordonnées polaires, les

vecteurs vitesse et accélération, et déduire leurs modules.

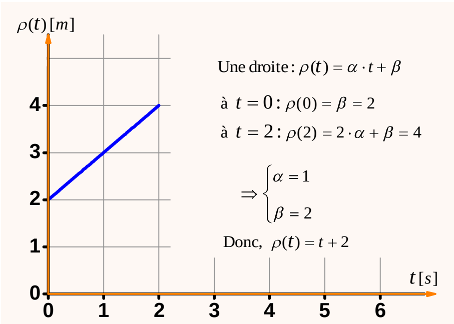
c) Ecrire, en système de coordonnées cartésiennes, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, et établir l'équation de la trajectoire dans le plan (xOy).

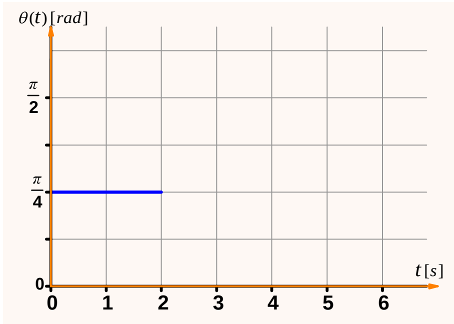
2. Dans un repère cartésien (O,x,y), représenter la trajectoire du mobile M durant l'intervalle de temps $[0,6s]$.



Solution

1. a) I. La phase $[0,2s]$

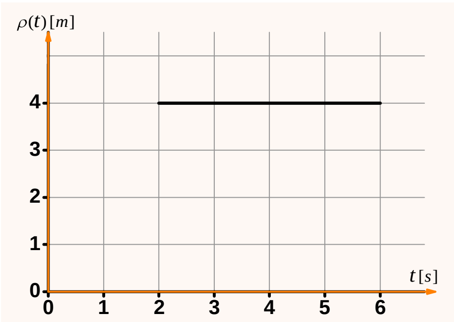


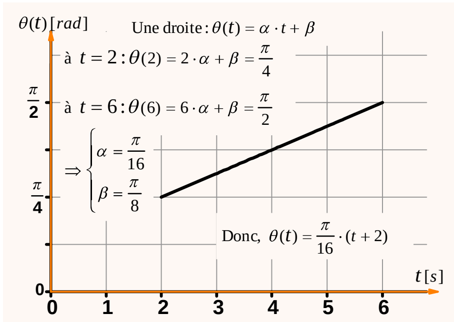


La cordonnée radiale $\rho(t)$ se variée selon une droite inclinée $\Rightarrow \rho(t)=\alpha\cdot t+\beta=t+2$

La cordonnée orthoradiale $\theta(t)$ est constante $\Rightarrow \theta(t)=\dfrac{\pi}{4}$

II. La phase $[2,6s]$





La cordonnée radiale $\rho(t)$ est constante $\Rightarrow \rho(t)=4$

La cordonnée orthoradiale $\theta(t)$ se variée selon une droite inclinée

$$\Rightarrow \theta(t)=\alpha\, t+\beta=\frac{\pi}{16}(t+2)$$

Donc, les équations horaires du mouvement sont :

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\begin{cases}\rho(t)=t+2\\ \theta(t)=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$;

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\begin{cases}\rho(t)=4\\ \theta(t)=\dfrac{\pi}{16}(t+2)=\omega\,(t+2) \quad \text{, avec} : \omega=\dfrac{\pi}{16}\end{cases}$

b) Dans le système des coordonnées polaires $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$:

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t)=\rho\,\overrightarrow{U_\rho}$

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\overrightarrow{OM}(t)=(t+2)\overrightarrow{U_\rho}$;

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\overrightarrow{OM}(t)=4\overrightarrow{U_\rho}$

Vecteur vitesse : $\vec{V}(t)=\dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}=\dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho}+\rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\vec{V}(t)=\overrightarrow{U_\rho}$ (puisque $\theta(t)=\dfrac{\pi}{4}=\text{cte}\Rightarrow\dot{\theta}(t)=0$)

Le module est : $v(t)=\|\vec{V}(t)\|=1\ \text{m.s}^{-1}$

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\vec{V}(t)=4\omega\ \overrightarrow{U_\theta}=\dfrac{\pi}{4}\overrightarrow{U_\theta}$

Le module est : $v(t)=\|\vec{V}(t)\|=\dfrac{\pi}{4}\ \text{m.s}^{-1}$

Vecteur accélération : $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}=\left[\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_\rho}+\left[\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}\right]\overrightarrow{U_\theta}$

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\vec{a}(t)=\vec{0}$

Le module est : $a(t)=\|\vec{a}(t)\|=0\ \text{m.s}^{-2}$

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\vec{a}(t)=-4\omega^2\ \overrightarrow{U_\rho}=-\dfrac{\pi^2}{64}\ \overrightarrow{U_\rho}$

Le module est : $a(t)=\|\vec{a}(t)\|=\dfrac{\pi^2}{64}\ \text{m.s}^{-2}$

c) Dans le système des coordonnées cartésiennes $(\vec{i},\vec{j})$:

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}=\rho\left(\cos\theta\ \vec{i}+\sin\theta\ \vec{j}\right)$

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\overrightarrow{OM}(t)=(t+2)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \vec{j}\right)=\dfrac{(t+2)}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$;

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\overrightarrow{OM}(t)=4(\cos(\omega(t+2))\ \vec{i}+\sin(\omega(t+2))\ \vec{j})$.

d) L'équation de la trajectoire $y=f(x)$:

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$: $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t+2}{\sqrt{2}} \\ y(t)=\dfrac{t+2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow\ y=x$ (c'est l'équation d'une droite) ;

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$: $\begin{cases} x(t)=4\cos(\omega(t+2)) \\ y(t)=4\sin(\omega(t+2)) \end{cases}$;

$\Rightarrow\ y^2+x^2=16$ (c'est l'équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R=4$ cm)

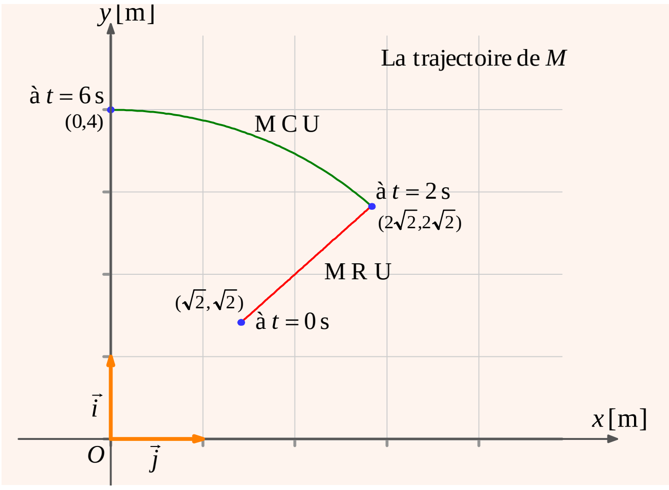
2. La trajectoire du mobile M durant l'intervalle de temps $[0,6s]$.

Dans l'intervalle de temps $[0,2s]$:

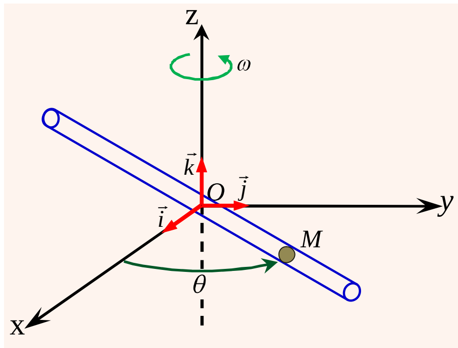
Le mobile M se déplace le long d'une ligne droite à une vitesse constante ($\vec{V}(t)=\overrightarrow{U_\rho}=\overrightarrow{\text{cte}}$), donc son mouvement au cours de l'intervalle $[0,2s]$ est rectiligne uniforme (MRU) ;

Dans l'intervalle de temps $[2,6s]$:

Le mobile M se déplace sur une trajectoire circulaire avec une vitesse angulaire constante ($\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$), donc son mouvement au cours de l'intervalle $[2,6\text{s}]$ est circulaire uniforme (MCU) ;



Ex. 2-3



On considère une bille M se déplace en mouvement rectiligne uniforme, à une vitesse v_0 constante, le long d'un tube rigide (figure ci-contre).
Le tube tourne autour d'un axe passant par son centre O à une vitesse angulaire ω constante.
On suppose que le tube tourne dans le plan horizontal (xOy), autour de l'axe vertical Oz, et qu'à l'instant $t = 0\,\text{s}$, il est superposé à l'axe (Ox) et la bille se trouvée au point O.

1. Déterminer les coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ et cartésiennes $(x(t), y(t))$ de M, et établir l'équation de sa trajectoire dans le plan (xOy).
2. Exprimer en fonction de v_0 et ω, les vecteurs vitesse et accélération de M dans la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$.
3. Déterminer le rayon de courbure R de la trajectoire en utilisant la relation :

$$\left\| \vec{V}(t) \wedge \vec{a}(t) \right\| = \frac{\left\| \vec{V}(t) \right\|^3}{\text{R}}$$

4. Trouver les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.

Solution

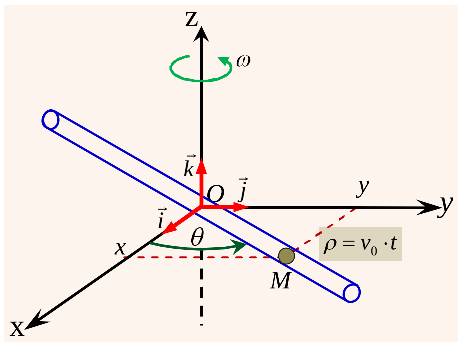
1. a) Les coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ de M à l'instant t :

(en considération qu'à l'instant $t = 0\text{s}$, le point M situé à l'origine O)

- Le point M se déplace le long du tube en MRU $\Rightarrow \rho(t) = v_0\, t$
- Le point M se tourne avec le tube à la même vitesse angulaire ω $\Rightarrow \theta(t) = \omega\, t$

Donc, les coordonnées polaires de M sont :

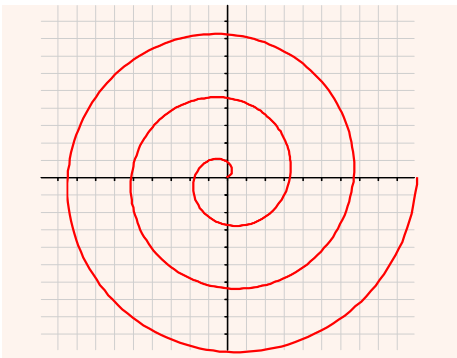
$$\begin{cases} \rho(t) = v_0\, t \\ \theta(t) = \omega\, t \end{cases}$$



b) Les coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ de M à l'instant t :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0\, t \cos(\omega t) \\ y(t) = v_0\, t \sin(\omega t) \end{cases}$$

c) L'équation de la trajectoire dans le plan (xOy) :



Nous avons : $\begin{cases} cos(\omega t) = \dfrac{v_0\, t}{x} \\ sin(\omega t) = \dfrac{v_0\, t}{y} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = v_0^2\, t^2$ (trajectoire sous forme d'une spirale.).

2. Dans la base polaire $(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta})$:

a) Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$: $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

$$= v_0\, \overrightarrow{U_\rho} + v_0\, \omega t\, \overrightarrow{U_\theta} \quad = \quad v_0\, (\overrightarrow{U_\rho} + \omega t\, \overrightarrow{U_\theta})$$

Son module est : $v(t) = \left\| \vec{V}(t) \right\| = v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$. (en considération que 'à l'instant v_0 est positive)

b) Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \left[\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_\rho} + \left[\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\right]\overrightarrow{U_\theta}$

$$= -v_0\, \omega^2\, t\, \overrightarrow{U_\rho} + 2 v_0\, \omega\, \overrightarrow{U_\theta} \quad = \quad v_0\, \omega\, (-\omega t\, \overrightarrow{U_\rho} + 2\, \overrightarrow{U_\theta})$$

Son module est : $a(t) = \left\| \vec{a}(t) \right\| = v_0\, \omega \sqrt{4 + \omega^2 t^2}$.

3. En système de cordonnées intrinsèques :

- La composante tangentielle $a_T(t)$ est : $a_T(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}\right)$

$$= v_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$

- La composante normale $a_N(t)$ peut être calculée par : $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

$$\Rightarrow \quad a_N^2 = a^2 - a_T^2 \quad = \quad \left(v_0^2\, \omega^2\, (4 + \omega^2 t^2)\right) - \left(\frac{v_0^2\, \omega^4\, t^2}{1 + \omega^2 t^2}\right)$$

$$= v_0^2\, \omega^2\, \frac{(2 + \omega^2 t^2)^2}{1 + \omega^2 t^2}$$

Alors : $a_N(t) = v_0\, \omega \dfrac{2 + \omega^2 t^2}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$

4. Le rayon de courbure R de la trajectoire :

En utilisant la relation : $\left\| \vec{V}(t) \wedge \vec{a}(t) \right\| = \dfrac{\left\| \vec{V}(t) \right\|^3}{R}$

Nous avons : $\vec{V}(t) \wedge \vec{a}(t) = v_0\, (v_0\, \omega) \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_\rho} & \overrightarrow{U_\theta} & \vec{k} \\ 1 & \omega t & 0 \\ -\omega t & 2 & 0 \end{vmatrix} = v_0^2\, \omega \left(2 + \omega^2 t^2\right) \vec{k}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\left\| \vec{V}(t) \right\|^3}{\left\| \vec{V}(t) \wedge \vec{a}(t) \right\|} \quad = \quad \frac{v_0\, (1 + \omega^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega\, (2 + \omega^2 t^2)}$$

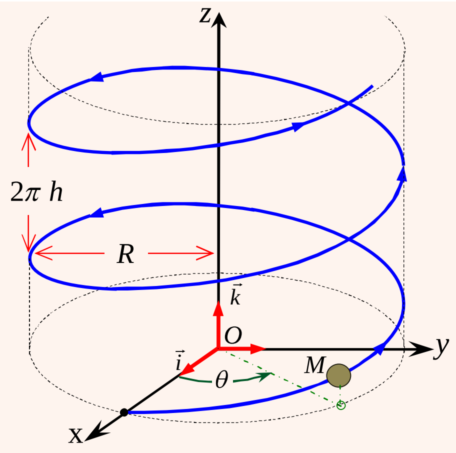
Ex. 2-4

Un mobile M d'écrit une hélice circulaire d'axe (Oz), définie par les coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = R\cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = R\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad z(t) = h\,\omega\,t$$

avec R, h et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer, en fonction de R, h et ω, les coordonnées cylindriques $(\rho(t), \theta(t), z(t))$ du mobile M.
2. Trouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$.
3. Déterminer les modules des vecteurs vitesse et accélération du mobile M.
4. Montrer que le vecteur vitesse fait un angle α constant avec l'axe (Oz), et le calculer ?
5. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du mobile M, sachant qu'à l'instant initial $t_0 = 0$, $s(0) = 0$.
6. Trouver, en système de cordonnées intrinsèques, les composantes tangentielle $a_T(t)$ et normale $a_N(t)$ du vecteur accélération de M.
7. Déterminer le rayon de courbure R de la trajectoire de M.
8. Exprimer dans la base $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$, les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N, \vec{U}_B)$.



Solution

Les coordonnées cartésiennes du mobile M sont : $\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = h\,\omega\,t \end{cases}$,

avec R, h et ω sont des constantes positives.

1. Les coordonnées cylindriques $(\rho(t), \theta(t), z(t))$ de M :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(t) = R = \text{cte} \\ \theta(t) = \omega\,t \\ z(t) = h\,\omega\,t \end{cases}$$

2. Dans la base cylindrique $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$:

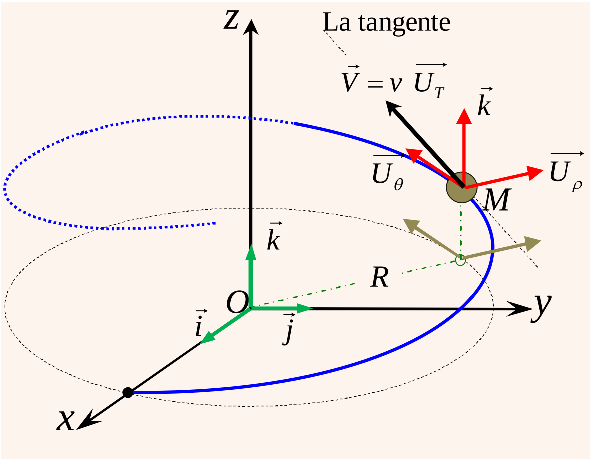
a) Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$= R\,\omega\,\overrightarrow{U_\theta} + h\,\omega\,\vec{k} = \omega\,(R\,\overrightarrow{U_\theta} + h\,\vec{k})$$

b) Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = -R\,\omega^2\,\overrightarrow{U_\rho}$$



3. Les modules :
   - Le module de $\vec{V}(t)$ est : $v(t) = \left\|\vec{V}(t)\right\| = \omega\sqrt{R^2 + h^2} = \text{cte}$.
   - Le module de $\vec{a}(t)$ est : $a(t) = \left\|\vec{a}(t)\right\| = R\,\omega^2 = \text{cte}$

4. L'angle α entre le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et l'axe (Oz) :

$\Rightarrow$ α $\equiv$ l'angle entre $\vec{V}(t)$ et le vecteur unitaire $\vec{k}$

D'après la relation : $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{V}(t)\bullet\vec{k}}{\left\|\vec{V}(t)\right\|} = \dfrac{h\,\omega}{\omega\sqrt{R^2+h^2}}$ = cte

Calcul de α : Nous avons : $cos\,\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{h}\right)^2+1}}$

Et d'après la relation ; $cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{tan^2\,\alpha+1}}$, on conclut que : $\alpha = arctan\left(\dfrac{R}{h}\right)$

5. L'abscisse curviligne $s(t)$ du mobile M :

Nous avons ; $v(t) = \left\|\vec{V}(t)\right\| = \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}s(t) = v(t)\ \mathrm{d}t = \omega\sqrt{R^2+h^2}\ \mathrm{d}t$

Par intégration entre $t_0 = 0$ et t : $\displaystyle\int_{s(0)}^{s(t)}\mathrm{d}s(t) = \omega\sqrt{R^2+h^2}\int_{t=0}^{t}\mathrm{d}t$

Avec $s(0)=0$, donc : $s(t) = \omega\sqrt{R^2+h^2}\ t$

6. En système de cordonnées intrinsèques :

- La composante tangentielle $a_T(t)$ est : $a_T(t) = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$
- La composante normale $a_N(t)$ est calculée par : $a_N^2 = a^2 - a_T^2 = a^2$

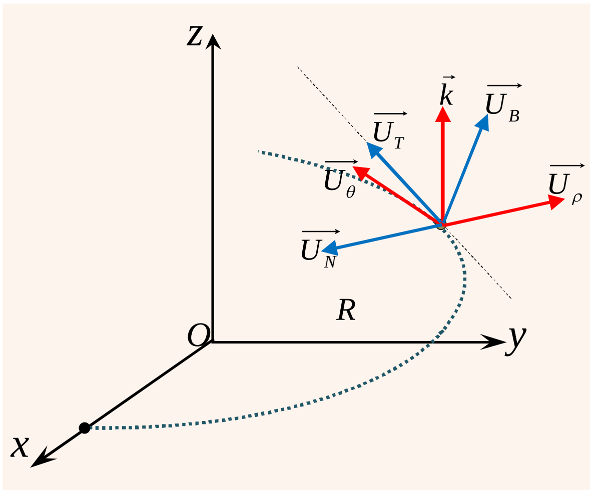
$\Rightarrow$ $a_N(t) = R\,\omega^2$ = cte

7. Le rayon de courbure R de la trajectoire :

En utilisant la relation : $a_N(t) = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^2}{\mathrm{R}}$ $\Rightarrow \mathrm{R} = \dfrac{\omega^2\,(R^2+h^2)}{R\,\omega^2} = \dfrac{R^2+h^2}{R}$

8. La base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N, \vec{U}_B)$:

Nous avons



- Le vecteur vitesse :

$\vec{V}(t) = v(t)\ \overrightarrow{U_T} = \omega\sqrt{R^2+h^2}\ \overrightarrow{U_T}$;

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{U_T} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}(R\ \overrightarrow{U_\theta} + h\,\vec{k})$

- Le vecteur accélération :

$\vec{a}(t) = a_N(\mathrm{t})\ \overrightarrow{U_N} + a_T(\mathrm{t})\ \overrightarrow{U_T} = R\,\omega^2\ \overrightarrow{U_N}$;

Il égal aussi : $\vec{a}(t) = -R\,\omega^2\ \overrightarrow{U_\rho}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{U_N} = -\ \overrightarrow{U_\rho}$

- $(\vec{U}_T, \vec{U}_N, \vec{U}_B)$ est une base O.N.D, donc : $\vec{U}_T \wedge \vec{U}_N = \vec{U}_B$

$$\Rightarrow \quad \vec{U}_B = \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_\rho} & \overrightarrow{U_\theta} & \vec{k} \\ 0 & R & h \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad = \quad \frac{-1}{\sqrt{R^2+h^2}} (h\,\overrightarrow{U_\theta} - R\,\vec{k})$$

Ex. 2-5

On considère un point M en mouvement dans le plan (xOy). Il est repéré par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(1+cos\,\theta)$ et $\theta(t) = \omega\, t$; où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

1. Exprimer dans la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$, les vecteurs position, vitesse et accélération de M.
2. Trouver les modules des vecteurs vitesse et accélération de M en fonction de ρ_0, ω et ρ.
3. Pour : $\rho_0 = 4$ cm et $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad.s^{-1} :
   a) Représenter, sur un repère cartésien (O, x, y), les positions A, B, C et D qui correspondent respectivement aux instants $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 1{,}5$ s et $t_3 = 2$ s.
   b) Trouver l'instant t_4 auquel le point M passe, pour la première fois, de l'origine O.
   c) Calculer les vitesses et les accélérations de M aux instants t_0 et t_4.

Solution

Les coordonnées polaires du point M sont : $\begin{cases} \rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(1+cos\,\theta) = \frac{\rho_0}{2}(1+cos\,\omega\,t) \\ \theta(t) = \omega\,t \end{cases}$

1. Dans la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$:

   Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U}_\rho \;=\; \frac{\rho_0}{2}(1+cos\,\omega\,t)\vec{U}_\rho$,

   Le vecteur vitesse : $\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\vec{U}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta \;=\; -\frac{\rho_0}{2}\,\omega\,sin\,\omega\,t\,\vec{U}_\rho + \frac{\rho_0}{2}\,\omega\,(1+cos\,\omega\,t)\vec{U}_\theta$

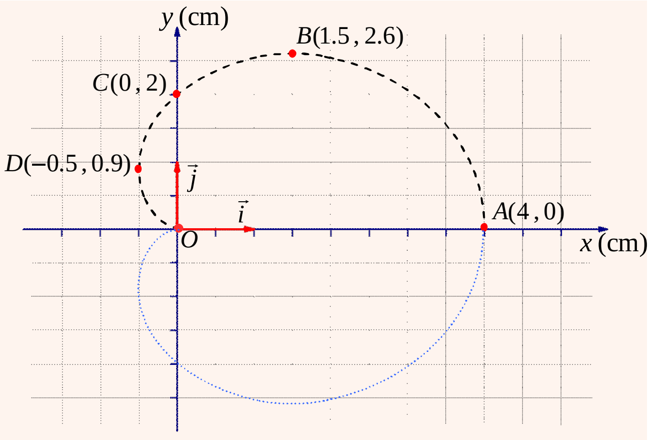
   Le vecteur accélération :
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta})\vec{U}_\theta$$
$$= \left[-\frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,cos\,\omega\,t - \frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,(1+cos\,\omega\,t)\right]\vec{U}_\rho + \left[-\rho_0\,\omega^2\,sin\,\omega\,t + 0\right]\vec{U}_\theta$$
$$= -\frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,(1+2\,cos\,\omega\,t)\vec{U}_\rho - \rho_0\,\omega^2\,sin\,\omega\,t\,\vec{U}_\theta$$

2. Le module du vecteur vitesse :
$$v(t) = \frac{\rho_0}{2}\,\omega\,\sqrt{sin^2\omega\,t + 1 + 2\,cos\,\omega\,t + cos^2\omega\,t}$$
$$= \frac{\rho_0}{2}\,\omega\,\sqrt{2\,(1+cos\,\omega\,t)} \qquad = \frac{\rho_0}{2}\,\omega\,\sqrt{2\times\frac{2\,\rho}{\rho_0}}$$
$$= \omega\,\sqrt{\rho_0\,\rho}$$

   Le module du vecteur accélération :
$$a(t) = \frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,\sqrt{1 + 4\,cos\,\omega\,t + 4\,cos^2\omega\,t + 4\,sin^2\omega\,t}$$
$$= \frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,\sqrt{1 + 4\,(1+cos\,\omega\,t)} \qquad = \frac{\rho_0}{2}\,\omega^2\,\sqrt{1+\frac{8\,\rho}{\rho_0}}$$
$$= \frac{\omega^2}{2}\,\sqrt{\rho_0^2 + 8\,\rho_0\,\rho}$$

3. Pour : $\rho_0 = 4$ cm et $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad.s^{-1} :

a) Le mobile M passe à l'instant :



- $t_0 = 0$ s : la position $A(x_A, y_A)$:

$$\begin{cases} \rho_A = \rho_0 \\ \theta_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \rho_0 \cos(\theta_A) = \rho_0 \\ y_A = \rho_0 \sin(\theta_A) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

- $t_1 = 1$ s : la position $B(x_B, y_B)$:

$$\begin{cases} \rho_B = \frac{3}{4}\rho_0 \\ \theta_B = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{3}{4}\rho_0 \cos(\theta_B) = \frac{3}{8}\rho_0 \\ y_B = \frac{3}{4}\rho_0 \sin(\theta_B) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\rho_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{3}{2} \\ y_B = \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

- $t_2 = 1{,}5$ s : la position $C(x_C, y_C)$:

$$\begin{cases} \rho_C = \frac{\rho_0}{2} \\ \theta_C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{\rho_0}{2}\cos(\theta_C) = 0 \\ y_C = \frac{\rho_0}{2}\sin(\theta_C) = \frac{\rho_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 2 \end{cases}$$

- $t_3 = 2$ s : la position $D(x_D, y_D)$:

$$\begin{cases} \rho_D = \frac{\rho_0}{4} \\ \theta_D = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{\rho_0}{4}\cos(\theta_B) = -\frac{\rho_0}{8} \\ y_D = \frac{\rho_0}{4}\sin(\theta_B) = \frac{\sqrt{3}}{8}\rho_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{1}{2} \\ y_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

b) Le point M passe à l'instant t_4, pour la première fois, de l'origine O :

Donc : $\rho_O = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos\theta_O) = 0 \Rightarrow \cos\theta_O = -1$

Alors, $\theta_O = \omega\, t_4 = (2n+1)\pi$, avec $n = 0$ pour le premier passage $\Rightarrow t_4 = \frac{\pi}{\omega} =$ 3 s

c) A l'instant $t_0 = 0$ s :

La vitesse est : $v_A = \omega\sqrt{\rho_0\, \rho_A} = \omega\, \rho_0 \Rightarrow v_A = \frac{4}{3}\pi$ cm.s^{-1}.

L'accélération est : $a_A = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2 + 8\,\rho_0\,\rho_A} = \frac{3}{2}\omega^2\,\rho_0 \Rightarrow a_A = \frac{2}{3}\pi^2$ cm.s^{-2}.

A l'instant $t_4 = 3$ s :

La vitesse est : $v_O = \omega\sqrt{\rho_0\, \rho_O} = 0$ cm.s^{-1}.

L'accélération est : $a_O = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2 + 8\,\rho_0\,\rho_O} = \frac{1}{2}\omega^2\,\rho_0 \Rightarrow a_O = \frac{2}{9}\pi^2$ cm.s^{-2}

Ex. Supp. 2-1

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère O.N.D $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t)=t-1$, $y(t)=-t^2+1$ *et* $z(t)=0$.

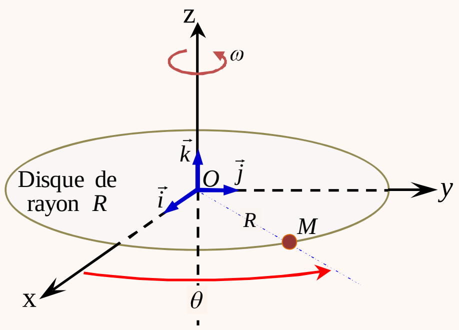
1. *Déterminer l'équation de la trajectoire de* M .
2. *Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de* M .
3. *Calculer les accélérations tangentielle et normale de* M .
4. *Déduire le rayon de courbure* R *de la trajectoire en fonction du temps.*

Réponses

1. $y(x)=-x^2+2x$ 2. $\vec{V}(t)=\vec{i}-2t\,\vec{j}$ *et* $v(t)=\sqrt{1+4t^2}$; $\vec{a}(t)=-2\,\vec{j}$ *et* $a=2$
3. $a_T(t)=\dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$ *et* $a_N(t)=\dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$ 4. $\mathrm{R}=\dfrac{1}{2}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}$

Ex. Supp. 2-2

Un disque de rayon $R=20\ \mathrm{cm}$ *et de centre* O *effectue un mouvement de rotation uniforme à une vitesse constante* $\omega=30\ \mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ *(tours par minute), autour d'un axe vertical passant par son centre. Soit* M *un point lié au disque, situé sur sa circonférence (figure ci-contre).*



1. *Déterminer les coordonnées polaires* $(\rho(t),\theta(t))$ *et cartésiennes* $(x(t),y(t))$ *de* M *à l'instant* t .
2. *Trouver, en système de cordonnées polaires, les vecteurs vitesse et accélération, et calculer leurs modules.*
3. *Trouver les accélérations normale et tangentielle de* M .

Réponses

1. $\rho(t)=R=cte=0{,}2\ \mathrm{m}$ *et* $\theta(t)=\omega\,t=\pi\,t$; $x(t)=0{,}2\cdot cos(\pi\cdot t)$ *et* $y(t)=0{,}2\cdot sin(\pi\cdot t)$
2. $\vec{V}(t)=0{,}2\,\pi\,\overrightarrow{U_\theta}$ *et* $v=0{,}2\,\pi\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $\vec{a}(t)=-0{,}2\,\pi^2\,\overrightarrow{U_\rho}$ *et* $a=0{,}2\,\pi^2\ \mathrm{m.s^{-2}}$
3. $a_T(t)=0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ *et* $a_N(t)=0{,}2\,\pi^2\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Ex. Supp. 2-3

On considère un point M *en mouvement dont les coordonnées cylindriques à chaque instant* t *sont :*

$$\rho(t)=t^2+1 \quad , \quad \theta(t)=\frac{\pi}{2}(2t+1) \quad \text{et} \quad z(t)=-2t$$

1. *Exprimer dans la base cylindrique* $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta,\vec{k})$, *les vecteurs vitesse et accélération de* M.
2. *Calculer la vitesse et l'accélération de* M *à l'instant initial* $t=0\ \mathrm{s}$ *et à l'instant* $t=1\ \mathrm{s}$.

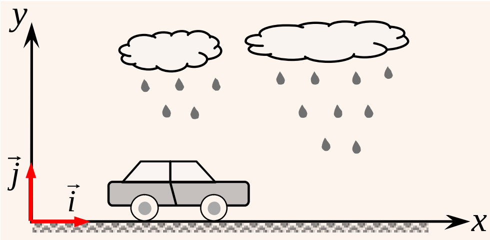
Réponses

1. $\vec{V}(t)=2t\,\overrightarrow{U_\rho}+\pi\,(t^2+1)\,\overrightarrow{U_\theta}-2\,\vec{k}$; $\vec{a}(t)=(2-\pi^2\,(t^2+1))\,\overrightarrow{U_\rho}+4\pi\,t\,\overrightarrow{U_\theta}$
2. $v_{(\text{à } t=0\text{s})}=\sqrt{4+\pi^2}$ *et* $v_{(\text{à } t=1\text{s})}=2\sqrt{2+\pi^2}$; $a_{(\text{à } t=0\text{s})}=\pi^2-2$ *et* $a_{(\text{à } t=1\text{s})}=2+2\pi^2$

CHAPITRE 3 : Mouvement Relatif

Ex. 3-1

Le conducteur d'une voiture observe que les gouttes de pluie font un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale lorsque la voiture roule sur une route droite à une vitesse de $10\sqrt{3}\ \text{m.s}^{-1}$.



Supposons que la pluie tombe verticalement, calculer sa vitesse (vecteur et module) :

1. par rapport au sol .
2. par rapport à la voiture en mouvement .

Solutions

- Le référentiel absolu $R(O;\ x, y, z)$ $\equiv$ lié au sol

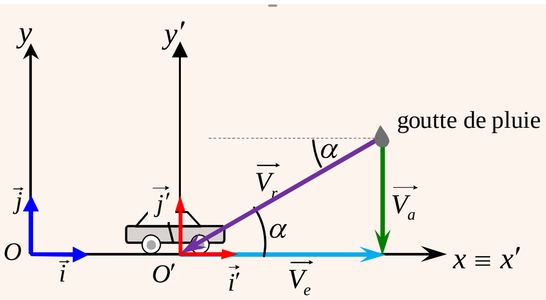
$\Rightarrow$ Vitesse de la pluie par rapport au sol $\equiv$ $\vec{V_a}$

- Le référentiel relatif $R'(O';\ x', y', z')$ $\equiv$ lié à la voiture

$\Rightarrow$ Vitesse de la pluie par rapport à la voiture $\equiv$ $\vec{V_r}$

- La voiture roule sur une route droite $\Rightarrow$ (R') est en translation rectiligne par rapport à (R), c'est-à-dire que $\vec{i} = \vec{i'}$, $\vec{j} = \vec{j'}$ et $\vec{k} = \vec{k'}$.

$\Rightarrow$ Vitesse d'entraînement $\equiv$ $\vec{V_e} = V_e \cdot \vec{i} = 10\sqrt{3} \cdot \vec{i}$



- L'angle entre $\vec{V_a}$ et $\vec{V_e}$ égal à : $\dfrac{\pi}{2}$

(puisque la pluie tombe verticalement par rapport au sol)

- L'angle entre $\vec{V_r}$ et $\vec{V_e}$ égal à : $\alpha = 30°$

(le conducteur observe que la pluie tombe en formant un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale)

La loi de composition des vitesses : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

1. La vitesse de la pluie par rapport au sol : $V_a = \left\| \vec{V_a} \right\|$

   Nous avons : $tan(\alpha) = \dfrac{V_a}{V_e}$ $\Rightarrow$ $V_a = V_e\, tan(\alpha) = V_e\, tan(30°)$ $= 10\sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $= 10\ \text{m.s}^{-1}$

   Alors, $\vec{V_a} = -V_a\, \vec{j} = -10\, \vec{j}$ (le signe négatif, car la pluie tombe en sens inverse de l'axe (Oy))

2. La vitesse de la pluie par rapport à la voiture en mouvement : $V_r = \left\| \vec{V_r} \right\|$

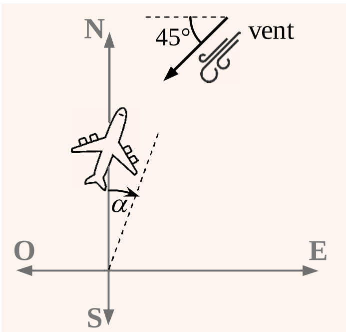
   Nous avons : $V_r^2 = V_a^2 + V_e^2$ $\Rightarrow$ $V_r = \sqrt{V_a^2 + V_e^2}$ $= 10\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$ $= 20\ \text{m.s}^{-1}$

   Alors, $\vec{V_r} = -V_r \left[cos(\alpha)\, \vec{i} + sin(\alpha)\, \vec{j}\right] = -10\left[\sqrt{3}\, \vec{i} + \vec{j}\right]$

Ex. 3-2

Un pilote veut que son avion se dirige directement vers le nord par rapport au sol. Toutefois, il y a un vent du nord-est à $90\ \text{km.h}^{-1}$ par rapport au sol. Il va donc diriger l'avion un peu à la droite du nord (direction définie par l'angle α sur la figure ci-contre). Supposons que la vitesse de l'avion par rapport à l'air est de $200\ \text{km.h}^{-1}$.

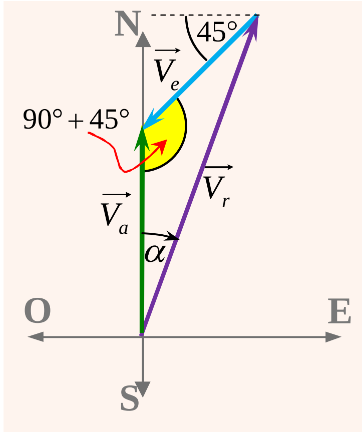
1. Sur un schéma, représenter les vecteurs vitesse et calculer la valeur d'angle α .
2. Quelle est la vitesse de l'avion par rapport au sol ?



Solution

1. La représentation des vecteurs vitesse sur un schéma :
   - La vitesse de l'avion par rapport au sol $\equiv \vec{V}_a$
   - La vitesse de l'avion par rapport à l'air $\equiv \vec{V}_r$

     $(v_r = 200 \text{ km.h}^{-1})$
   - La vitesse du vent par rapport au sol (Vitesse d'entraînement) $\equiv \vec{V}_e$ $(v_e = 90 \text{ km.h}^{-1})$



Avec l'application de la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

On peut trouver l'angle avec la loi des sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{V_e} = \frac{\sin(90° + 45°)}{V_r} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{V_e}{V_r}\cos(45°) = \frac{90}{200} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}32$$

Alors, $\alpha = Arc\sin\ (0{,}32) \approx 18{,}55°$

Donc, le pilote doit prendre la direction Nord $18{,}55°$ Est pour que l'avion se dirige directement vers le nord.

2. La vitesse V_a d'avion par rapport au sol :

D'après la relation : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$,

nous avons : $\left\|\vec{V}_a\right\|^2 = \left\|\vec{V}_r\right\|^2 + \left\|\vec{V}_e\right\|^2 + 2\,\vec{V}_r \bullet \vec{V}_e$

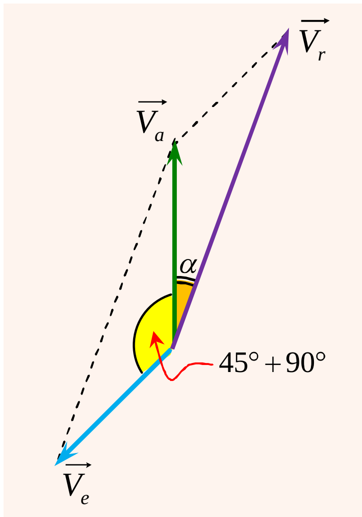
$$\Rightarrow V_a^2 = V_r^2 + V_e^2 + 2\,V_r\,V_e\cos(135° + \alpha)$$

$$= V_r^2 + V_e^2 + 2\,V_r\,V_e\cos(153{,}55°)$$

Alors : $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2\,V_r\,V_e\cos(153{,}55°)}$

Donc : $V_a = \sqrt{(200)^2 + (90)^2 + 2 \times 200 \times 90 \times \cos(153{,}55°)}$

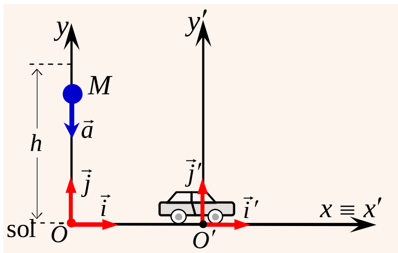
$$= 125{,}97 \text{ km.h}^{-1}$$



Ex. 3-3

À l'instant $t = 0$, on laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille M sans vitesse initiale. Dans un référentiel fixe $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_a = -g\ \vec{j}$ (voir la figure ci-contre).

Au moment du lâcher la bille, une voiture déplaçant suivant un mouvement rectiligne se passe à la verticale de chute.



1. Supposons que le mouvement de la voiture est uniforme de vitesse $\vec{v} = v_0\,\vec{i}$
   a) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}_r$ de la bille dans un référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ lié à la voiture.
   b) Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $(\mathcal{R}')$.
2. On admet que à $t = 0$, la voiture entame du repos un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e = a\ \vec{i}$.

a) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{O'M}$ et $\vec{V}_r$ de la bille dans le référentiel $(\mathcal{R}')$.

b) Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $(\mathcal{R}')$.

Solution

- Le référentiel absolu $\mathcal{R}\,(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\Rightarrow$ Mouvement de la bille M par rapport à $(\mathcal{R})$ $\equiv$ Mouvement absolu

La bille est en mouvement de chute libre, suivant l'axe (Oy), sans vitesse initiale

Donc, son vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = y(t)\,\vec{j} = (-\frac{1}{2}g\,t^2 + y_0)\,\vec{j}$, avec : $y_0 = h$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (h - \frac{1}{2}g\,t^2)\,\vec{j}$$

- Le référentiel relatif $\mathcal{R}'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ $\equiv$ lié à la voiture

$\Rightarrow$ Mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R}')$ $\equiv$ Mouvement relatif

- La voiture roule sur la ligne droite (l'axe (Ox))

$\Rightarrow$ $(\mathcal{R}')$ est en translation rectiligne par rapport à $(\mathcal{R})$, c'est-à-dire que $\vec{i} = \vec{i}\,'$, $\vec{j} = \vec{j}\,'$ et $\vec{k} = \vec{k}\,'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{La vitesse d'entraînement } \equiv \vec{V}_e = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} = \dfrac{dx_{O'}(t)}{dt}\,\vec{i} \\[2ex] \text{L'accélération d'entraînement } \equiv \vec{a}_e = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} = \dfrac{d^2x_{O'}(t)}{dt^2}\,\vec{i} \end{cases}$$

1. Le mouvement de la voiture est uniforme de vitesse : $\vec{v} = v_0\,\vec{i}$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_e = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} = v_0\,\vec{i}$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{dx_{O'}(t)}{dt}$$

Donc, $x_{O'}(t) = v_0\,t + x_0$, avec : $x_0 = 0$ (à $t = 0$, la voiture est passée par l'axe (Oy))

$$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = v_0\,t\;\vec{i}$$

a) D'après la loi de composition des mouvements : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$\Rightarrow$ Le vecteur position de M dans $(\mathcal{R}')$ est : $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = x'_M\;\vec{i}\,' + y'_M\;\vec{j}\,'$

$$= -v_0\,t\;\vec{i} + (h - \frac{1}{2}g\,t^2)\,\vec{j}$$

et son vecteur vitesse relative est : $\vec{V}_r = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = -v_0\;\vec{i} - g\,t\;\vec{j}$

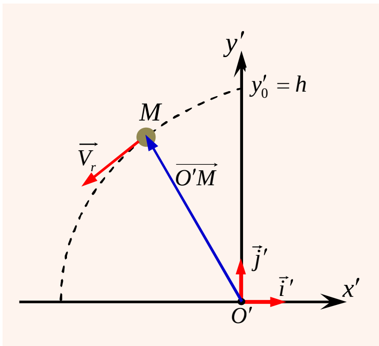
(même résultat peut être obtenu d'après la loi : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \Leftrightarrow \vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_e = -v_0\;\vec{i} - g\,t\;\vec{j}$)

b) L'équation de la trajectoire de la bille dans $(\mathcal{R}')$:

Nous avons : $\begin{cases} x'_M = -v_0\,t \\ y'_M = h - \dfrac{1}{2}g\,t^2 \end{cases} \Rightarrow t = -\dfrac{x'}{v_0}$

Donc : $y' = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x'^2 + h$

Alors, la trajectoire de la bille par rapport à la voiture est une parabole.



2. Le mouvement de la voiture est uniformément accéléré d'accélération : $\vec{a}_e = a\,\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} = a\,\vec{i} \Leftrightarrow a = \frac{d^2 x_{O'}(t)}{dt^2}$$

Alors : $x_{O'}(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0$, avec : $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ (à $t = 0$, la voiture a démarré du repos)

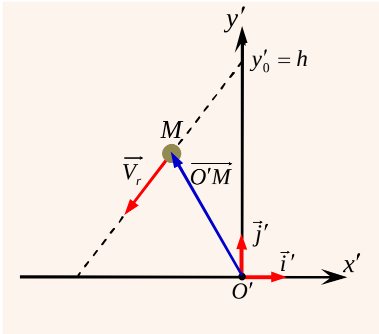
$$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}a\,t^2\,\vec{i}$$

a) Le vecteur position de M dans $(\mathcal{R}')$ est : $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = x'_M\,\vec{i}' + y'_M\,\vec{j}'$

$$= -\frac{1}{2}a\,t^2\,\vec{i} + (h - \frac{1}{2}g\,t^2)\,\vec{j}$$

et le vecteur vitesse relative est : $\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = -a\,t\,\vec{i} - g\,t\,\vec{j}$

b) L'équation de la trajectoire dans $(\mathcal{R}')$: $\begin{cases} x'_M = -\frac{1}{2}a\,t^2 \\ y'_M = h - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$



$$\Rightarrow \frac{y' - h}{x'} = \frac{g}{a}$$

Donc : $y' = \frac{g}{a}x' + h$

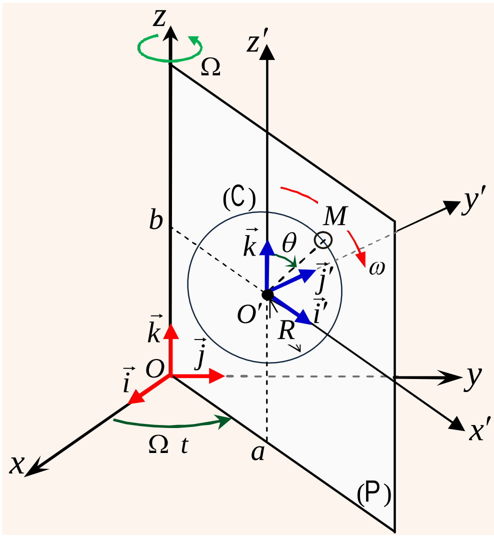
Alors, la trajectoire de la bille par rapport à la voiture accélérée est une droite inclinée.

Ex. 3-4

On considère le référentiel fixe $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$. Dans ce plan (P), un anneau M assimilé à un point matériel se déplace sans frottement, dans un mouvement circulaire uniforme sur un cerceau (C) de centre O' et de rayon R. On désigne par $\mathcal{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ un référentiel lié au plan (P) tel que le plan $(x'O'z')$ reste constamment dans le plan (P) et $\vec{k}' = \vec{k}$, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Dans $(\mathcal{R}')$, la position de M est définie par l'angle $\theta(t) = \omega\,t$ (ω est une constante).

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $\theta(t) = 0$ et la position initiale de M est définie dans $(\mathcal{R})$ par les coordonnées $(a, 0, b + R)$ (a et b sont des constantes).



1. Exprimer dans $(\mathcal{R}')$:
   a) Le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$
   b) La vitesse et l'accélération relative de M.
2. Exprimer dans $(\mathcal{R})$, la vitesse et l'accélération d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$
3. Déterminer l'expression de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$ exprimée dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
4. Retrouver, par application des lois de composition des mouvements ($\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$), les expressions de la vitesse absolue et de l'accélération absolue de M dans $(\mathcal{R})$.

Solution

- Le référentiel absolu $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\Rightarrow$ Mouvement du point M par rapport à $(\mathcal{R})$ $\equiv$ Mouvement absolu

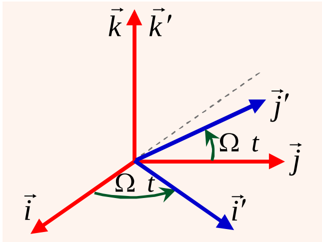
- Le référentiel relatif $\mathcal{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ $\equiv$ lié au plan (P)

$\Rightarrow$ Mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R}')$ $\equiv$ Mouvement relatif

- Le plan (P) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$.

$\Rightarrow$ $(\mathcal{R}')$ est en rotation par rapport à $(\mathcal{R})$, avec :

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\Omega t\;\vec{i} + \sin\Omega t\;\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin\Omega t\;\vec{i} + \cos\Omega t\;\vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases}$$



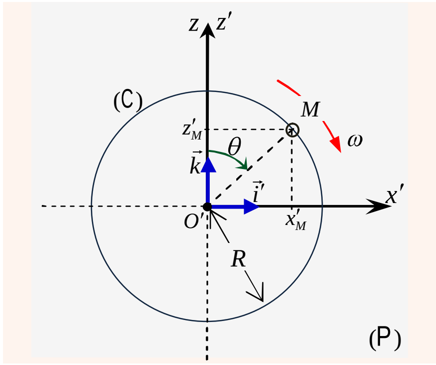
1. Dans $(\mathcal{R}')$, le mouvement de M est circulaire uniforme :

   a) A l'instant t, le vecteur position de M est : $\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\;\vec{i}' + y'(t)\;\vec{j}' + z'(t)\,\vec{k}'$

Avec : $\begin{cases} x'(t) = R\sin\theta(t) \\ y'(t) = 0 \\ z'(\mathrm{t}) = R\cos\theta(t) \end{cases}$

Donc pour : $\theta(t) = \omega\, t$; nous avons :

$$\overrightarrow{O'M}(t) = R\,(\sin\omega\, t\;\vec{i}' + \cos\omega\, t\,\vec{k})$$



   b) Le vitesse relative de M est :

$$\vec{V}_r = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \dot{x}'(t)\;\vec{i}' + \dot{z}'(t)\,\vec{k}$$

$$= R\,\omega\,(\cos\omega\, t\;\vec{i}' - \sin\omega\, t\,\vec{k})$$

L'accélération relative de M est : $\vec{a}_r = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{(\mathrm{R}')} = \ddot{x}'(t)\;\vec{i}' + \ddot{z}'(t)\,\vec{k}$

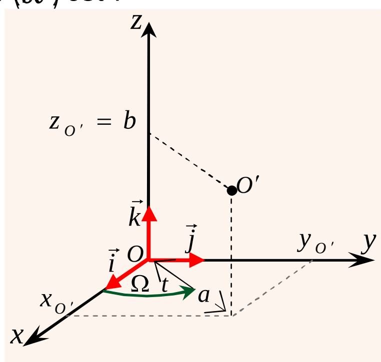
$$= -R\,\omega^2\,(\sin\omega\, t\;\vec{i}' + \cos\omega\, t\,\vec{k})$$

2. a) Dans $(\mathcal{R})$, la vitesse d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

Avec : $\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\;\vec{i} + y_{O'}\;\vec{j} + z_{O'}\;\vec{k}$

$$= a\cos\Omega t\;\vec{i} + a\sin\Omega t\;\vec{j} + b\,\vec{k}$$



$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = a\,\Omega\,(-\sin\Omega t\;\vec{i} + \cos\Omega t\;\vec{j})$$

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$, le produit vectoriel $\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$ égal à :

$$\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ R\sin\omega t & 0 & R\cos\omega t \end{vmatrix} = R\,\Omega\sin\omega t\;\vec{j}'$$

Donc, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\quad \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = R\,\Omega\sin(\omega t)\;(-\sin(\Omega t)\;\vec{i} + \cos(\Omega t)\;\vec{j})$

$$\Rightarrow \vec{V}_e = a\,\Omega\,(-\sin(\Omega t)\;\vec{i} + \cos(\Omega t)\;\vec{j}) + R\,\Omega\sin(\omega t)\;(-\sin(\Omega t)\;\vec{i} + \cos(\Omega t)\;\vec{j})$$

$$= \Omega\,(a + R\,sin(\omega\,t))\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$$

b) L'accélération d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est :

$$\vec{a_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

Avec : $\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} = a\,\Omega\,\frac{d(-sin\,\Omega t\;\vec{i} + cos\,\Omega t\;\vec{j})}{dt} = -a\,\Omega^2\,(cos\,\Omega t\;\vec{i} + sin\,\Omega t\;\vec{j})$

Et : $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ (puisque la rotation de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est uniforme $\Rightarrow \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$)

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$, le produit vectoriel $\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$ égal à :

$$\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & R\,\Omega\,sin\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = -R\,\Omega^2\,sin\,\omega t\;\vec{i}'$$

Donc, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = -R\,\Omega^2\,sin(\omega t)\;(cos(\Omega t)\,\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j})$

$$\Rightarrow \vec{a_e} = -a\,\Omega^2\,(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\,\vec{j}) - R\,\Omega^2\,sin(\omega t)\;(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j})$$

$$= -\Omega^2\,(a + R\,sin(\omega t))\;(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j})$$

3. L'accélération de Coriolis est : $\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$, le produit vectoriel $\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r}$ égal à :

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ R\,\omega\,cos\,\omega t & 0 & -R\,\omega\,sin\,\omega t \end{vmatrix} = R\,\Omega\,\omega\,cos\,\omega t\;\vec{j}'$$

Donc, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r} = R\,\Omega\,\omega\,cos(\omega t)\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$

$$\Rightarrow \vec{a_c} = 2\,R\,\Omega\,\omega\,cos(\omega t)\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$$

4. a) Dans $(\mathcal{R})$, la vitesse absolue de M est : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

Avec : $\vec{V_r} = R\,\omega\,(cos\,\omega t\;\vec{i}' - sin\,\omega t\,\vec{k})$

Donc, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{V_r} = R\,\omega\,cos(\omega t)\;(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j}) - R\,\omega\,sin(\omega t)\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V_a} = R\,\omega\,cos(\omega t)\;(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j}) -$$

$$R\,\omega\,sin(\omega t)\,\vec{k} + \Omega\,(a + R\,sin(\omega t))\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$$

$$= \left(R\,\omega\,cos(\omega t)\,cos(\Omega t) - \Omega\,(a + R\,sin(\omega t))\,sin(\Omega t)\right)\vec{i} +$$

$$\left(R\,\omega\,cos(\omega t)\,sin(\Omega t) + \Omega\,(a + R\,sin(\omega t))\,cos(\Omega t)\right)\vec{j} - R\,\omega\,sin(\omega t)\,\vec{k}$$

b) L'accélération absolue de M est : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

Avec : $\vec{a}_r = -R\,\omega^2\,(\sin\omega t\ \vec{i}\,' + \cos\omega t\,\vec{k})$

Donc, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\vec{a}_r = -R\,\omega^2\,\sin(\omega t)\ (\cos(\Omega t)\ \vec{i} + \sin(\Omega t)\ \vec{j}) - R\,\omega^2\,\cos(\omega t)\,\vec{k}$

$$\Rightarrow\ \vec{a}_a = -R\,\omega^2\,\sin(\omega t)\ (\cos(\Omega t)\ \vec{i} + \sin(\Omega t)\ \vec{j}) - R\,\omega^2\,\cos(\omega t)\,\vec{k}\ -$$

$$\Omega^2\,(a + R\sin(\omega t))\ (\cos(\Omega t)\ \vec{i} + \sin(\Omega t)\ \vec{j})\ +$$

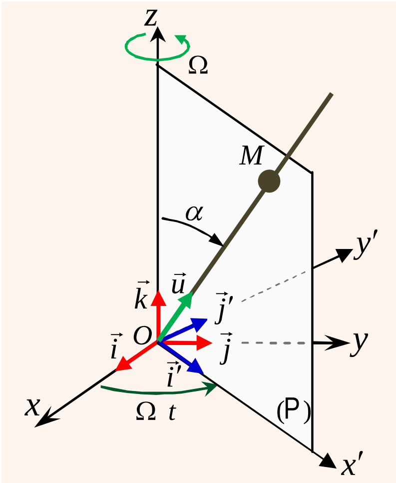
$$2\,R\,\Omega\,\omega\cos(\omega t)\ (-\sin(\Omega t)\ \vec{i} + \cos(\Omega t)\ \vec{j})$$

$$= \Big(\big(-R\,\omega^2\,\sin(\omega t) - \Omega^2\,(a + R\sin(\omega t))\big)\cos(\Omega t) - 2\,R\,\Omega\,\omega\cos(\omega t)\sin(\Omega t)\Big)\ \vec{i}\ +$$

$$\Big(\big(-R\,\omega^2\,\sin(\omega t) - \Omega^2\,(a + R\sin(\omega t))\big)\sin(\Omega t) + 2\,R\,\Omega\,\omega\cos(\omega t)\cos(\Omega t)\Big)\ \vec{j}\ -$$

$$R\,\omega^2\,\cos(\omega t)\,\vec{k}$$

Ex. 3-5



On considère le référentiel fixe $\mathcal{R}\,(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (P) un plan vertical tourne a la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\ \vec{k}$ autour de l'axe (Oz). Dans le plan (P), une droite (Δ) fait un angle constant $\alpha\ (< \frac{\pi}{2})$ avec l'axe (Oz). On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire de (Δ).

Un point matériel M se déplace sur (Δ) telle qu'à t :

$$\overrightarrow{OM}(t) = a\,t\,\vec{u}\quad (a \text{ est une constante}).$$

On désigne par $\mathcal{R}'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ un référentiel lié au plan (P), comme indiqué sur la figure ci-contre.

1. Déterminer la vitesse $\vec{V}_r$ et l'accélération $\vec{a}_r$ du point matériel M exprimées dans la base $(\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k})$.
2. En déduire $\vec{V}_a$ et $\vec{a}_a$ de M exprimées dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
3. Retrouver $\vec{V}_a$ et $\vec{a}_a$ (exprimées dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$) par le calcul direct :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right|_{R}\quad \text{et}\quad \vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}\right|_{R}$$

Solution

- o Le référentiel absolu $\mathcal{R}\,(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

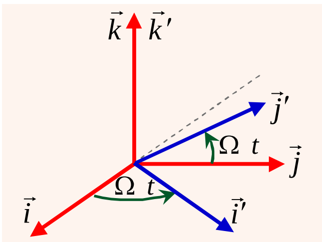
  $\Rightarrow$ Mouvement du point M par rapport à $(\mathcal{R})$ $\equiv$ Mouvement absolu

- o Le référentiel relatif $\mathcal{R}'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ $\equiv$ lié au plan (P)

  $\Rightarrow$ Mouvement de M par rapport à $(\mathcal{R}')$ $\equiv$ Mouvement relatif

- o Le plan (P) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\ \vec{k}$.

  $\Rightarrow$ $(\mathcal{R}')$ est en rotation par rapport à $(\mathcal{R})$, avec :



$$\begin{cases} \vec{i}\,' = \cos\Omega t\ \vec{i} + \sin\Omega t\ \vec{j} \\ \vec{j}\,' = -\sin\Omega t\ \vec{i} + \cos\Omega t\ \vec{j} \\ \vec{k}\,' = \vec{k} \end{cases}$$

1. Dans $(\mathcal{R}')$, le mouvement de M est rectiligne accéléré :

   $\Rightarrow$ Le vecteur position de M est : $\overrightarrow{OM}(t) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\ \sin\alpha\ \vec{i}\,' + \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\ \cos\alpha\ \vec{k}\,'$

Avec : $\overrightarrow{OM}(t) = a\,t\,\vec{u} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = a\,t$ (supposons que a est positive)

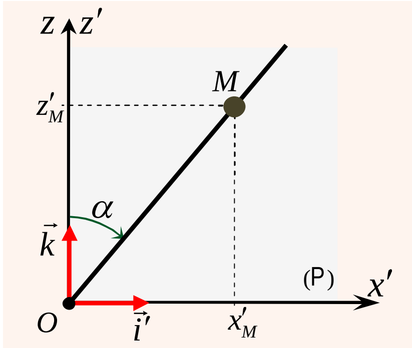
$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}(t) = a\,t\,(\sin\alpha\ \vec{i}\,' + \cos\alpha\ \vec{k})$$

a) Le vitesse relative de M est :

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = a\,(\sin\alpha\ \vec{i}\,' + \cos\alpha\ \vec{k}) \quad = \overrightarrow{cte}$$

b) L'accélération relative de M est :

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{(R')} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{(R')} = \vec{0}$$



2. a) Dans $(\mathcal{R})$, la vitesse absolue de M est : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

Avec : $\vec{V}_r = a\,(\sin\alpha\ \vec{i}\,' + \cos\alpha\ \vec{k})$

$\Rightarrow$ Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{V}_r = a\sin(\alpha)\ (\cos(\Omega t)\ \vec{i} + \sin(\Omega t)\ \vec{j}) + a\cos(\alpha)\,\vec{k}$

Et la vitesse d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est : $\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$

Avec : $\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}$

Alors : $\vec{V}_e = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$: $\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a\,t\sin\alpha & 0 & a\,t\cos\alpha \end{vmatrix} = a\,\Omega\sin(\alpha)\,t\,\vec{j}\,'$

$\Rightarrow$ Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{V}_e = a\,\Omega\sin(\alpha)\,t\,(-\sin(\Omega t)\ \vec{i} + \cos(\Omega t)\ \vec{j})$

Alors : $\vec{V}_a = a\sin(\alpha)\ (\cos(\Omega t)\ \vec{i} + \sin(\Omega t)\ \vec{j}) + a\cos(\alpha)\,\vec{k}$

$$+\,a\,\Omega\sin(\alpha)\,t\,(-\sin(\Omega t)\ \vec{i} + \cos(\Omega t)\ \vec{j})$$

$$= a\sin(\alpha)\big((\cos(\Omega t) - \Omega t\sin(\Omega t))\ \vec{i} + (\sin(\Omega t) + \Omega t\cos(\Omega t))\ \vec{j}\big) + a\cos(\alpha)\,\vec{k}$$

b) L'accélération absolue de M est : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_e + \vec{a}_c$

Avec : $\vec{a}_e$, l'accélération d'entraînement de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$:

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{(R)} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

Nous avons : $\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \\ \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0} \end{cases}$, donc : $\vec{a}_e = \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM})$

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$: $\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & a\,\Omega\,sin(\alpha)\,t & 0 \end{vmatrix} = -a\,\Omega^2\,sin(\alpha)\,t\;\vec{i}\,'$

$\Rightarrow$ Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\overrightarrow{a_e} = -a\,\Omega^2\,sin(\alpha)\,t\,(cos(\Omega t)\,\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j})$

Et : $\overrightarrow{a_c}$, l'accélération de Coriolis : $\overrightarrow{a_c} = 2\,\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$

Dans le référentiel $(\mathcal{R}')$: $\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a\,sin\,\alpha & 0 & a\,cos\,\alpha \end{vmatrix} = a\,\Omega\,sin\,\alpha\;\vec{j}\,'$

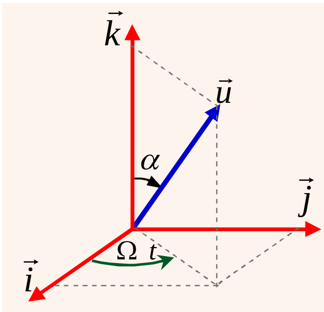
$\Rightarrow$ Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $\overrightarrow{a_c} = 2\,a\,\Omega\,sin(\alpha)\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$

Alors : $\overrightarrow{a_a} = -a\,\Omega^2\,sin(\alpha)\,t\,(cos(\Omega t)\,\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j})$

$$+2\,a\,\Omega\,sin(\alpha)\;(-sin(\Omega t)\;\vec{i} + cos(\Omega t)\;\vec{j})$$

$$= a\,\Omega\,sin(\alpha)\big((-\Omega\;t\,cos(\Omega t) - 2\,sin(\Omega t))\,\vec{i} + (-\Omega\;t\,sin(\Omega t) + 2\,cos(\Omega t))\;\vec{j}\big)$$

3. Par un calcul direct :



Pour : $\overrightarrow{OM}\,(t) = a\,t\,\vec{u}$

Avec, la projection du vecteur unitaire $\vec{u}$ sur la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ qui nous donne : $\vec{u} = sin(\alpha)\;(cos(\Omega t)\;\vec{i} + sin(\Omega t)\;\vec{j}) + cos(\alpha)\,\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}\,(t) = a\;sin(\alpha)\;(t\,cos(\Omega\,t)\;\vec{i} + t\,sin(\Omega\,t)\;\vec{j}) + a\,t\,cos(\alpha)\,\vec{k}$

a) La vitesse absolue de M est :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right|_R$$

$$= a\,sin(\alpha)\big((cos(\Omega t) - \Omega\,t\,sin(\Omega t))\;\vec{i} + (sin(\Omega t) + \Omega\,t\,cos(\Omega t))\;\vec{j}\big) + a\,cos(\alpha)\,\vec{k}$$

b) L'accélération absolue de M est :

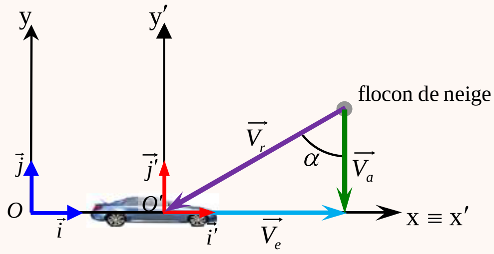
$$\vec{a}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R$$

$$= a\,\Omega\,sin(\alpha)\big((-\Omega\;t\,cos(\Omega t) - 2\,sin(\Omega t))\,\vec{i} + (-\Omega\;t\,sin(\Omega t) + 2\,cos(\Omega t))\;\vec{j}\big)$$

Ex. Supp. 3-1

Le conducteur d'une voiture roulant sur une route droite à une vitesse de $15\sqrt{3}\ \mathrm{m.s^{-1}}$*, observe que la neige tombe en formant un angle* $\alpha = 60°$ *par rapport à la verticale. Mais lorsque la voiture s'arrête, il remarque que la neige tombe verticalement.*
Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol puis par rapport à la voiture lorsque elle était roulée à $15\sqrt{3}\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Réponses



$\vec{V}_e \equiv$ Vitesse de la voiture $\Rightarrow \vec{V}_e = V_e\ \vec{i} = 15\sqrt{3}\ \vec{i}$

1. La vitesse de la neige par rapport au sol :

$$V_a = \left\| \vec{V}_a \right\| = \frac{V_e}{tan(\alpha)} = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 15\ \text{m.s}^{-1}$$

Et : $\vec{V}_a = -V_a\ \vec{j} = -15\ \vec{j}$

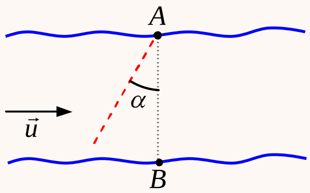
2. La vitesse de la neige par rapport à la voiture lorsque elle était roulée :

$$V_r = \left\| \vec{V}_r \right\| = \sqrt{V_a^2 + V_e^2} = 30\ \text{m.s}^{-1}$$

Et : $\vec{V}_r = -V_r \left[sin(\alpha)\ \vec{i} - cos(\alpha)\ \vec{j} \right] = -15\left[\sqrt{3}\ \vec{i} + \vec{j} \right]$

Ex. Supp. 3-2

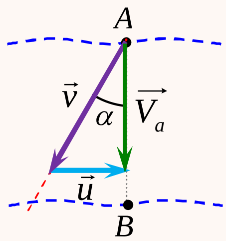
Un nageur part d'un point A situé sur la rive d'une rivière de largeur ℓ et veut atteindre l'autre rive au point B qui est directement en face de A. Pour cela, il nage avec une vitesse constante $\vec{v}$ par rapport à l'eau et suivant une direction faisant un angle α avec le segment $[AB]$.



Si l'eau se déplace avec un courant de vitesse constante $\vec{u}$ $(u < v)$.

1. Sur un schéma, représenter les vecteurs vitesse et déterminer l'angle α en fonction de v et u.
2. Exprimer, en fonction de ℓ, v et u, le temps t mis par le nageur pour traverser la rivière (temps de traversée).

Réponses

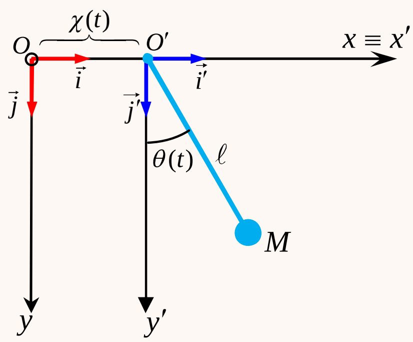


1. $sin(\alpha) = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \alpha = Arcsin\left(\dfrac{u}{v}\right)$

2. $\ell = V_a\ t = \sqrt{v^2 - u^2}\ t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\ell}{\sqrt{v^2 - u^2}}$

Ex. Supp. 3-3

On considère un point matériel M suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ. Le mouvement de M a lieu dans le plan (xOy) d'un référentiel fixe $\mathfrak{R}(O; x, y, z)$ et le point de suspension O' est en mouvement le long de l'axe (Ox) (figure ci-contre). Dans $(\mathfrak{R})$, la position de O' est repérée à l'instant t par $\chi(t) = b\,t^2$ (b est une constante positive).



Soit $\mathfrak{R}'(O'; x', y', z')$ le référentiel d'origine O' et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de $(\mathfrak{R})$. Dans $(\mathfrak{R}')$, la position de M est définie par l'angle $\theta(t) = \omega\, t$ (ω est une constante).

1. Exprimer dans $(\mathfrak{R})$, la vitesse et l'accélération d'entrainement du mouvement de $(\mathfrak{R}')$ par rapport à $(\mathfrak{R})$.
2. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, calculer en fonction de b, ω et ℓ :
   a) La vitesse relative et l'accélération relative de M.
   b) La vitesse absolue et l'accélération absolue de M.

Réponses

1. $\vec{V}_e = \left.\dfrac{\text{d}\overrightarrow{OO'}}{\text{dt}}\right|_{(R)} = \dot{\chi}(t)\,\vec{i} = 2b\,t\ \vec{i}$; $\vec{a}_e = \left.\dfrac{\text{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\text{dt}^2}\right|_{(R)} = \ddot{\chi}(t)\,\vec{i} = 2b\ \vec{i}$

2. a) $\vec{V}_r = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = \ell\,\omega\left[-\sin(\omega\,t)\;\vec{i} + \cos(\omega\,t)\;\vec{j}\right]$ et $\vec{a}_r = \left.\dfrac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{(R')} = -\ell\,\omega^2\left[\cos(\omega\,t)\;\vec{i} + \sin(\omega\,t)\;\vec{j}\right]$

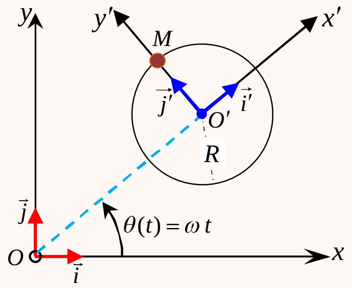
b) $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \left[-\ell\,\omega\sin(\omega\,t) + 2b\,t\right]\vec{i} + \ell\,\omega\cos(\omega\,t)\;\vec{j}$ et

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \left[-\ell\,\omega^2\cos(\omega\,t) + 2b\right]\vec{i} - \ell\,\omega^2\sin(\omega\,t)\;\vec{j}$

Ex. Supp. 3-4

On considère un référentiel $\mathcal{R}'(O'; x', y')$ lié au centre O' d'un disque de rayon R.

L'axe $(O'y')$ passe par un point matériel M fixé sur la circonférence du disque, et l'axe $(O'x')$ tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un référentiel fixe $\mathcal{R}(O; x, y)$. On suppose que la distance OO' reste constante : $OO' = d$.



En utilisant les lois de composition des vitesses et des accélérations, trouver en fonction de d , ω et R :

1. Le vecteur vitesse absolue de M dans $(\mathcal{R})$.
2. Le vecteur l'accélération absolue de M dans $(\mathcal{R})$.

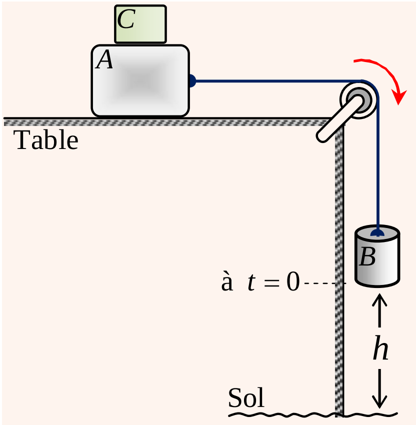
Réponses

1. $\vec{V}_a = \vec{V}_e = \left[-d\,\omega\sin(\omega\,t) - R\;\omega\cos(\omega\,t)\right]\vec{i} + \left[d\,\omega\cos(\omega\,t) - R\;\omega\sin(\omega\,t)\right]\vec{j}$
2. $\vec{a}_a = \vec{a}_e = \left[-d\,\omega^2\cos(\omega\,t) + R\;\omega^2\sin(\omega\,t)\right]\vec{i} + \left[-d\,\omega^2\sin(\omega\,t) - R\,\omega^2\cos(\omega\,t)\right]\vec{j}$

CHAPITRE 4 : Dynamique du Point Matériel

Ex. 4-1

On considère le système illustré dans la figure ci-contre.
Les masses des corps A et B sont respectivement $m_1 = 1$ Kg et $m_2 = 110$ g. Au repos, le corps B se trouve à une hauteur $h = 39{,}24$ cm par rapport au sol, et la table exerce sur le corps A un frottement statique de coefficient μ_s.



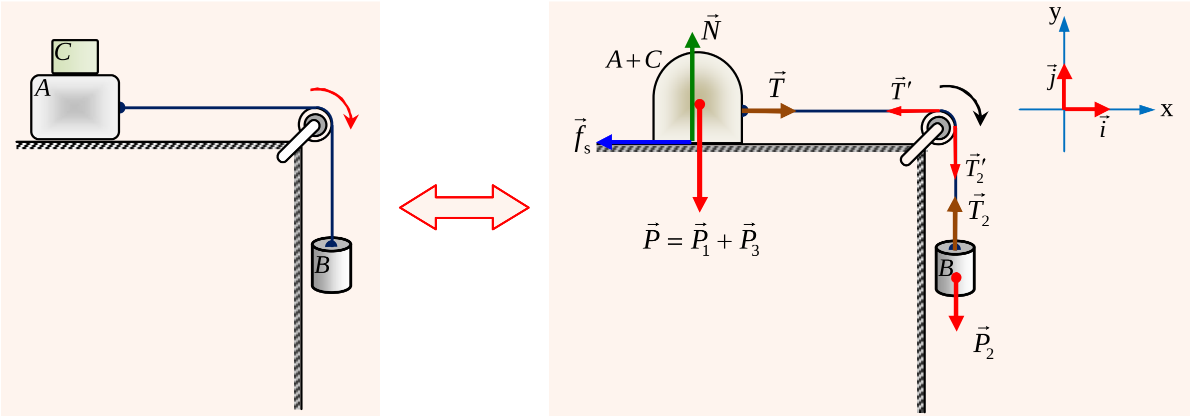
Pour empêche le mouvement spontané de A (ou B), un troisième corps C, de masse m_3, est placé sur le corps A.
En supposant que les masses de la poulie et du fil sont négligeables, et que le fil est inextensible.

1. Représenter les forces agissant sur le système.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) :
   a) Trouver, en fonction de μ_s, la valeur minimale de m_3 qui empêche le corps A de déplacer.
   b) Calculer la valeur de m_3, en prenant $\mu_s = 0{,}1$.
3. A l'instant $t = 0$, on soulève le corps C, et après 2 s le corps B atteint le sol.
   a) Refaire la question (1).
   b) En appliquant le PFD, calculer le coefficient de frottement cinétique μ_c de la table.

<u>Remarque :</u> On prend la valeur de l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Solution

1. Le corps A ne déplace pas $\Rightarrow$ le système est au repos.
   On peut remplacer les deux corps A et C par un seul corps de masse $m_1 + m_3$, et puis on représente toutes les forces agissant sur le nouveau système.



Au repos, les forces agissant sur le système sont :

- sur le corps $A+C$:
  - Le poids : $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_3$ (module $P = P_1 + P_3 = (m_1 + m_3)\,g$)
  - La réaction normale : $\vec{N}$ (module N)
  - La tension du fil : $\vec{T}$ (module T)
  - Le frottement statique : $\vec{f}_s$ (module $f_s = \mu_s\, N$)
- sur le corps B :
  - Le poids : $\vec{P}_2$ (module $P_2 = m_2\, g$)
  - La tension du fil : $\vec{T}_2$ (module T_2)
- sur la poulie :
  - La tension $\vec{T}'$ (réaction due à $\vec{T}$ $\Rightarrow \vec{T}' = -\vec{T}$) (module T')
  - La tension $\vec{T}_2'$ (réaction due à $\vec{T}_2$ $\Rightarrow \vec{T}_2' = -\vec{T}_2$) (module T_2')

La poulie est sans masse,
et sans frottement avec le fil $\Rightarrow$ $T' = T_2'$; et par conséquence : $T = T_2$

Les expressions des vecteurs forces par rapport au repère choisi sont :

- sur le corps $A+C$: $\vec{P} = -P\ \vec{j}$; $\vec{N} = N\ \vec{j}$; $\vec{T} = T\ \vec{i}$; $\vec{f}_s = -f_s\ \vec{i}$
- sur le corps B : $\vec{P}_2 = -P_2\ \vec{j}$; $\vec{T}_2 = T_2\ \vec{j}$

Au repos (c'est-à-dire à l'équilibre), le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

- sur le corps $A+C$: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}_s = 0$ ....Eq ①
  La projection de l'équation ① sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur l'axe } (x) : \\ &\text{sur l'axe } (y) : \end{aligned} \begin{cases} T - f_s = 0 \\ N - P = 0 \end{cases} \quad ; \text{ avec : } \quad f_s = \mu_s\, N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \mu_s\, N \\ N = P \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T = \mu_s\, P = \mu_s\, g\,(m_1 + m_3) \text{ ....Eq ②}$$

- sur le corps B : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = 0$ ....Eq ③

La projection de l'équation ③ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{cases} \text{sur l'axe } (x) : & 0 = 0 \\ \text{sur l'axe } (y) : & T_2 - P_2 = 0 \end{cases} \quad ; \text{ avec : } \quad T_2 = T$$

$\Rightarrow \qquad T = P_2 = m_2\, g$ ....Eq ④

En remplaçant par l'équation ④ dans l'équation ② , on trouve : $m_2\, g = \mu_s\, g\,(m_1 + m_3)$
Cette équation représente la relation entres les masses des corps au repos,

Donc, la condition au repos est : $\quad m_3 = \dfrac{m_2}{\mu_s} - m_1$

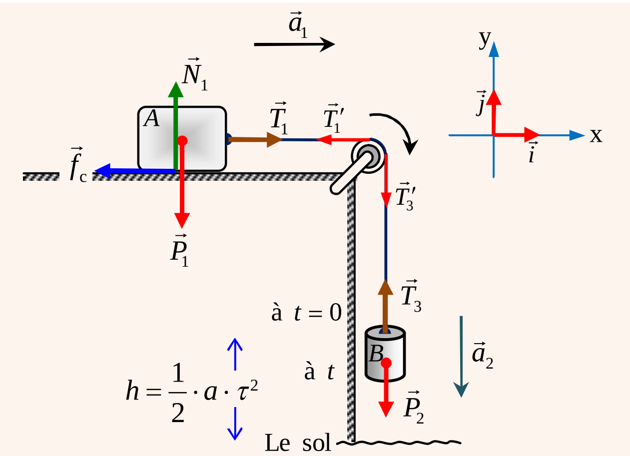
Cette valeur de m_3 est la masse minimale qui doit être placée au dessus du corps A pour assurer le repos du système.

Application Numérique : Pour : $m_1 = 1$ Kg , $m_2 = 110$ g $= 0{,}11$ Kg et $\mu_s = 0{,}1$,

La valeur minimale de m_3 est : $\quad m_3 = \dfrac{0{,}11}{0{,}1} - 1 = 0{,}1 \text{ Kg} = 100 \text{ g}$

2. Lorsque on soulève le corps C, les deux corps A et B commencent à se déplacer spontanément, de sorte que le corps A avance suivant l'horizon (l'axe (x) choisi) et le corps B tombe suivant la verticale (l'axe (y) choisi)

   a) Les forces agissant sur les corps A et B sont :



- sur le corps A :
  - Le poids : $\vec{P}_1$ (module $P_1 = m_1\, g$)
  - La réaction normale : $\vec{N}_1$ (module N_1)
  - La tension du fil : $\vec{T}_1$ (module T_1)
  - Le frottement cinétique : $\vec{f}_s$ (module $f_c = \mu_c\, N_1$)
  -
- sur le corps B :
  - Le poids : $\vec{P}_2$ (module $P_2 = m_2\, g$)
  - La tension du fil : $\vec{T}_3$ (module $T_3 = T_1$, à cause de la poulie)

Les expressions des vecteurs forces par rapport au repère choisi sont :

- sur le corps A : $\vec{P}_1 = -P_1\, \vec{j}$; $\vec{N}_1 = N_1\, \vec{j}$; $\vec{T}_1 = T_1\, \vec{i}$; $\vec{f}_c = -f_c\, \vec{i} = -\mu_c\, N_1\, \vec{i}$
- sur le corps B : $\vec{P}_2 = -P_2\, \vec{j}$; $\vec{T}_3 = T_3\, \vec{j} = T_1\, \vec{j}$

Les accélérations des corps A et B sont :

- le corps A : $\vec{a}_1$ (module a_1)
- le corps B : $\vec{a}_2$ (module a_2)

(Le fil est inextensible $\Rightarrow a_1 = a_2 = a$)

Donc, Les expressions des vecteurs accélération par rapport au repère choisi sont :

$\vec{a}_1 = a\ \vec{i}$ et $\vec{a}_2 = -a\ \vec{j}$

b) En mouvement, le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

- sur le corps A : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1\,\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{f}_c = m_1\,\vec{a}_1$ ....Eq ⑤

La projection de l'équation ⑤ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur l'axe } (x) : \\ &\text{sur l'axe } (y) : \end{aligned} \begin{cases} T_1 - \mu_c\,N_1 = m_1\,a \\ N_1 - P_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 = m_1\,a + \mu_c\,P_1 \quad = m_1\,(a + \mu_c\,g)$$ ....Eq ⑥

- sur le corps B : $\sum \vec{F}_{ext} = m_2\,\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_3 = m_2\,\vec{a}_2$ ....Eq ⑦

La projection de l'équation ⑦ sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{aligned} &\text{sur l'axe } (x) : \\ &\text{sur l'axe } (y) : \end{aligned} \begin{cases} 0 = 0 \\ T_1 - P_2 = -m_2\,a \end{cases} \Rightarrow \quad T_1 = -m_2\,(a - g)$$ ....Eq ⑧

En remplaçant par l'équation ⑧ dans l'équation ⑥ , on trouve :

$$m_1\,(a + \mu_c\,g) = -m_2\,(a - g)$$

Donc, l'expression de l'accélération est : $a = \left(\dfrac{m_2 - \mu_c\,m_1}{m_1 + m_2}\right) g$

$\Rightarrow$ L'expression du coefficient de frottement cinétique μ_c est : $\mu_c = -\dfrac{a}{g}\left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right) + \left(\dfrac{m_2}{m_1}\right)$

Calcul de l'accélération a à partir du mouvement du corps B

Le mouvement B suivant l'axe (y) est uniformément accéléré (*sans vitesse initiale*),

donc son équation horaire est : $y(t) - y_0 = \dfrac{1}{2} a\,t^2$ (y_0 est sa position à $t = 0$)

Le corps B parcourue la distance jusqu'au sol pendant une durée : $\tau = 2\ \text{s}$

$$\Rightarrow \quad y_{sol} - y_0 = h = \frac{1}{2} a\,\tau^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{2\,h}{\tau^2}$$

Application Numérique : Pour : $h = 39{,}24\ \text{cm} = 39{,}24 \times 10^{-2}\ \text{m}$ et $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

- La valeur de l'accélération est :

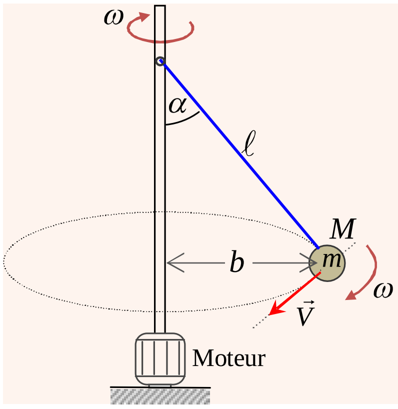
$$a = \frac{2 \times 39{,}24 \times 10^{-2}}{2^2} = 19{,}62 \times 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- La valeur du coefficient de frottement cinétique est :

$$\mu_c = -\frac{19{,}62 \times 10^{-2}}{9{,}81} \cdot \left(\frac{1 + 0{,}11}{1}\right) + \left(\frac{0{,}11}{1}\right) \approx 0{,}09$$

Ex. 4-2

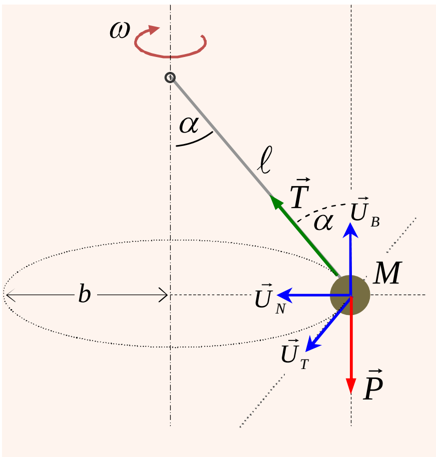
On considère un point matériel M, de masse $m = 200$ g, suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur $\ell = 20$ cm. Le fil est mis en rotation à une vitesse constante $\omega = 10$ rad.s^{-1}, ce qui le fait s'étirer et décrit ainsi un cône d'axe vertical et d'angle au sommet 2α, comme le montre la figure ci-contre.



En utilisant le système des coordonnées intrinsèques muni de la base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N, \vec{U}_B)$.

1. Représenter les forces agissant sur le point M.
2. En appliquant le PFD, et en prenant $g = 10$ m·s^{-2}.
   a) Calculer la valeur de l'angle α
   b) Calculer la tension T du fil.

Solution



1. Représentation des forces :
   Les forces agissant sur M sont : - Le poids : $\vec{P}$
   - La tension du fil : $\vec{T}$

   En système des coordonnées intrinsèques muni de la base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N, \vec{U}_B)$, les expressions des forces sont : $\vec{P} = -m\,g\,\vec{U}_B$

$$\vec{T} = T\sin\alpha\,\vec{U}_N + T\cos\alpha\,\vec{U}_B$$

   Et l'expression d'accélération est : $\vec{a} = a_T\,\vec{U}_T + a_N\,\vec{U}_N$

$$= \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\vec{U}_T + \frac{\mathrm{v}^2}{b}\vec{U}_N \quad = \frac{\mathrm{d}(b\,\omega)}{\mathrm{dt}}\vec{U}_T + \frac{b^2\,\omega^2}{b}\vec{U}_N$$

   Et tandis que la vitesse ω est constante $\Rightarrow$ $\vec{a} = b\,\omega^2\,\vec{U}_N = \ell\sin\alpha\,\omega^2\,\vec{U}_N$

2. L'application du PFD : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$

   La projection de cette équation sur la base de Frenet, nous donne :

$$\begin{array}{l} \text{suivant}\vec{U}_T : \\ \text{suivant}\vec{U}_N : \\ \text{suivant}\vec{U}_B : \end{array} \begin{cases} 0+0=0 \\ 0+T\sin\alpha = m\,\ell\,\omega^2\sin\alpha \\ -m\,g + T\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m\,\ell\,\omega^2 \\ T = \dfrac{m\,g}{\cos\alpha} \end{cases}$$

(à condition que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

   Donc : $\cos\alpha = \dfrac{m\,g}{m\,\ell\,\omega^2}$ $\Rightarrow$ l'angle α est : $\alpha = Arccos\left(\dfrac{g}{\ell\,\omega^2}\right)$

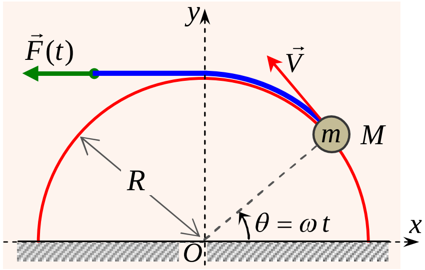
   Et la tension du fil est : $T = m\,\ell\,\omega^2$

   Application Numérique : Pour : $m = 200$ g $= 0{,}2$ Kg, $\ell = 20$ cm $= 0{,}2$ m, $\omega = 10$ rad.s^{-1} et $g = 10$ m·s^{-2}

   - $\alpha = Arccos\left(\dfrac{10}{0{,}2\times 10^2}\right) = Arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60°$
   - $T = 0{,}2\times 0{,}2\times 10^2 = 4$ N

Ex. 4-3

Sous l'effet d'une force $\vec{F}(t)$, une petite particule M, de masse m, est entraînée sans frottement vers le sommet d'un demi-cercle, de centre O et de rayon R, et ça au moyen d'une corde de masse négligeable passant sur le cercle (figure ci-contre).

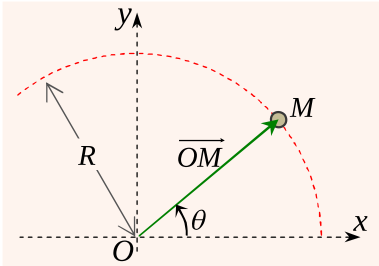


En supposant que M se déplace à une vitesse constante v.

1. Ecrire $\vec{L}_{/O}$, le moment cinétique de la particule M par rapport au point O.
2. Représenter les forces agissant sur M à l'instant t.
3. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer en fonction de v, l'expression de la force de F appliquée à l'extrémité de la corde.
4. En appliquant le PFD, trouver l'expression de la réaction normale N .

Solution

a) Le moment cinétique de M par rapport au point O :



$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

Avec : $\vec{p}$ est la quantité de mouvement de M :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V} \; = m \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

D'après la figure, le vecteur position de M, à l'instant t est : $\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\ \vec{i} + R\sin\theta\ \vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = -R\dot{\theta}\sin\theta\ \vec{i} + R\dot{\theta}\cos\theta\ \vec{j}$$

Avec : la vitesse v égale à $v = R\dot{\theta}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\vec{V} = v(-\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j})$

Donc : $\vec{p} = m\,v\left[-\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}\right]$

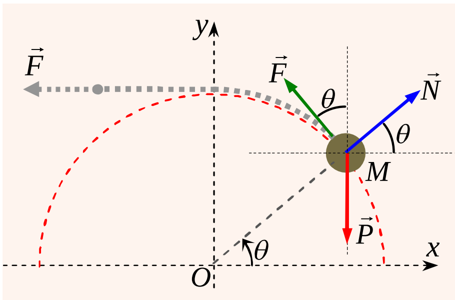
$\Rightarrow$ Le moment cinétique de M par rapport au point O :

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ -m\,v\sin\theta & m\,v\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = m\,v\,R\ \vec{k} \; = \overrightarrow{cte}$$

b) <u>Représentation des forces :</u>

Les forces agissant sur M sont :

- Le poids : $\vec{P}$
- La réaction normale : $\vec{N}$
- La force appliquée à l'extrémité de la corde : $\vec{F}$



Les expressions de ces forces par rapport au repère indiqué sont : $\vec{P} = -m\,g\ \vec{j}$

$$\vec{N} = N\cos\theta\ \vec{i} + N\sin\theta\ \vec{j}$$

$$\vec{F} = -F\sin\theta\ \vec{i} + F\cos\theta\ \vec{j}$$

c) L'application du théorème de moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}_{ext})$

$$= \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{P}) + \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{N}) + \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F})$$

Avec : $\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{cte} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{P}) + \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{N}) + \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$$

Calcul des moments de forces : Nous avons :

- $$\vec{M}_{/O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ 0 & -m\,g & 0 \end{vmatrix} = -m\,g\,R\cos\theta\;\vec{k}$$

- $$\vec{M}_{/O}(\vec{N}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ N\cos\theta & N\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

- $$\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ -F\sin\theta & F\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = F\,R\;\vec{k}$$

Alors : $-m\,g\,R\cos\theta\;\vec{k} + F\,R\;\vec{k} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad F = m\,g\cos\theta$

Avec : $\theta = \dot{\theta}\,t = \dfrac{v}{R}t \quad \Rightarrow$ L'expression de F est : $F = m\,g\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)$

d) L'application du PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\,\vec{a}$

Avec : $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -R\dot{\theta}^2\cos\theta\;\vec{i} - R\dot{\theta}^2\sin\theta\;\vec{j}$ (avec $v = cte \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = cte$)

$$= -\frac{v^2}{R}(\cos\theta\;\vec{i} + \sin\theta\;\vec{j})$$

La projection de l'équation des forces sur l'axe (x) , nous donne :

$$N\cos\theta - F\sin\theta = -m\frac{v^2}{R}\cos\theta \qquad (\text{ avec } F = m\,g\cos\theta\ )$$

$\Rightarrow$ La réaction normale est : $N = m\,g\sin\theta - m\dfrac{v^2}{R}$

$$= m\left(g\sin t\left(\frac{v}{R}t\right) - \frac{v^2}{R}\right)$$

Ex. 4-4

Dans un repère galiléen R $(O, x\ y\ z)$, la position à l'instant t d'un point matériel M , de masse $m = 1$ Kg , est donnée par le vecteur : $\overrightarrow{OM}(t) = t\,(3t-6)\;\vec{i} - t^3\;\vec{j} + (3t+2)\;\vec{k}$

Trouver à l'instant t :

1. La force $\vec{F}(t)$ agissant à l'instant sur le point M .
2. Le moment $\vec{M}_{/O}(\vec{F})$ par rapport à l'origine O.
3. La quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ du corps, et vérifier que $\vec{F}(t) = \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}$.
4. Le moment cinétique $\vec{L}_{/O}$ par rapport à l'origine O, et vérifier que $\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \dfrac{d\vec{L}_{/O}}{dt}$.

Solution

Le vecteur d'un mobile M de masse m, est: $\overrightarrow{OM}(t) = t\,(3t-6)\;\vec{i} - t^3\;\vec{j} + (3t+2)\;\vec{k}$

1. La force $\vec{F}(t)$ agissant sur le point M , à l'instant t est :

D'après le PFD : $\vec{F}(t) = \sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} = m\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$ (avec $m = 1$ Kg)

$\Rightarrow \quad \vec{F}(t) = 6\;\vec{i} - 6t\;\vec{j}$

2. Le moment $\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F})$ par rapport à l'origine O :

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \qquad = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (3t^2-6t) & -t^3 & (3t+2) \\ 6 & -6t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (18t^2+12t)\ \vec{i} + (18t+12)\ \vec{j} + (-12t^3+36t^2)\ \vec{k}$$

3. La quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ du corps :

$$\vec{p}(t) = m \cdot \vec{V} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{ avec } m = 1\ \mathrm{Kg})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}(t) = (6t-6)\ \vec{i} - (3t^2)\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$$

Théorème de la quantité de mouvement : $\vec{F}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}$

Nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = 6\ \vec{i} - 6t\ \vec{j} = \vec{F}(t)$

4. Le moment cinétique $\vec{L}_{/O}$ par rapport à l'origine O :

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \qquad = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (3t^2-6t) & -t^3 & (3t+2) \\ (6t-6) & -3t^2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (6t^3+6t^2)\ \vec{i} + (9t^2+12t-12)\ \vec{j} + (-3t^4+12t^3)\ \vec{k}$$

Théorème du moment cinétique : $\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t}$

Nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} = (18t^2+12t)\ \vec{i} + (18t+12)\ \vec{j} + (-12t^3+36t^2)\ \vec{k} \ = \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F})$

Ex. Supp. 4-1

Un chariot A, de masse $m_1 = 10\ \mathrm{Kg}$, roule sur une voie rectiligne horizontale à la vitesse $v_1 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Sur la même voie mais en sens inverse, un autre chariot B se déplace à la vitesse $v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et heurte le chariot A.

Supposant que les deux chariots s'immobilisent après le choc. Calculer la masse m_2 du chariot B.

Réponses

Conservation de la quantité de mouvement : $m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1' + m_2 \cdot \vec{V}_2'$

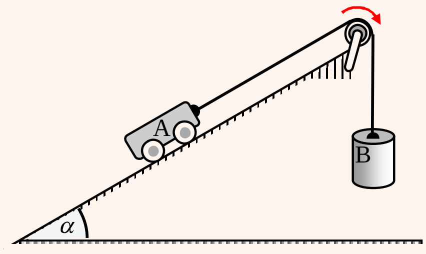
Les chariots s'immobilisent après le choc : $m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0 \qquad \text{(chariot } B \text{ se rouler en sens opposé)}$$

Alors : $m_2 = m_1 \cdot \dfrac{v_1}{v_2} = 25\ \mathrm{Kg}$

Ex. Supp. 4-2

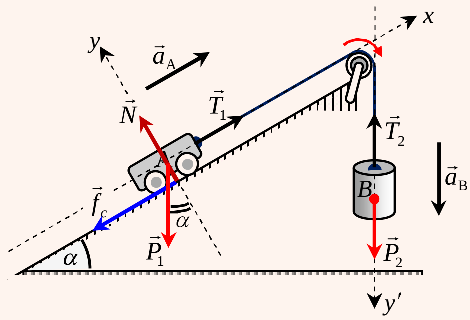
Un chariot A, de masse m_1, se déplace sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le chariot est attaché à un corps B de masse m_2 par un fil inextensible glisse, sans frottement, sur une poulie (figure ci-dessous).



On néglige les masses du fil et de la poulie et on suppose que le chariot A est soumis, au cours de son mouvement sur le plan incliné, à une force de frottement de valeur constante f_c.

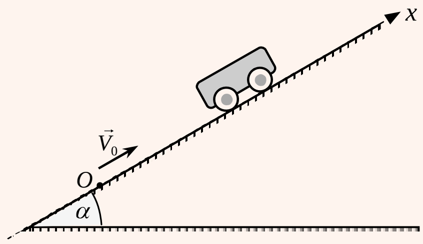
1. *Représenter les forces agissant sur le chariot A et sur le corps B.*
2. *Si μ_c est le coefficient de frottement cinétique du plan incliné, trouver l'expression de l'accélération a du chariot.*

Réponses



2. $$a = \frac{m_2 - m_1\left(\mu_c \cos\alpha + \sin\alpha\right)}{m_1 + m_2}\, g$$

Ex. Supp. 4-3

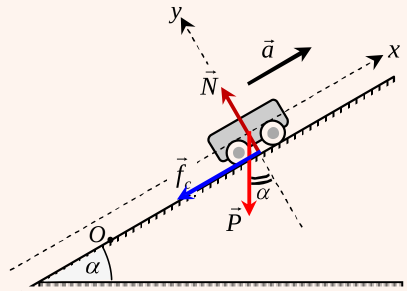


On considère un hémisphère de rayon $R = 1\ \mathrm{m}$ et de centre O, placé sur un plan horizontal.

Une particule de masse m glisse sans frottement sur la surface extérieure de l'hémisphère (figure ci-contre). A l'instant $t = 0$, la particule entame son mouvement sans vitesse initiale à partir de la position M_0 située en haut de l'hémisphère, et à l'instant t sa position quelconque M est définie par l'angle θ (l'angle entre les vecteurs position $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM}$).

1. *Représenter les forces agissant sur le chariot.*
2. *Si le coefficient de frottement cinétique du plan incliné est $\mu_c = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.*
   a) *Déterminer l'accélération a du chariot.*
   b) *Calculer la distance d que parcourra le chariot avant de s'arrêter.*

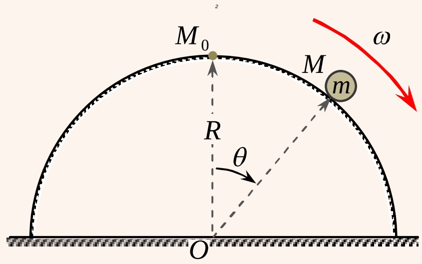
Réponses



2. a) $a = -g\left(\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha\right) = -7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

   b) $$d = \frac{-v_0^2}{2\,a} = \frac{v_0^2}{2\,g\left(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha\right)} = 5\ \mathrm{m}$$

Ex. Supp. 4-4



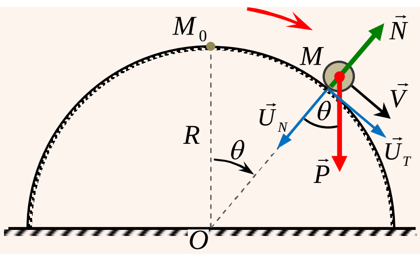
On considère un hémisphère de rayon $R = 1\ \mathrm{m}$ et de centre O, placé sur un plan horizontal. Une particule de masse m glisse sans frottement sur la surface extérieure de l'hémisphère (figure ci-contre).

A l'instant $t = 0$, la particule entame son mouvement sans vitesse initiale à partir de la position M_0 située en haut de l'hémisphère, et à l'instant t sa position quelconque M est définie par l'angle θ (l'angle entre les vecteurs position $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM}$).

En utilisant le système des coordonnées intrinsèques muni de la base de Frenet $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$:

1. *Trouver en fonction de θ :*
   a) *La vitesse v de la particule, à la position M.*
   b) *L'expression de la réaction normale N, à la position M.*
2. *Déduire l'angle θ' sous lequel la particule quitte la surface de l'hémisphère.*

Réponses



1. a) $g\,sin\,\theta = \dfrac{dv}{dt} \;\Leftrightarrow\; g\,sin\,\theta = \dfrac{d\theta}{dt}\,\dfrac{dv}{d\theta}$

$$\Rightarrow g\,sin\,\theta\;\; d\theta = \frac{v}{R}\,dv$$

Par intégration entre : $M_0\,(\theta=0, v=0)$ *et* $M\,(\theta, v)$

$\Rightarrow$ *la vitesse à la position* M *est :* $v=\sqrt{2\,R\,g\,(1-cos\theta)}$

b) $N == m\,g\,(3\,cos\,\theta - 2)$

2. *la particule quitte la surface de l'hémisphère* $\Leftrightarrow\; \vec{N}_{(\grave{a}\;\;\theta=\theta')} = \vec{0} \;\;\Rightarrow\;\; \theta' = Arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48{,}2°$

CHAPITRE 5 : Travail & Energie

Ex. 5-1

Dans le plan (xOy), un champ vectoriel $\vec{F}(x,y)$ est définie par : $\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\;\vec{i}+3(x-y^2)\;\vec{j}$

1. Démonter que le champ $\vec{F}$ est dérivé d'une fonction scalaire $f(x,y)$.
2. Trouver l'expression de $f(x,y)$, sachant que $f(0,0)=0$.

Solution

Dans le plan (xOy), un champ vectoriel $\vec{F}(x,y)$ est définie par : $\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\;\vec{i}+3(x-y^2)\;\vec{j}$

1. $\vec{F}$ est dérivé d'une fonction scalaire $f(x,y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{Rot}(\vec{F})=\vec{0}$

Avec : $\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left[\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right]\cdot\vec{i} - \left[\dfrac{\partial F_z}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial z}\right]\cdot\vec{j} + \left[\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right]\cdot\vec{k}$

Pour : $\begin{cases} F_x = 3(y-x^2) \\ F_y = 3(x-y^2) \\ F_z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = [0-0]\cdot\vec{i} - [0-0]\cdot\vec{j} + [3-3]\cdot\vec{k} \;=\vec{0}$

$\Rightarrow$ Le champ $\vec{F}(x,y)=3(y-x^2)\cdot\vec{i}+3(x-y^2)\cdot\vec{j}$ est dérivé d'une fonction scalaire $f(x,y)$

.

2. L'expression de $f(x,y)$:

$\vec{F}$ est dérivé de $f(x,y) \;\Leftrightarrow\; \vec{F} = \overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla}(f)$

$$\Rightarrow F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(y-x^2) \;\text{..........Eq(1)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(x-y^2) \;\text{..........Eq(2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \;\text{........................Eq(3)} \end{cases}$$

Etape ① : D'après l'équation (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(y-x^2) \;\Rightarrow\; \partial f = 3(y-x^2)\,\partial x$

Par intégration, on trouve : $\int\partial f = f = \int 3(y-x^2)\,\partial x$

L'intégrale est par rapport à "x", donc : $f = 3y\int \partial x - \int 3x^2\,\partial x$

$= 3yx - x^3 + C_1(y,z)$

Tels que : $C_1(y,z)$ est la constante de l'intégrale par rapport à "x", donc elle est indépendante de "x" mais variable en fonction de "y" et "z".
Alors, pour déterminer la fonction $f(x,y,z)$, on doit chercher l'expression de la fonction $C_1(y,z)$

Etape ② : En remplaçant par l'expression $f = x^3 - 3yx + C_1(y,z)$ dans l'équation (2) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(x - y^2) \Rightarrow 3x + \frac{\partial C_1}{\partial y} = 3x - 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = -3y^2$$

$$\Rightarrow \partial C_1 = -3y^2\,\partial y$$

Par intégration, on trouve : $\int \partial C_1 = C_1 = -\int 3y^2\,\partial y$

L'intégrale est par rapport à "y", donc : $C_1 = -y^3 + C_2(z)$

Tels que : $C_2(z)$ est la constante de l'intégrale par rapport à "y", donc elle est indépendante de "x" et de "y" mais variable en fonction de "z".

Etape ③ : En remplaçant par l'expression $f = -x^3 + 3yx - y^3 + C_2(z)$ dans l'équation (3) :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_2}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow C_2(z) = cte = C$$

Tels que : C est une constante indépendante de "x", de "y" et de "z".

$\Rightarrow$ l'expression de la fonction f est $f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3yx + C$

La constante C peut être déterminée à partir de la condition initiale : $f(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$

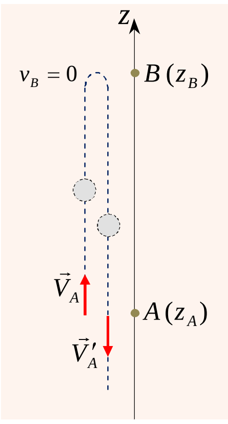
Alors : le champ $\vec{F}(x,y) = 3(y - x^2)\cdot\vec{i} + 3(x - y^2)\cdot\vec{j}$ est dérivé de la fonction scalaire :

$$f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3yx$$

Ex. 5-2

Une masse ponctuelle m est lancée vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale v_A, comme le montre la figure ci-contre.
En supposant que la force de frottement de l'air est verticale et de valeur constante f.
En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$, calculer :

1. La hauteur ($h = \|\overrightarrow{AB}\|$) atteinte par la masse m.
2. La vitesse (v'_A) de la masse m lorsqu'elle repasse par le point de lancement.



<u>*On donne :*</u> $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $m = 200\ \mathrm{g}$, $v_A = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $f = 0{,}5\ \mathrm{N}$

Solution

Une masse ponctuelle m est lancée vers le haut depuis le point A avec une vitesse initiale v_A.
Le mouvement de m se déroule en trois phase :

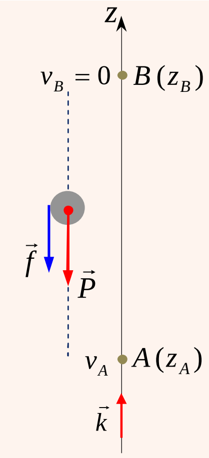
- Mouvement ascendant : dirigé vers le haut (de A vers B)
- Repos momentané : au point B $(v_B = 0)$
- Mouvement descendant : dirigé vers le bas (de B vers A)

1. Au cours du mouvement ascendant (de A vers B) :

   La masse m est soumise aux forces suivantes :

   – Le poids : $\vec{P} = -m\,g\;\vec{k}$

   – La force de frottement de l'air : $\vec{f} = -f\;\vec{k}$



   En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$:

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2} m\,v_B^2 - \frac{1}{2} m\,v_A^2$$

   Avec : $v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_C = -\frac{1}{2} m\,v_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f})$

   – Le travail de $\vec{P}$: $W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{P}\bullet\overrightarrow{AB}$

$$= -m\,g\,(z_B - z_A)$$

   – Le travail de $\vec{f}$: $W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{f}\bullet\overrightarrow{AB}$

$$= -f\,(z_B - z_A)$$

   Avec : $h = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = z_B - z_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} W_{A\to B}(\vec{P}) = -m\,g\,h & \left(W_{A\to B}(\vec{P}) < 0 : \ \vec{P} \textit{ est résistante}\right) \\ W_{A\to B}(\vec{f}) = -f\,h & \left(W_{A\to B}(\vec{f}) < 0 : \ \vec{f} \textit{ est résistante}\right) \end{cases}$

   Donc : $-\frac{1}{2} m\,v_A^2 = -h\,(m\,g + f) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m\,v_A^2}{2\,(m\,g + f)}$

   Application Numérique : Pour : $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $m = 200\ \mathrm{g}$, $v_A = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $f = 0{,}5\ \mathrm{N}$

$$h = \frac{0{,}2\times(100)}{2\times\big((0{,}2\times 10) + 0{,}5\big)} = 4\ \mathrm{m}$$

2. Au cours du mouvement descendant (de B vers A) :

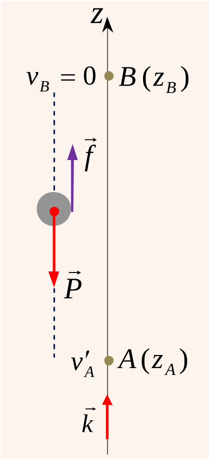
   La masse m est soumise aux forces suivantes :

   – Le poids : $\vec{P} = -m\,g\;\vec{k}$

   – La force de frottement de l'air : $\vec{f} = f\;\vec{k}$

   En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$:

$$\Delta E_C = E'_C(A) - E_C(B) = \frac{1}{2} m\,v_A'^2 - \frac{1}{2} m\,v_B^2$$



   Avec : $v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_C = \frac{1}{2} m\,v_A'^2 = W_{B\to A}(\vec{P}) + W_{B\to A}(\vec{f})$

   – Le travail de $\vec{P}$: $W_{B\to A}(\vec{P}) = \int_B^A \vec{P}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{P}\bullet\overrightarrow{BA}$

$$= -m\,g\,(z_A - z_B)$$

$$= m\,g\,h > 0 \quad \left(\vec{P} \textit{ est motrice}\right)$$

   – Le travail de $\vec{f}$: $W_{B\to A}(\vec{f}) = \int_B^A \vec{f}\bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{f}\bullet\overrightarrow{BA}$

$$= f\,(z_A - z_B)$$

$$= -f\,h < 0 \quad \left(\vec{f} \textit{ est résistante}\right)$$

   Donc : $\frac{1}{2} m\,v_A'^2 = h\,(m\,g - f)$

Avec : $h = \dfrac{m\,v_A^2}{2\,(m\,g + f)} \quad \Rightarrow \quad v_A'^2 = \dfrac{(m\,g - f)}{(m\,g + f)}\, v_A^2$

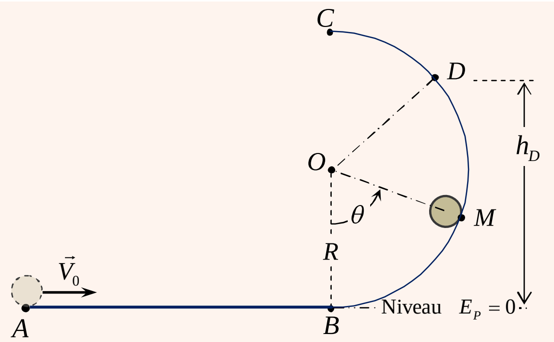
Alors : $v_A' = v_A \sqrt{\dfrac{(m\,g - f)}{(m\,g + f)}}$

Application Numérique : $v_A' = 10 \times \sqrt{\dfrac{((0{,}2 \times 10) - 0{,}5)}{((0{,}2 \times 10) + 0{,}5)}} \approx 7{,}7 \text{ m.s}^{-1}$

Ex. 5-3

Une bille, de masse m, se déplace sans frottement sur une trajectoire ABC formée de deux parties. La partie BC est un demi-cercle de centre O et de rayon R (figure ci-contre).

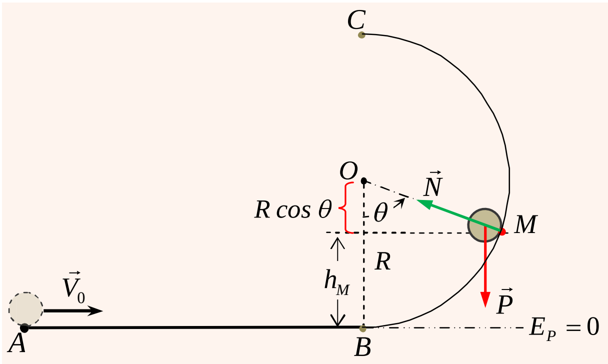
À l'instant $t = 0$, la bille est lancée en A avec une vitesse initiale horizontale de valeur v_0. À l'intérieur du demi-cercle, la position M de la bille est repérée par l'angle θ, qui est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM}$.



1. Représenter en position M, les forces agissant sur la bille.
2. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_T = 0$, déterminer, en fonction de g, v_0, R et θ, la vitesse de la bille à la position M.
3. En utilisant le P.F.D, trouver, en fonction de g, v_0, R et θ, l'expression du module N de la réaction normale appliquée sur la bille en position M.
4. Déterminer, en fonction de g et R, la valeur de v_0 pour laquelle la bille peut quitter la surface du demi-cercle à un point D de hauteur $h_D = \dfrac{5\,R}{3}$.

Solution

1. A la position M, la bille est soumise aux forces suivantes :
   - Le poids : $\vec{P}$
   - La réaction normale : $\vec{N}$



2. En absence de frottement (forces non conservatives sont nulles), on peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$

   Donc, entre la position A et la position M :

   $E_T(M) - E_T(A) = 0 \iff E_T(A) = E_T(M)$

   $\iff E_C(A) + E_P(A) = E_C(M) + E_P(M)$

   <u>A la position A</u> : l'énergie cinétique est : $E_C(A) = \dfrac{1}{2} m\,v_0^2$

   l'énergie potentielle gravitationnelle est : $E_P(A) = m\,g\,h_A = 0$ (puisque : $h_A = 0$) ;

   <u>A la position M</u> : l'énergie cinétique est : $E_C(M) = \dfrac{1}{2} m\,v_M^2$ (avec : $v_M = \left\| \vec{V}_M \right\|$) ;

   l'énergie potentielle gravitationnelle est : $E_P(M) = m\,g\,h_M$

   Avec : $h_M = R\,(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad E_P(M) = m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$

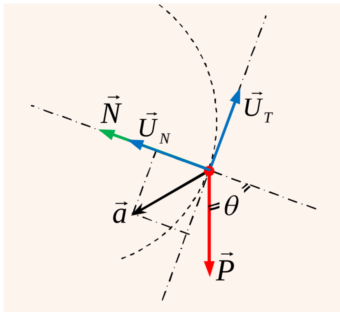
Alors : $\Delta E_T = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, v_M^2 + m\, g\, R\,(1-\cos\theta)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m\, v_M^2 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 - m\, g\, R\,(1-\cos\theta)$$

$\Rightarrow$ la vitesse de la bille à la position M est : $v_M = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, R\,(1-\cos\theta)}$

3. En appliquant le P.F.D, à la position M : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$

La projection sur la base de Frenet $(\vec{U}_T, \vec{U}_N)$, nous donne :



$$\begin{cases} \text{sur } \vec{U}_T & -P\sin\theta = m\, a_T \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{Eq (1)} \\ \text{sur } \vec{U}_N & -P\cos\theta + N = m\, a_N \;\ldots\ldots\ldots\text{Eq (2)} \end{cases}$$

D'après l'équation (2), l'expression du module N est :

$$N = m\, a_N + m\, g\cos\theta$$

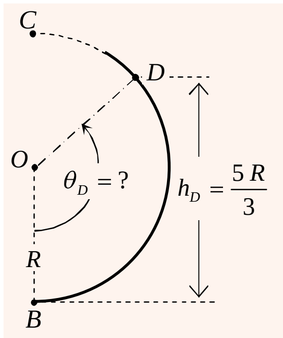
Avec : $a_N = \frac{v_M^2}{R} = \frac{v_0^2 - 2\, g\, R\,(1-\cos\theta)}{R}$

$$= \frac{v_0^2}{R} - 2\, g\,(1-\cos\theta)$$

Donc : $N = \frac{m\, v_0^2}{R} - 2\, m\, g\,(1-\cos\theta) + m\, g\cos\theta$

$$= m\, g\left[\frac{v_0^2}{g\, R} - 2 + 3\cos\theta\right]$$

4. La bille quitte la surface du demi-cercle $\Leftrightarrow$ la réaction normale $\vec{N}$ est nulle : $N = 0$



Donc, au point D :

$$m\, g\left[\frac{v_0^2}{g\, R} - 2 + 3\cos\theta_D\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 = g\, R\,(2 - 3\cos\theta_D)$$

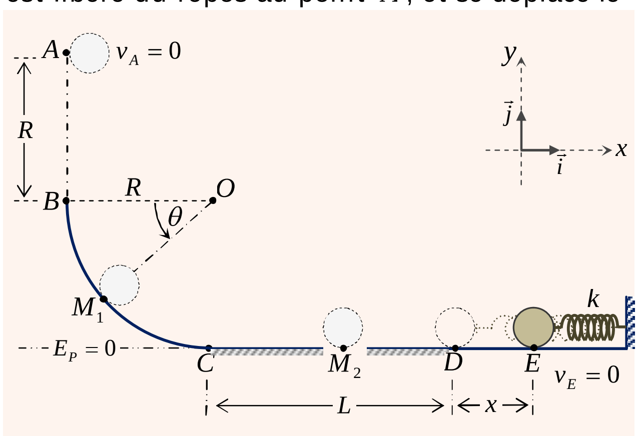
Avec : $\cos\theta_D = \frac{R - h_D}{R} = 1 - \frac{h_D}{R}$ (d'après le résultat : $h_M = R\,(1-\cos\theta_M)$)

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = g\, R\left(-1 + 3\frac{h_D}{R}\right)$$

Pour : $h_D = \frac{5\, R}{3} \;\Rightarrow$ la vitesse initiale v_0 doit être : $v_0 = 2\sqrt{g\, R}$

Ex. 5-4

A l'instant $t = 0$, un corps ponctuel, de masse m, est libéré du repos au point A, et se déplace le long du chemin $ABCDE$ (figure ci-contre).



1. Entre les positions A et B, le corps est en chute libre, puis se déplace sans frottement le long d'un quart de cercle BC de rayon R.
   a) En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique, déterminer, en fonction de g, R et θ, la vitesse du corps à la position M_1.
   b) Déduire la vitesse (v_C) du corps au point C.

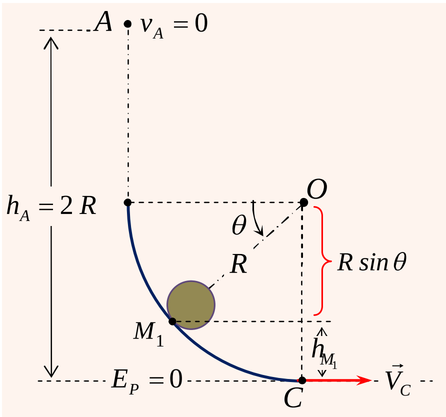
2. Sur la piste horizontale CD, de longueur $L=\frac{3}{2}R$, le corps est soumis à une force de frottement ($\vec{f}_c$) qui fait diminuer progressivement sa vitesse jusqu'à $v_D=\frac{v_C}{2}$ au point D.
   a) Représenter en position M_2, les forces agissant sur le corps.
   b) En utilisant le P.F.D, trouver l'expression de f_c en fonction du coefficient de frottement cinétique (μ_c) de la piste CD.
   c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de μ_c.
3. En fin de la piste CD (au point D), le corps percute un ressort horizontal libre de raideur k et le comprime d'une contraction $x=\frac{R}{4}$.
   a) Représenter en position E, les forces agissant sur le corps.
   b) Si le corps arrive au point E avec une vitesse nulle ($v_E=0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$), déterminer en fonction de m et g, la constante de raideur k du ressort.

Solution

1. Mouvement du corps sur la partie du chemin *ABC* :

a) En absence de frottement, on peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T=0$:

Alors, entre la position A et la position M_1 : $E_T(M)-E_T(A)=0 \;\Leftrightarrow\; E_T(A)=E_T(M_1)$



Avec , $E_T(A)=E_C(A)+E_P(A)=\frac{1}{2}m\,v_A^2+m\,g\,h_A$

$$=0+m\,g\,(2R)=2\,m\,g\,R$$

Et : $E_T(M_1)=E_C(M_1)+E_P(M_1)=\frac{1}{2}m\,v_{M_1}^2+m\,g\,h_{M_1}$

$$=\frac{1}{2}m\,v_{M_1}^2+m\,g\,R\,(1-\sin\theta)$$

Donc : $\Delta E_T=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}m\,v_{M_1}^2=2\,m\,g\,R-m\,g\,R\,(1-\sin\theta)$

$$=m\,g\,R\,(1+\sin\theta)$$

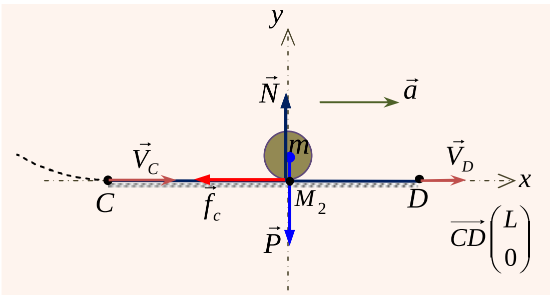
$$\Rightarrow v_{M_1}=\sqrt{2\,g\,R\,(1+\sin\theta)}$$

b) La vitesse du corps au point C : $v_C=v_{M_1}(\text{à } \theta=\frac{\pi}{2}) \;\Rightarrow\; v_C=2\sqrt{g\,R}$

2. Mouvement du corps sur la piste horizontale *CD* :

a) Entre la position C et la position D :

Le corps est soumis aux forces suivantes :



- Le poids $\vec{P}$
- La normale de la réaction $\vec{N}$
- La force de frottement $\vec{f}_c$

Selon le repère choisi, les forces s'écrivent :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix} \;;\; \vec{N}\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix} \;;\; \vec{f}_c\begin{pmatrix}-f_c\\0\end{pmatrix}$$

b) En appliquant le P.F.D, à la position M_2 : $\sum\vec{F}_{ext}=m\cdot\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{P}+\vec{N}+\vec{f}_c=m\cdot\vec{a}$

La projection sur le repère choisi, nous donne :

$$\begin{cases} \text{sur l'axe}(x) & -f_c = m\,a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Eq (1)} \\ \text{sur l'axe}(y) & -P + N = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Eq (2)} \end{cases}$$

D'après l'équation (2) : $N = P = m\,g$

Alors, la force de frottement est : $f_c = \mu_c\, N = \mu_c\, m\, g$

c) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

Entre C et D : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow E_C(D) - E_C(C) = W_{C\to D}(\vec{P}) + W_{C\to D}(\vec{N}) + W_{C\to D}(\vec{f}_c)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\, v_D^2 - \frac{1}{2} m\, v_C^2 = W_{C\to D}(\vec{P}) + W_{C\to D}(\vec{N}) + W_{C\to D}(\vec{f}_c)$$

– Le travail de $\vec{P}$: $W_{C\to D}(\vec{P}) = \int_C^D \vec{P} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{P} \bullet \overrightarrow{CD}$

$= 0$ ($\vec{P}$ *est perpendiculaire au déplacement* $\overrightarrow{CD}$)

– Le travail de $\vec{N}$: $W_{C\to D}(\vec{N}) = \int_C^D \vec{N} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{N} \bullet \overrightarrow{CD}$

$= 0$ ($\vec{N}$ *est perpendiculaire au déplacement* $\overrightarrow{CD}$)

– Le travail de $\vec{f}_c$: $W_{C\to D}(\vec{f}_c) = \int_C^D \vec{f}_c \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \vec{f}_c \bullet \overrightarrow{CD}$

$= -f_c\, L$ (*avec* $L = \frac{3}{2} R$)

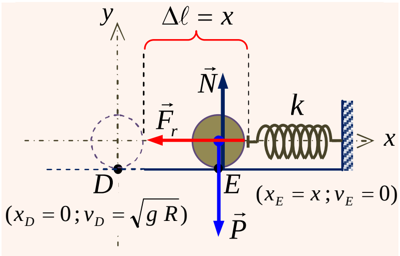
$= -\frac{3}{2} \mu_c\, m\, g\, R$

Alors : $\frac{1}{2} m\, v_D^2 - \frac{1}{2} m\, v_C^2 = -\frac{3}{2} \mu_c\, m\, g\, R$ (*avec* $v_C = 2\sqrt{g\,R}$ *et* $v_D = \frac{v_C}{2} = \sqrt{g\,R}$)

Donc, le coefficient de frottement cinétique de la piste CD est : $\mu_c = \frac{-3\,m\,g\,R}{-3\,m\,g\,R} = 1$

3. Mouvement du système corps + ressort entre les positions *D* et *E* :

a) En position E , le corps est soumis aux forces suivantes :



– Le poids $\vec{P}$
– La normale de la réaction $\vec{N}$
– La force de rappel du ressort $\vec{F}_r$

Selon le repère choisi, les forces s'écrivent :

$$\vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \;;\; \vec{N}\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \;;\; \vec{F}_r\begin{pmatrix} -k\,\Delta\ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

Entre D et E : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow E_C(E) - E_C(D) = W_{D\to E}(\vec{P}) + W_{D\to E}(\vec{N}) + W_{D\to E}(\vec{F}_r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\, v_E^2 - \frac{1}{2} m\, v_D^2 = W_{D\to E}(\vec{P}) + W_{D\to E}(\vec{N}) + W_{D\to E}(\vec{F}_r)$$

– Les travaux de $\vec{P}$ et de $\vec{N}$ sont nuls : $W_{D\to E}(\vec{P}) = 0$ et $W_{D\to E}(\vec{N}) = 0$

($\vec{P}$ *et* $\vec{N}$ *sont perpendiculaires au déplacement* $\overrightarrow{DE}$)

– Le travail de $\vec{F}_r$: $W_{D\to E}(\vec{F}_r) = \int_D^E \vec{F}_{rc} \bullet \overrightarrow{dl}$

Le déplacement élémentaire du trajet de D à E est : $\overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad W_{D\to E}(\vec{F}_r) = \int_{x_D=0}^{x_E=x} -k\,x\ \mathrm{d}x \ = -\frac{1}{2}k\,x^2$$

Alors : $\frac{1}{2}m v_E^2 - \frac{1}{2}m v_D^2 = -\frac{1}{2}k\,x^2 \quad \left(\text{ avec } v_E = 0 \right) \Rightarrow \frac{1}{2}m(g\,R) = \frac{1}{2}k\,x^2$

Donc, la constante de raideur du ressort est : $k = \dfrac{m\,g\,R}{x^2}$

Pour une contraction finale du ressort : $x = \dfrac{R}{4}$

$\Rightarrow$ la constante de raideur, en fonction de m et g, est : $k = 16\dfrac{m\,g}{R}$

Ex. Supp. 5-1

Une particule est soumise à une force $\vec{F}$ définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+2\,y+a\,z)\ \vec{i} + (b\,x-3\,y-z)\ \vec{j} + (4\,x+c\,y+2\,z)\ \vec{k} \qquad (a,\ b \text{ et } c \text{ sont des constantes})$$

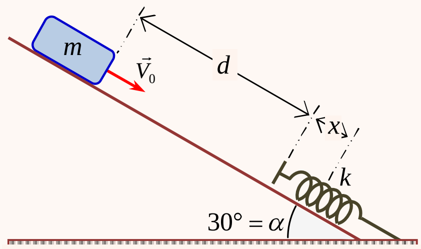
1. *Trouver les valeurs de a, b et c pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_P(x,y,z)$.*
2. *Trouver l'expression du potentiel $E_P(x,y,z)$, sachant que $E_P(0,0,0)=0$.*

Réponses

1. $\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = (x+2\,y+4\,z)\ \vec{i} + (2\,x-3\,y-z)\ \vec{j} + (4\,x-y+2\,z)\ \vec{k}$

2. $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,(E_P) \Rightarrow E_P(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2\,xy - 4\,xz + yz$

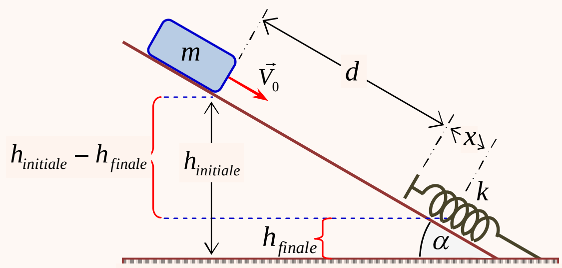
Ex. Supp. 5-2



Un ressort de constante de raideur $k = 1000\ \mathrm{N.m^{-1}}$, est solidement fixé en bas d'un plan lisse incliné d'un angle α. Sur ce même plan et à une distance $d = 1\ \mathrm{m}$ de l'extrémité libre du ressort, un bloc de masse $m = 1\ \mathrm{Kg}$ commence à glisser vers le bas avec une vitesse initiale $v_0 = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ en direction du ressort (figure ci contre).

En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_T = 0$, calculer la contraction maximale (x) du ressort lorsque le bloc s'arrête momentanément. On prend : $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Réponses



$\Delta E_T = E_{T\,(psoition\ \ finale)} - E_{T\,(psoition\ \ initiale)} = 0$

$\Rightarrow E_C(initiale) + E_P(initiale) = E_C(finale) + E_P(finale)$

$\Leftrightarrow E_C(initiale) - E_C(finale) = E_P(finale) - E_P(initiale)$

$$\begin{cases} E_C(initiale) = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ E_P(initiale) = m\,g\,h_{initiale} \\ E_C(finale) = 0 \\ E_P(finale) = m\,g\,h_{finale} + \frac{1}{2} k\,x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = -m\,g\,(h_{initiale} - h_{finale}) + \frac{1}{2} k\,x^2$$

Avec : $h_{initiale} - h_{finale} = (d+x)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} k\,x^2 - m\,g\,(d+x)\sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad k\,x^2 - (2\,m\,g\,\sin\alpha)\,x - ((2\,m\,g\,\sin\alpha)\,d + m\,v_0^2) = 0 \quad ....\text{Eq (1)}$$

Pour : $\alpha = 30°$, $m = 1\ \text{Kg}$, $k = 1000\ \text{N.m}^{-1}$, $d = 1\ \text{m}$, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$ *et* $v_0 = 1\ \text{m.s}^{-1}$ *:*

Nous avons : Eq (1) $\Leftrightarrow \quad 1000\,x^2 - 10x - 11 = 0 \quad ....$Eq (2)

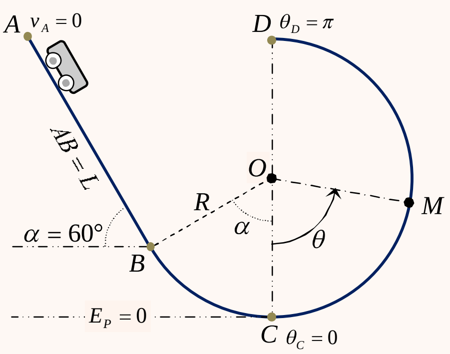
L'équation (2) *admet deux solutions :*
$$\begin{cases} x_1 = \frac{10-210}{2000} = -0{,}1 < 0 & (\textit{valeur refusée}) \\ x_2 = \frac{10+210}{2000} = 0{,}11 > 0 & (\textit{valeur acceptée}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *La contraction maximale du ressort est :* $x = 11\ \text{cm}$

Ex. Supp. 5-3

On considère un chariot (ponctuel), de masse $m = 1\ \text{Kg}$ *, se déplace sans frottement sur un rail* $ABCD$ *situé dans le plan vertical (figure ci-contre). Le rail est constitué de trois parties :*

- *Une partie rectiligne* AB *de longueur* L *et d'un angle d'inclinaison* $\alpha = 60°$ *;*
- *Une portion de cercle* BC *de rayon* $R = \frac{L}{\sqrt{3}}$ *et de centre* O *;*
- *Un demi cercle* CD *de rayon* R *et de centre* O *(les points* C *et* D *sont situés sur la même ligne verticale).*



A l'instant $t = 0$*, on lâche le chariot sans vitesse initiale à partir du point* A*, et on étudie son mouvement dans le référentiel terrestre (supposé galiléen).*

1. *En utilisant le théorème de l'énergie cinétique* $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$*. Donner, en fonction de* g *et* R*, l'expression de la vitesse* (v_B) *du chariot au point* B*.*
2. *En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique* $\Delta E_T = 0$ *:*
   a) *Déterminer, en fonction de* g *,* R *et* θ *, la vitesse* (v_M) *du chariot à son passage en point* M *repéré par l'angle* θ *.*
   b) *Calculer la vitesse* (v_D) *du chariot lorsqu'il arrive au point* D $(\theta_D = \pi)$ *.*
   c) *Quel est le mouvement du chariot au delà du point* D *?*

Réponses

1. $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W(\vec{F}_{ext}) \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{3\,g \cdot R}$
2. a) $\Delta E_T = E_T(M) - E_T(A) = 0 \Rightarrow v_M = \sqrt{2 \cdot g \cdot R\,(1 + cos(\theta))}$

   b) $v_D = 0$

   c) *Chute libre suivant la verticale* CD