République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf – M'sila

Faculté Des Sciences

Socle commun sciences de la matière (SM)

1ère année LMD – Semestre (1) –

Polycopié de cours :

Physique 1

Mécanique du Point Matériel

Préparé par : Dr. KHALFALLAH Fares

Année universitaire 2022/2023

Sommaire

1

Rappel Mathématique

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Savoir les grandeurs physiques et leurs unités.
- Apprendre à utiliser l'analyse dimensionnelle et le calcul d'erreur.
- Comprendre la notion de vecteur et ses propriétés.
- Assimiler les notions du produit scalaire et vectoriel.
- Apprendre à utiliser les différents systèmes de coordonnées

I.1- Analyse dimensionnelle

I.1-1. Grandeurs physiques

Une grandeur physique "G" est toute caractéristique d'un objet que l'on peut mesurer ou calculer.

1- Grandeurs fondamentales (ou de base)

- La longueur
- La masse
- Le temps
- L'intensité du courant électrique
- La température thermodynamique
- La quantité de matière
- L'intensité lumineuse

2- Grandeurs dérivées

Les autres grandeurs physiques sont des dérivées de grandeurs fondamentales.

I.1-2. Dimensions et unités de mesure

a. Définitions

- La nature physique d'une grandeur G est caractérisée par sa dimension $[G]$.
- L'unité de mesure d'une grandeur physique est l'expression de sa dimension.

b. Système international d'unités (SI)

Grandeur de base	Dimension	Unités de base du SI	
		Nom	Symbole
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	Kg
Temps	T	seconde	s
Intensité du courant électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	Cd

Remarques :

1- *Seules des grandeurs physiques de mêmes dimensions peuvent être additionnées ou soustraites les unes des autres.*

2- *Avant l'adoption du SI d'unités, d'autres systèmes d'unités ont été utilisés, par exemple :*

- *Le système d'unités CGS (centimètre ($1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}$ m) ; gramme ($1\mathrm{g} = 10^{-3}$ Kg) ; seconde) .*
- *Le système MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère).*

3- *On peut associer aux sept unités de bases les deux unités d'angle suivantes :*

	Définition	Symbole	Dimension
radian	unité d'angle plan	rad	Sans dimension
stéradian	unité d'angle solide	sr	Sans dimension

4- *Il existe d'autres unités de temps en usage avec le SI, qu'on utilise de façon courante, comme :*

	Symbole	Valeur
minute	min	$1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$
heure	h	$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$

c. Equation aux dimensions

En générale, la dimension de toute grandeur physique (fondamentale ou dérivée) G peut être exprimée par une combinaison des sept dimensions de base. Cette combinaison est appelée équation aux dimensions et formulée comme suivant : $[G]=M^a \cdot L^b \cdot T^c \cdot I^d \cdot \Theta^e \cdot N^f \cdot J^h$

Où : a, b, c, d, e, f et h sont des nombres réels.

Le tableau ci-dessous montre les dimensions de quelques grandeurs drivées avec leurs unités dérivées du SI

Grandeur dérivée	Dimension	Unité		
		Nom	Symbole	Expression
Surface (aire)	L^2		m^2	m^2
Volume	L^3		m^3	m^3
Masse volumique	$M \cdot L^{-3}$		Kg/m^3	$Kg \cdot m^{-3}$
Vitesse	$L \cdot T^{-1}$		m/s	$m \cdot s^{-1}$
Vitesse angulaire	T^{-1}		rad/s	$rad \cdot s^{-1}$
Fréquence	T^{-1}	Hertz	Hz	s^{-1}
Accélération	$L \cdot T^{-2}$		m/s^2	$m \cdot s^{-2}$
Quantité de mouvement	$M \cdot L \cdot T^{-1}$		$Kg \cdot m/s$	$Kg \cdot m \cdot s^{-1}$
Moment d'inertie	$M \cdot L^2$		$Kg \cdot m^2$	$Kg \cdot m^2$
Moment cinétique	$M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$		$Kg \cdot m^2/s$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
Force	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	Newton	N	$Kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Moment de force	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$		$N \cdot m$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Energie ou travail	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	Joule	$J \equiv N \cdot m$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Puissance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$	Watt	$W \equiv J/s$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Pression	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	Pascal	$Pa \equiv N/m^2$	$Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Viscosité dynamique d'un fluide	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$		$Pa \cdot s$	$Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
Viscosité cinématique d'un fluide	$L^2 \cdot T^{-1}$		m^2/s	$m^2 \cdot s^{-1}$
Raideur d'un ressort (constante d'élasticité)	$M \cdot L \cdot T^{-2}$		N/m	$Kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Charge électrique	$T \cdot I$	Coulomb	C	$s \cdot A$
Potentiel électrique (tension)	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$	Volt	$V \equiv W/A$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Capacité électrique	$M^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^4 \cdot I^2$	Farad	$F \equiv C/V$	$Kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$
Résistance électrique	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$	Ohm	$\Omega \equiv V/A$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Température Celsius	Θ	Degré Celsius	$°C$	K

d. Homogénéité d'une formule (ou une loi physique)

Une formule : $F = H$ est dite homogène si les deux membres F et H ont les mêmes dimensions.

Remarque : Il ne suffit pas qu'une formule soit homogène pour qu'elle soit juste.

Application

Vérifier que l'expression : $\pi \cdot \mu \cdot r \cdot v$, est bien homogène à une force.

Avec : μ : une viscosité dynamique ; r : un rayon ; v : une vitesse.

Corrigé : *Nous avons :* $[\pi \cdot \mu \cdot r \cdot v] = [\pi] \times [\mu] \times [r] \times [v]$

$$= 1 \times (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}) \times (L) \times (L \cdot T^{-1})$$

$$= M \cdot L \cdot T^{-2} \quad = [\text{force}]$$

I.2- Fonctions à plusieurs variables $f(x,y,z)$

I.2-1. Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables

C'est la dérivée simple d'une fonction $f(x,y,z)$ par rapport à une seule de ses variables, et toutes les autres étant supposées constantes :

$$\Rightarrow\ f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\ f(x,y,z)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{y=cte,z=cte}\ ,\quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\ f(x,y,z)}{\mathrm{d}y}\bigg|_{x=cte,z=cte}\quad \text{et}\quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\ f(x,y,z)}{\mathrm{d}z}\bigg|_{x=cte,y=cte}$$

I.2-2. Différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables

La différentielle totale de la fonction $f(x,y,z)$ est une combinaison linéaire des dérivées partielles de f :

$$f(x,y,z)\ \rightarrow\ \mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot \mathrm{d}z = f'_x\cdot \mathrm{d}x + f'_y\cdot \mathrm{d}y + f'_z\cdot \mathrm{d}z$$

Application

Calculer les dérivées partielles et la différentielle totale de la fonction :

$$f(x,y,z) = x\cdot y + y\cdot z - z\cdot x$$

Corrigé : *Les dérivées partielles de f sont :*

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y - z\quad ;\quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\quad \text{et}\quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = y - x$$

$\Rightarrow$ *La différentielle totale f est :* $\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot \mathrm{d}z$

$$= (y-z)\cdot \mathrm{d}x + (x+z)\cdot \mathrm{d}y + (y-x)\cdot \mathrm{d}z$$

I.3- Mesures et calcul d'erreurs

I.3-1. Mesures physiques

La mesure physique est la détermination de la valeur d'une grandeur en la comparant à une grandeur constante de même espèce prise comme étalon (ou unité).

Il ya deux types de mesures physiques :

1- Mesure directe : elle s'effectue directement par la lecture ou l'observation, à l'aide d'un instrument de mesure.

Exemple

La masure de la longueur, de la masse, du temps, ...etc.

2- Mesure indirecte : Dans ce type, la grandeur à mesurer est exprimée mathématiquement en fonction d'autres grandeurs directement mesurées.

Exemple

La masure de la surface, du volume, de la densité, ...etc.

1.3-2. Calcul d'Erreurs

L'erreur est la différence entre la valeur réelle (ou vraie) x_r et la valeur mesurée x_m de la grandeur à mesurer : $e = x_r - x_m$

<u>Remarque :</u> L'erreur e peut-être négative ou positive, sa valeur absolue est dite l'erreur absolue :

$$\delta x = |e| = |x_r - x_m|$$

a. <u>L'incertitude absolue</u>

L'incertitude absolue est l'erreur maximale que l'on est susceptible de commettre dans la mesure : $\Delta x = \max(\delta x)$

Le résultat de la mesure (ou la valeur de la grandeur à mesurer) s'écrit :

$$X = x_r \pm \Delta x$$

Et cela signifie que : $x_r - \Delta x \le X \le x_r + \Delta x$

<u>Remarques :</u>

1- *L'incertitude absolue s'exprime dans la même unité que la grandeur mesurée.*

2- *Si la valeur X d'une grandeur dépend des valeurs a, b, c, ...,d'autres grandeurs :*

$X = f(a,b,c,..)$ (la mesure de X est indirecte)

Où : $f(a,b,c,..)$ est une fonction à plusieurs variables

Donc l'incertitude absolue Δx sera donnée par la relation :

$$\Delta X = \left|\frac{\partial X}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial X}{\partial b}\right| \cdot \Delta b + \left|\frac{\partial X}{\partial c}\right| \cdot \Delta c + ...$$

Avec : Δa, Δb, Δc, ... sont les incertitudes des mesures de a, b, c, ...

$\frac{\partial X}{\partial a}$, $\frac{\partial X}{\partial b}$, $\frac{\partial X}{\partial c}$ *sont les dérivées partielles de la fonction $X = f(a,b,c,..)$*

b. <u>L'incertitude relative (</u>

L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur réelle : $\varepsilon = \frac{\delta x}{x_r}$.

L'incertitude relative indique la précision du résultat obtenu, et il s'exprime généralement en pour cent (%).

Application

Un étudiant veut déterminer la masse volumique ρ d'une bille sphérique en acier, pour cela : Il mesure le diamètre et il trouve $d = 6$ cm à $0{,}2$ mm prés (c'est-à-dire $\Delta d = 0{,}2\ \text{mm} = 2\times10^{-4}\ \text{m}$). Ensuite, il mesure la masse de la bille et il trouve $m = 885$ g à $0{,}1$ g prés (c'est-à-dire $\Delta m = 0{,}1\ \text{g} = 10^{-4}\ \text{Kg}$).

Calculer la valeur de ρ et déterminer l'incertitude correspondante.

Corrigé : *Nous avons :* $\rho = \dfrac{m}{V}$;

Où : V *est le volume de la bille sphérique, c'est-à-dire :* $V = \dfrac{\pi}{6} \cdot d^3$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{d^3} = \frac{6}{3{,}14} \times \frac{0{,}885}{(0{,}06)^3} = 7829{,}1 \ \mathrm{Kg \cdot m^{-3}}$$

L'incertitude absolue : $\Delta\rho = \left|\dfrac{\partial \rho}{\partial m}\right| \cdot \Delta m + \left|\dfrac{\partial \rho}{\partial d}\right| \cdot \Delta d$;

$$\text{Avec : } \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial m} = \dfrac{6}{\pi \cdot d^3} \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial d} = \dfrac{-18 \cdot m}{\pi \cdot d^4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho = \left|\frac{6}{\pi \cdot d^3}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{-18 \cdot m}{\pi \cdot d^4}\right| \cdot \Delta d$$

$$\text{Alors : } \quad \Delta\rho = \frac{6 \cdot \Delta m}{\pi \cdot d^3} + \frac{18 \cdot m \cdot \Delta d}{\pi \cdot d^4} = \frac{6 \cdot m}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 3 \cdot \frac{\Delta d}{d}\right)$$

$$= \rho \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 3 \cdot \frac{\Delta d}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\rho = 7829{,}1 \times \left(\frac{10^{-4}}{0{,}885} + \left(3 \times \frac{2 \times 10^{-4}}{0{,}06}\right)\right) = 79{,}2 \ \mathrm{Kg \cdot m^{-3}}$$

Donc, la masse volumique de la bille s'écrit : $\rho = 7829{,}1 \pm 79{,}2 \ \ \mathrm{Kg \cdot m^{-3}}$

I.4- Calcul vectoriel

Le calcul vectoriel est un outil mathématique, très utilisé en physique. En fait, Il existe en physique deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

1.4-1. Définitions

a. <u>Grandeur scalaire</u>

C'est une grandeur physique décrite par un nombre (scalaire) et une unité.

Exemple

le volume, la masse, la température, la longueur, le temps, ...etc.

b. <u>Grandeur vectorielle</u>

C'est toute grandeur dont la détermination nécessite un sens, une direction, un point d'application et une valeur (ou intensité).

Exemple

le déplacement, la vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique,... etc.

c. <u>Coordonnées d'un point</u>

Dans l'espace, un point A est défini par des nombres (ou scalaires) a_1 , a_2 , a_3 , .. a_n , appelés les coordonnées de A , et il s'écrit : $A(a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n)$.

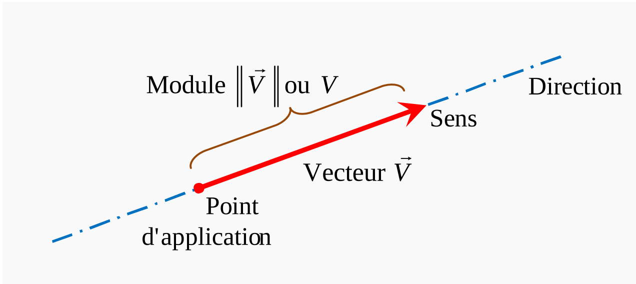
1.4-2. Vecteurs

a. Définition

Un vecteur (nommé par exemple $\vec{V}$) est une grandeur définie par :

- *Une direction* : c'est la droite qui porte le vecteur.
- *Un sens* : représente l'orientation du vecteur (symbolisé par une flèche $\rightarrow$)
- *Un module* $\|\vec{V}\|$ (ou simplement V) : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur $\vec{V}$.

  Graphiquement, le module correspond à la longueur du vecteur.
- *Un point d'application* : c'est le point qui sert d'origine à la représentation du vecteur.



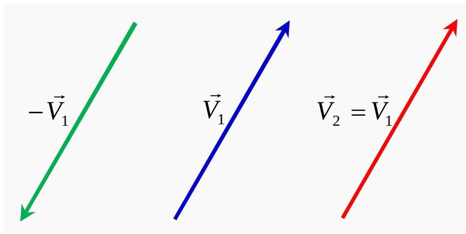
Remarques :

1- *Le module d'un vecteur* (*appelée également la norme ou l'intensité*) *est un scalaire toujours positif* $\|\vec{V}\| \geq 0$.

2- Un vecteur est dit unitaire si son module égal à 1 (ou unité).

3- *Deux vecteurs* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *sont égaux* $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ *, s'ils ont le même module et le même ses.*

4- L'opposé d'un vecteur $\vec{V}$ noté $-\vec{V}$ est un vecteur ayant le même module et la même direction, mais avec un sens opposé.



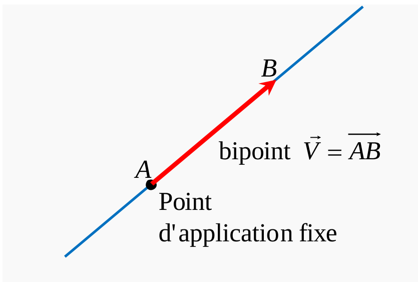
b. Types des vecteurs

1- *Vecteur lié*

Un vecteur $\vec{V}$ est dit lié (ou bipoint), si son point d'application est fixe.

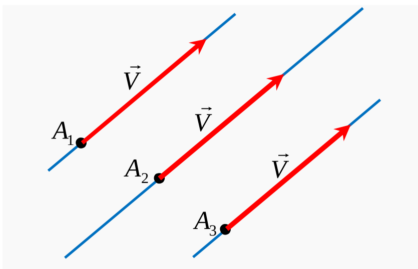
Un vecteur lié est un couple ordonné de 2 points -par exemple- A et B : $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

Où : A est le point d'application du vecteur $\vec{V}$.



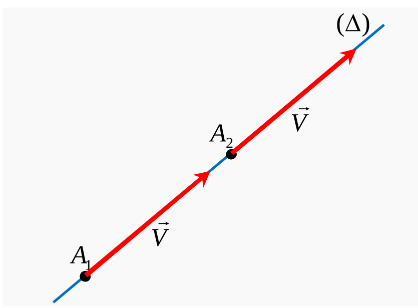
2- *Vecteur libre*

Un vecteur $\vec{V}$ est dit libre, si son point d'application peut être transféré à n'importe quel point de l'espace.



3- Vecteur glissant

Un vecteur $\vec{V}$ est dit glissant, si son point d'application peut se déplacer le long d'une ligne d'action (la direction (Δ)).



I.4-3. Système de coordonnées cartésiennes

a. Repère cartésien

Dans un espace tridimensionnel, le repère cartésien se compose d'une origine (point O) et des axes orientés et orthogonaux (perpendiculaires entre eux) passant par cet origine.

- *Axe des abscisses* (noté Ox) ;
- *Axe des ordonnées* (noté Oy) ;
- *Axe des cotes* (noté Oz) ;

b. Base cartésienne orthonormée

Dans un espace tridimensionnel, le repère cartésien est muni d'une base vectorielle orthonormée constituée de trois vecteurs unitaires et orthogonaux deux à deux notés comme suivant :

- $\vec{i}$: porté par l'axe Ox et orienté selon son orientation.
- $\vec{j}$: porté par l'axe Oy et orienté selon son orientation.
- $\vec{k}$: porté par l'axe Oz et orienté selon son orientation.

c. Coordonnées cartésiennes d'un point

Dans un repère cartésien, chaque point est défini par ses coordonnées cartésiennes suivantes :

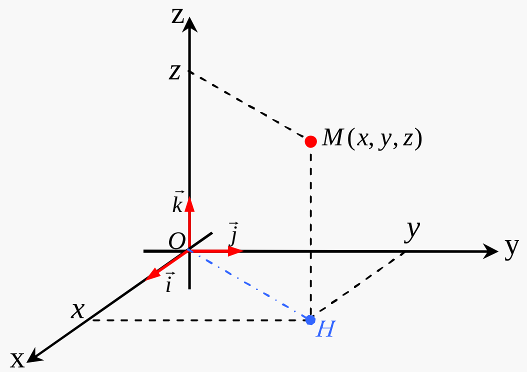
- *Abscisse* (notée x) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Ox ;
- *Ordonnée* (notée y) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Oy ;
- *cote* (notée z) : c'est la coordonnées du point suivant l'axe Oz ;

Représentation graphique d'un point

Dans un repère cartésien, un point $M(x, y, z)$ est représenté comme dans la figure ci-contre .

Les coordonnées de l'origine O sont $(0, 0, 0)$.

Le point $H(x, y, 0)$ est la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy) .



d. Composantes cartésiennes d'un vecteur

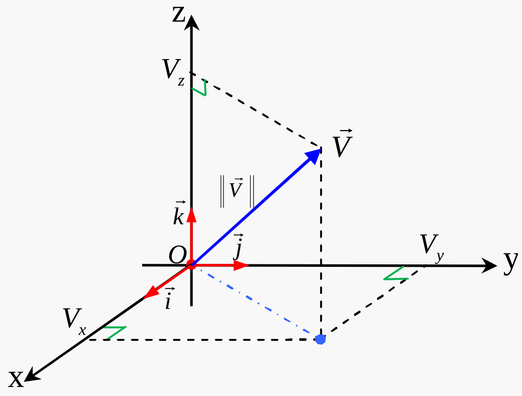
Dans une repère cartésien, tout vecteur $\vec{V}$ est défini par ses composantes cartésiennes, par exemple V_x , V_y et V_z , et il s'écrit sous la forme colonne : $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

Représentation graphique d'un vecteur

Dans un repère cartésien, un vecteur :

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

est représenté comme dans la figure ci-contre .



<u>*Remarques :*</u>

1- *En plus de ses cordonnées, un point* $M(x, y, z)$ *peut être défini par le vecteur position :*

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (O \text{ est l'origine du repère})$$

2- *Un vecteur est dit nul* ($\vec{V} = \vec{0}$) *si ses composantes sont nulles* ($V_x = V_y = V_z = 0$).

3- *Dans la base cartésienne* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le vecteur* $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ *s'écrit :* $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$

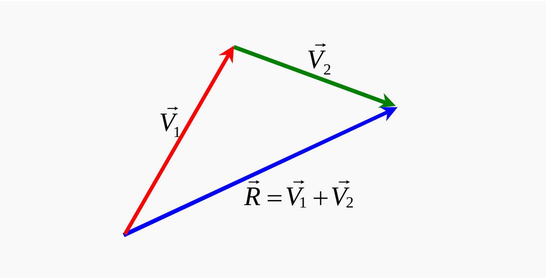
4- *L'expression du module de* $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ *est :* $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

I.4-5. Opération sur les vecteurs

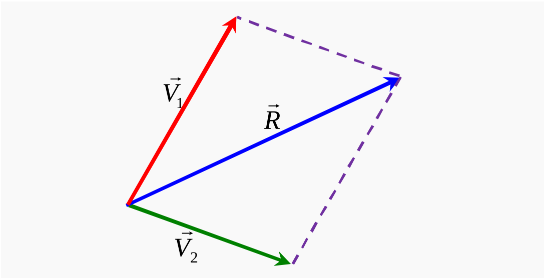
a. <u>Addition vectorielle</u>

Le résultat de la somme de deux vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur appelé la résultante. $\vec{R}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

On peut représenter la résultante $\vec{R}$ par les méthodes graphiques suivantes :



Méthode du triangle



Méthode du parallélogramme

Propriétés de la somme vectorielle

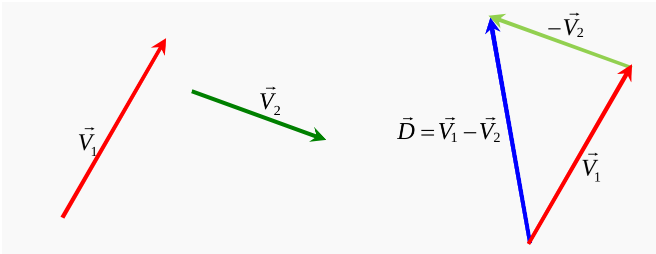
- La résultante de la somme d'un vecteur $\vec{V}$ avec son opposé $-\vec{V}$ est le vecteur nul $\vec{0}$.
- La somme vectorielle est commutative: $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1$
- La somme vectorielle est associative : $(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3=\vec{V}_1+(\vec{V}_2+\vec{V}_3)$

b. <u>Soustraction vectorielle</u>

La soustraction vectorielle est définie comme l'addition du vecteur opposé :

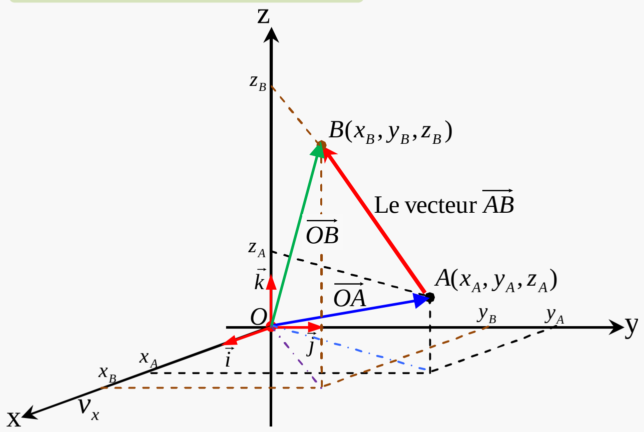
$$\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2=\vec{V}_1+(-\vec{V}_2)$$

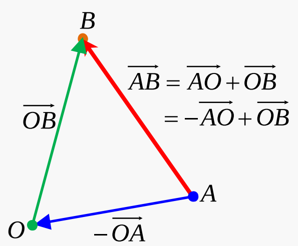
Pour trouver graphiquement le vecteur $\vec{D}$, on trace le vecteur opposé $-\vec{V}_2$ et on utilise la méthode du triangle.



Si : $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$, donc les composantes du vecteur $\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$ sont : $\vec{D}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\\z_1-z_2\end{pmatrix}$

Composantes d'un bipoint





Les composantes d'un bipoint (ou du vecteur) $\overrightarrow{AB}$, formé par les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, peuvent être déterminer comme suivant :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (*décomposition de* $\overrightarrow{AB}$ *en deux vecteurs d'origine* O)

Avec : $\overrightarrow{OA}=x_A\cdot\vec{i}+y_A\cdot\vec{j}+z_A\cdot\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB}=x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}+z_B\cdot\vec{k}$

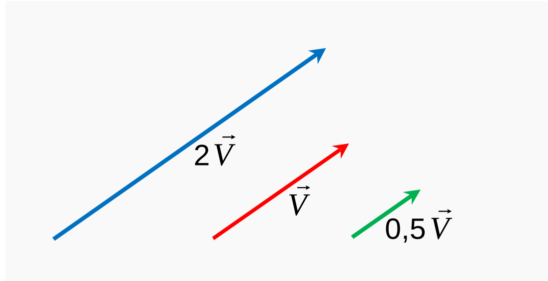
Donc, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit : $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}+(z_B-z_A)\cdot\vec{k}$

Le module de $\overrightarrow{AB}$ est : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

La direction de $\overrightarrow{AB}$ est le segment de droite $[A,B]$

c. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Un vecteur $\vec{V}$ peut être multiplié par un scalaire réel n pour donner un nouveau vecteur :



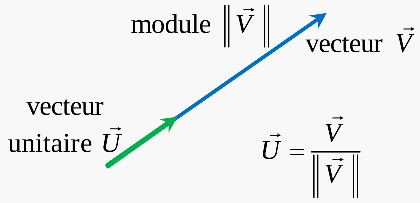
$$\vec{W} = n \cdot \vec{V}$$

Les propriétés du vecteur $\vec{W}$ sont :

- Le module de $\vec{W}$ est : $\left\| \vec{W} \right\| = |n| \cdot \left\| \vec{V} \right\|$;
- La direction de $\vec{W}$ est la même que celle de $\vec{V}$;
- Le sens de $\vec{W}$ est le même que celui de $\vec{V}$ si $n > 0$, et il est opposé à celui de $\vec{V}$ si $n < 0$.

Vecteur unitaire d'un vecteur

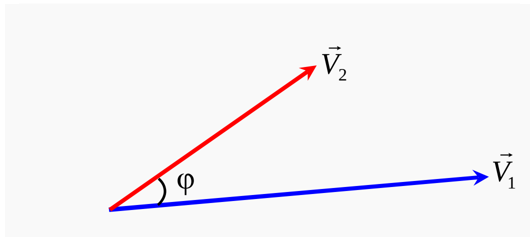
Tout vecteur non nul $\vec{V}$ est égal à la multiplication d'un vecteur unitaire $\vec{U}$ par son module $\left\| \vec{V} \right\|$: $\vec{V} = \left\| \vec{V} \right\| \cdot \vec{U}$



Le vecteur unitaire $\vec{U}$ permet de définir la direction et le sens de $\vec{V}$, et il s'écrit : $\vec{U} = \dfrac{\vec{V}}{\left\| \vec{V} \right\|}$

d. Produit scalaire

Soient $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.



Le produit scalaire entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est la grandeur scalaire notée $\vec{V_1} \bullet \vec{V_2}$ telle que :

$$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \left\| \vec{V_1} \right\| \cdot \left\| \vec{V_2} \right\| \cdot \cos\varphi$$ (L'opérateur « • » signifie le produit scalaire)

$$= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$ (Expression analytique du produit scalaire)

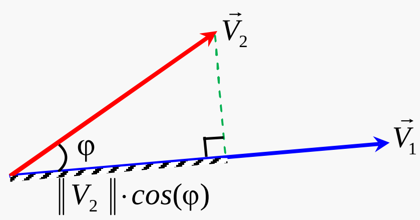
Avec : φ : c'est l'angle entre les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$,

Composante d'un vecteur sur un axe

Dans l'expression du produit scalaire :

$$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \left\| \vec{V_1} \right\| \cdot \left\| \vec{V_2} \right\| \cdot \cos\varphi$$

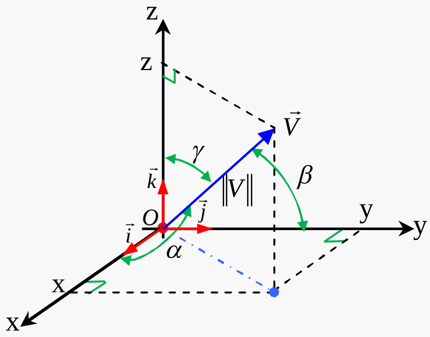
la grandeur « $\left\| \vec{V_2} \right\| \cdot \cos\varphi$ » représente la composante (ou la projection) de $\vec{V_2}$ sur la direction de $\vec{V_1}$.



Exemple

La composante de $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur :

- l'axe Ox est : $x = \vec{V} \bullet \vec{i} = \|\vec{V}\| \cdot \cos\alpha$
- l'axe Oy est : $y = \vec{V} \bullet \vec{j} = \|\vec{V}\| \cdot \cos\beta$
- l'axe Oz est : $z = \vec{V} \bullet \vec{k} = \|\vec{V}\| \cdot \cos\gamma$



Propriétés du produit scalaire

- Si l'un des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est nul, donc : $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0$
- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_1$
- Le produit scalaire est distributif : $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3$
- Le produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux (perpendiculaires) $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0 \quad (\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \text{, c'est-à-dire l'angle } \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0)$$

(c'est la condition d'orthogonalité de deux vecteurs non nuls)

- Le module d'un vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, qui égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, peut être formulé par la relation : $\|\vec{V}\|^2 = \vec{V} \bullet \vec{V}$

Module de la résultante

Soient les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire :

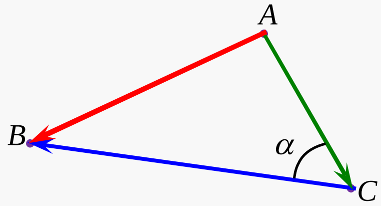
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Donc, le carré de son module égal à : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \bullet (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$= (\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CB}) + 2 \cdot \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CB}$$

$$= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 + 2 \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\| \cdot \cos\alpha$$



Avec : α c'est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$

e. Produit vectoriel

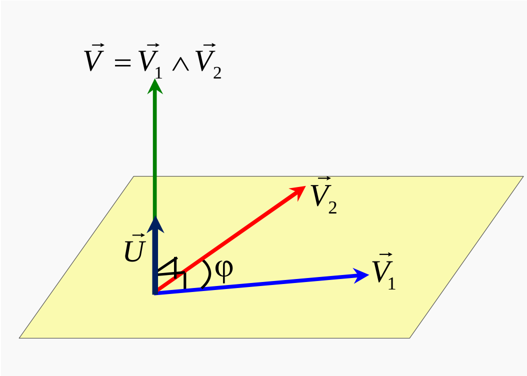
Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux vecteurs non nuls, et φ l'angle entre eux.

Le produit vectoriel de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le vecteur $\vec{V}$ défini par :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{U}$$

(L'opérateur « $\wedge$ » signifie le produit vectoriel)

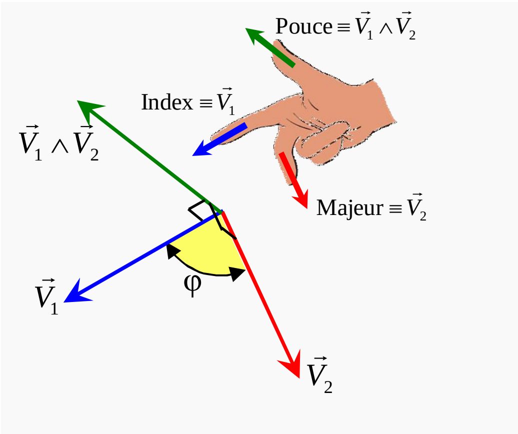
Avec : $\vec{U}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

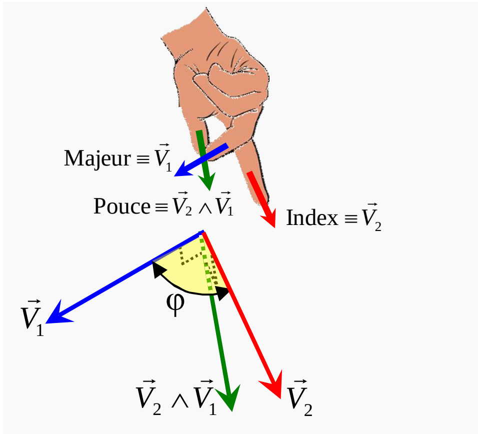


Le module de $\vec{V}$ est égal à : $\left\| \vec{V} \right\| = \left\| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\| = \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{V}_2 \right\| \cdot \left| \sin\varphi \right|$

Remarque :

Le sens du produit vectoriel est déterminé par la règle des 3 doigts de la main droite, disposés de telle sorte que :





Expression analytique du produit vectoriel

Dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, Si le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est le produit vectoriel des vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, donc ses composantes "x", "y" et "z" seront calculées par la méthode du déterminant comme suivant :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \vec{u}_1 \cdot \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix} - \vec{u}_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} + \vec{u}_3 \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$= (y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1) \cdot \vec{u}_1 - (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) \cdot \vec{u}_2 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{u}_3$$

Propriétés du produit vectoriel

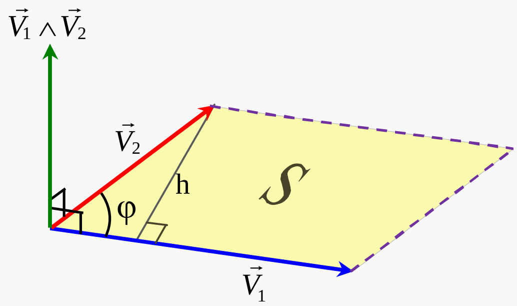
- Le produit vectoriel est anti commutatif : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$.
- Le produit vectoriel est distributif : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$
- Le double produit vectoriel : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ est un vecteur défini par la relation :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$

- Si $\vec{V}_1$ est colinéaire à $\vec{V}_2$ (*c'est-à-dire l'angle* $\varphi = 0$ *ou* π), donc : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$.
- Une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est dite orthonormée directe, si : $\begin{cases} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \\ \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \end{cases}$

Surface d'un triangle

En géométrie, le module du produit vectoriel $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est égal à l'aire (*ou la surface*) du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



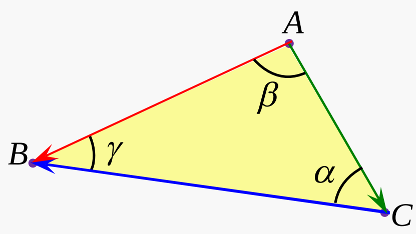
Par conséquence, la surface d'un triangle ABC, formé par trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$, égale à :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{CB} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CB} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{CB} \right\| \cdot \sin\alpha \quad (\alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \cdot \sin\beta \quad (\beta < \pi \Rightarrow \sin\beta > 0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{CB} \right\| \cdot \sin\gamma \quad (\gamma < \pi \Rightarrow \sin\gamma > 0)$$

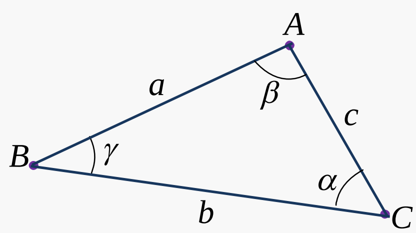


Application

Soit un triangle quelconque ABC.

Démontrer la formule des sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



<u>Corrigé :</u> Le triangle ABC *est formé par les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.

On désignera par :
- a *: la longueur du côté* AB *; c'est à dire :* $a = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$;
- b *: la longueur du côté* CB *; c'est à dire :* $b = \left\| \overrightarrow{CB} \right\|$;
- c *: la longueur du côté* AC *; c'est à dire :* $c = \left\| \overrightarrow{AC} \right\|$;
- α *: l'angle entre les vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{CB}$;
- β *: l'angle entre les vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$;

- γ : *l'angle entre les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$;*

Donc, la surface du triangle s'écrit :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

$$\Rightarrow c\cdot b\cdot \sin\alpha = c\cdot a\cdot \sin\beta = a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

La division par le produit $a\cdot b\cdot c$, nous donne :

$$\frac{c\cdot b\cdot \sin\alpha}{a\cdot b\cdot c} = \frac{c\cdot a\cdot \sin\beta}{a\cdot b\cdot c} = \frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{a\cdot b\cdot c}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

f. Produit mixte

Soient les vecteurs non nuls $\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$.

Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est défini par :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \vec{V}_1\bullet(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3) = \begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$$

$$= x_1\cdot(y_2\cdot z_3 - y_3\cdot z_2) + y_1\cdot(x_3\cdot z_2 - x_2\cdot z_3) + z_1\cdot(x_2\cdot y_3 - x_3\cdot z_2)$$

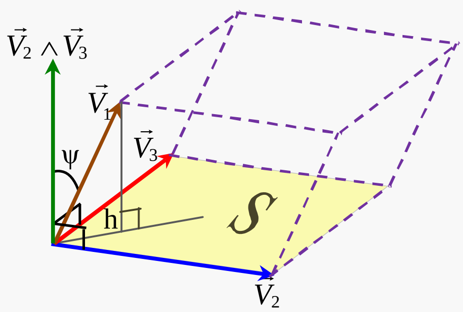
Propriétés du produit mixte

- Le produit mixte est non commutatif : $\vec{V}_1\bullet(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3) = -\vec{V}_3\bullet(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1)$
- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :
$$\vec{V}_1\bullet(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3) = \vec{V}_3\bullet(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2) = \vec{V}_2\bullet(\vec{V}_3\wedge\vec{V}_1)$$
- Le produit mixte est nul si deux vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires (les trois vecteurs sont dans le même plan).

Volume d'un parallélépipède

Si les trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ ont le même origine, donc :

$$\vec{V}_1\bullet(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3) = \left\|\vec{V}_1\right\|\cdot\left\|\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right\|\cdot \cos\psi$$



Avec :

$\left\|\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right\|$: la surface de la base S.

$\left\|\vec{V}_1\right\|\cdot \cos\psi = h$: la hauteur du parallélépipède construit sur $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

Alors, la valeur absolue : $\left|\left\|\vec{V}_1\right\|\cdot\left\|\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3\right\|\cdot \cos\psi\right|$ est égale au volume du parallélépipède.

g. Dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\vec{V}(t)$ défini par ses composantes données en fonction d'une variable t (peut être le temps par exemple). La dérivée de $\vec{V}(t)$ par rapport à t est le vecteur : $\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}$.

Propriétés de la dérivation vectorielle

- Dérivée de la somme (ou de la soustraction) : $\dfrac{d}{dt}(\vec{V}_1(t) \mp \vec{V}_2(t)) = \dfrac{d\vec{V}_1(t)}{dt} \mp \dfrac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- Dérivée d'un vecteur multiplié par un scalaire : $\dfrac{d(n\cdot\vec{V}(t))}{dt} = \vec{V}(t)\cdot\dfrac{dn}{dt} + n\cdot\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}$
- Dérivée d'un produit scalaire : $\dfrac{d}{dt}(\vec{V}_1(t)\bullet\vec{V}_2(t)) = \dfrac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\bullet\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\bullet\dfrac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$
- Dérivée d'un produit vectoriel : $\dfrac{d}{dt}(\vec{V}_1(t)\wedge\vec{V}_2(t)) = \dfrac{d\vec{V}_1(t)}{dt}\wedge\vec{V}_2(t) + \vec{V}_1(t)\wedge\dfrac{d\vec{V}_2(t)}{dt}$

Remarque : *Si $\vec{U}$ est un vecteur unitaire. Alors, la dérivée du produit scalaire $\vec{U}\bullet\vec{U}$ par rapport au temps t, est égale :*

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}\bullet\vec{U}) = 2\cdot\vec{U}\bullet\frac{d\vec{U}}{dt} = 0$$ (puisque : $\vec{U}\bullet\vec{U} = \left\|\vec{U}\right\|^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{d(\vec{U}\bullet\vec{U})}{dt} = \dfrac{d\left\|\vec{U}\right\|^2}{dt} = 0$)

Donc, le dérivé d'un vecteur unitaire, par rapport au temps, $\dfrac{d\vec{U}}{dt}$ est orthogonal à $\vec{U}$.

Application

Soient les vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{B}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1) *Trouver le module de chaque vecteur.*
2) *Calculer* $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ *et* $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$.
3) *Calculer le produit scalaire* $\vec{A}\bullet\vec{B}$.
4) *Trouver l'angle* φ *entre les deux vecteurs.*
5) *Calculer le module du produit vectoriel* $\left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\|$

Corrigé :

1) *Le module de* $\vec{A}$ *est :* $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Le module de $\vec{B}$ *est :* $\left\|\vec{B}\right\| = \sqrt{0 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

2) *La somme :* $\vec{R}\begin{pmatrix}1+0\\2+1\\-1+(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{R}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

La soustraction : $\vec{D}\begin{pmatrix}1-0\\2-1\\-1-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

3) *Le produit scalaire :* $\vec{A}\bullet\vec{B} = (1\times 0)+(2\times 1)+((-1)\times(-1)) = 3$

4) *D'après l'expression du produit scalaire :* $\vec{A}\bullet\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot cos\,\varphi$

$$\Rightarrow cos\,\varphi = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 30°$$

5) *Le module du produit vectoriel :* $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot|sin\,\varphi|$

$$= \vec{A}\bullet\vec{B} = \sqrt{6}\times\sqrt{2}\times sin(30°)$$

$$= \sqrt{3}$$

I.5- Systèmes de coordonnées

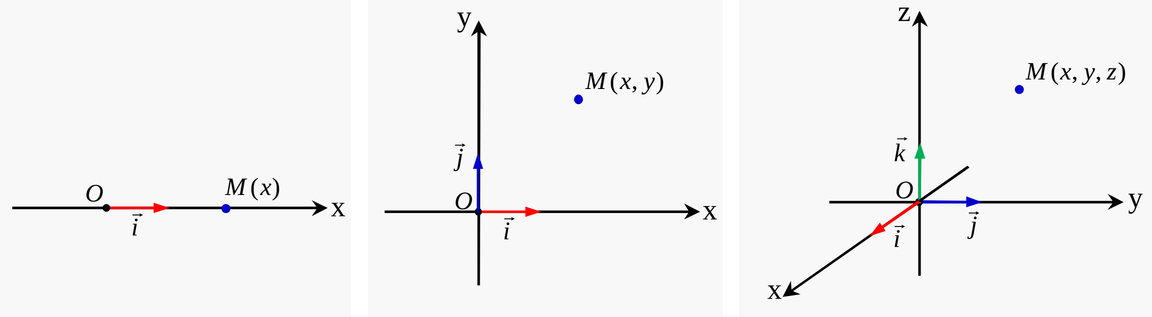
1.5-1. Coordonnées cartésiennes

a. Définition

Le repère cartésien (noté $\mathsf{R}(O, xyz)$) est un repère orthonormé fixe, d'origine $O(0,0,0)$) et muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Dans un espace unidimensionnel : le repère R possède un seul axe Ox ;
- Dans un espace bidimensionnel : le repère R possède deux axes Ox et Oy ;
- Dans un espace tridimensionnel : le repère R comporte trois axes Ox, Oy et Oz.

Espace unidimensionnel (ou ligne droite) | Espace bidimensionnel (ou plan) | Espace tridimensionnel

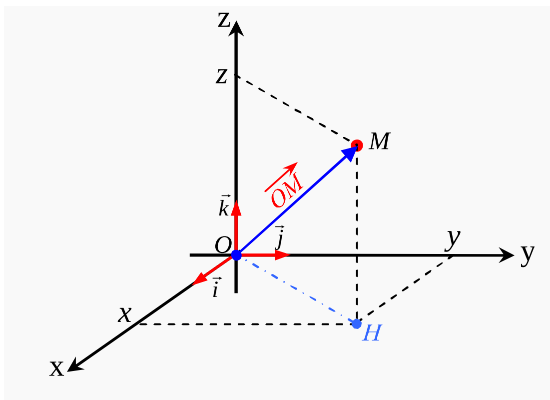


b. Vecteur position en coordonnées cartésiennes

En système de cordonnées cartésiennes, le vecteur position d'un point $M(x, y, z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

- $\overrightarrow{OM}$ est lié à l'origine O.
- Le module de $\overrightarrow{OM}$ est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



- La direction de $\overrightarrow{OM}$ est le segment de droite $[O, M]$
- Le sens de $\overrightarrow{OM}$ est du point O (origine) vers le point M.

c. <u>Dérivation du vecteur position par rapport au temps en cordonnées cartésiennes</u>

En système de cordonnées cartésiennes, la dérivée du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

Tels que t est le temps, s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i} + x(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}\right] + \left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{j} + y(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}\right] + \left[\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k} + z(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Et puisque , la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est caractérisée par : $\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$,

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}$$

$$= \dot{x}(t)\cdot\vec{i} + \dot{y}(t)\cdot\vec{j} + \dot{z}(t)\cdot\vec{k}$$

<u>Remarque :</u>

En physique, on utilise la notation « $\dot{}$ et $\ddot{}$ » pour désigner la première et la seconde dérivée par rapport au temps t .

Application

Soit un point M , défini par ses coordonnées cartésiennes : $(\sin t,\ \cos t,\ t)$

1) *Trouver, en fonction du temps t , l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$*
2) *Calculer* $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$
3) *Calculer le module du vecteur* $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$.

<u>Corrigé :</u>

1) *Le vecteur position :* $\overrightarrow{OM}(t) = \sin t\cdot\vec{i} + \cos t\cdot\vec{j} + t\cdot\vec{k}$
2) *La dérivée par rapport à t :*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i} + \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{j} + \frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}$$

$$= \cos t\cdot\vec{i} - \sin t\cdot\vec{j} + \vec{k}$$

3) *Le module de* $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$: $\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$

I.5-2. Coordonnées polaires

a. Définition

Le système de coordonnées polaires est utilisé pour repérer la position d'un point M dans un plan (espace bidimensionnel).

La position du point $M(x, y)$ est repérée par :

- La coordonnée radiale ρ : c'est la distance qui sépare M de l'origine O .

$$\rho = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \qquad (0 \le \rho \le +\infty)$$

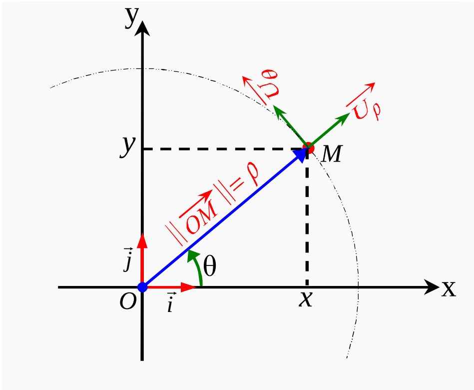
- La coordonnée angulaire θ : c'est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox .

$$(0 \le \theta \le 2\pi)$$

La base orthonormée associée aux coordonnées polaires est : $\left(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}\right)$, tels que :

- $\overrightarrow{U_\rho}$ (vecteur radial) : est le vecteur unitaire du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{U_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\| \overrightarrow{OM} \right\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\rho}$$



- $\overrightarrow{U_\theta}$ (vecteur orthoradial) : est le vecteur directement perpendiculaire à $\overrightarrow{U_\rho}$.

(rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif)

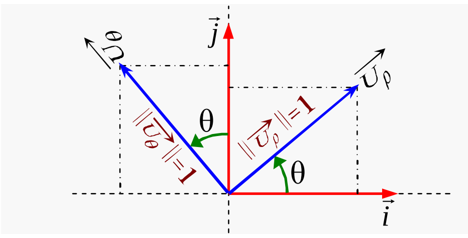
b. Relation avec les coordonnées cartésiennes

En utilisant la figure ci-dessus, on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et les coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot cos\theta \\ y = \rho \cdot sin\theta \end{cases} \quad ;\text{ et } \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{si}: x > 0)\,;\text{ou}: \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad (\text{si}: x < 0) \end{cases}$$

La relation entre la base polaire $\left(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}\right)$ et la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_\rho} = cos\,\theta \cdot \vec{i} + sin\,\theta \cdot \vec{j} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -sin\,\theta \cdot \vec{i} + cos\,\theta \cdot \vec{j} \end{cases}$$



Remarques :

1- *Les vecteurs $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ sont liés au point M . Si M est en mouvement les vecteurs $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ changent leurs directions, donc la base $\left(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}\right)$ est « mobile » par rapport à la base fixe $(\vec{i}, \vec{j})$.*

2- *La dérivation par rapport à l'angle polaire θ des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$, nous donne :*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\cdot\vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\cdot\vec{j} = -\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j} = \overrightarrow{U_\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}(-\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\cdot\vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\cdot\vec{j} = -\left[\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}\right] = -\overrightarrow{U_\rho} \end{cases}$$

c. <u>Vecteur position en coordonnées polaires</u>

En système de cordonnées polaires, le vecteur position d'un point $M(\rho,\theta)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cdot\overrightarrow{U_\rho}$$

I.5-3. Coordonnées cylindriques

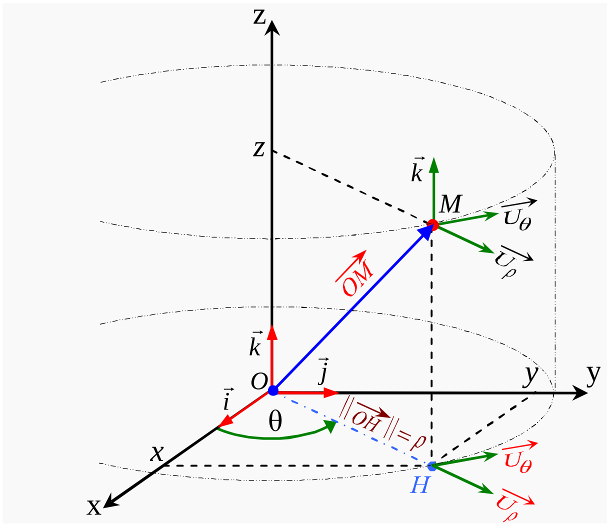
a. <u>Définition</u>

Dans le système de coordonnées cylindriques la position d'un point M est repérée par :

- Les coordonnées polaires ρ et θ de sa projection orthogonale (le point $H(x,y,0)$) sur le plan horizontal (Oxy).

- La coordonnée z

  (sa cote en coordonnées cartésiennes)



Donc les cordonnées cylindrique du point M sont :

$$\begin{cases} \rho = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| \qquad (0 \le \rho \le +\infty) \\ \theta : \text{l'angle que fait le vecteur } \overrightarrow{OH} \text{ avec l'axe } Ox \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \\ z \qquad (-\infty \le z \le +\infty) \end{cases}$$

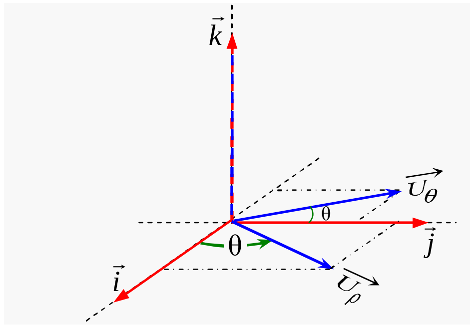
b. <u>Relation avec les coordonnées cartésiennes</u>

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes (ou l'inverse) par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad ;\text{et} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \ (\text{si} : x>0)\,;\text{ou} : \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \ (\text{si} : x<0) \\ z = z \end{cases}$$

La base orthonormée associée aux coordonnées cylindriques est : $\left(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k}\right)$, tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_\rho} = cos\theta \cdot \vec{i} + sin\theta \cdot \vec{j} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -sin\theta \cdot \vec{i} + cos\theta \cdot \vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$



c. <u>Vecteur position en coordonnées cylindrique</u>

En système de cordonnées cylindrique, le vecteur position d'un point $M(\rho, \theta, z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \overrightarrow{U_\rho} + z \cdot \vec{k}$$

Application

Deux points P et Q ont les coordonnées cylindriques $(4, \frac{\pi}{3}, 0)$ et $(2, \frac{5\pi}{6}, \sqrt{3})$.

Trouver les coordonnées cartésiennes des points P et Q.

<u>Corrigé :</u>

- *Les coordonnées cartésiennes du point $P(4, \frac{\pi}{3}, 0)$:*

$$\begin{cases} x_P = \rho_P \cdot cos\,\theta_P \\ y_P = \rho_P \cdot sin\,\theta_P \\ z_P = z_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 4 \times cos\frac{\pi}{3} = 2 \\ y_P = 4 \times sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \\ z_P = 0 \end{cases}$$

Donc, Les coordonnées cartésiennes de P sont : $P\,(2, 2\sqrt{3}, 0)$

- *Les coordonnées cartésiennes du point $Q(2, \frac{5\pi}{6}, \sqrt{3})$:*

$$\begin{cases} x_Q = \rho_Q \cdot cos\,\theta_Q \\ y_Q = \rho_Q \cdot sin\,\theta_Q \\ z_Q = z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \times cos\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ y_Q = 2 \times sin\frac{5\pi}{6} = 1 \\ z_Q = \sqrt{3} \end{cases}$$

Donc, Les coordonnées cartésiennes de Q sont : $Q\,(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$

I.5-4. Coordonnées sphériques

a. <u>Définition</u>

Dans l'espace tridimensionnel, la position d'un point M est repéré en système de coordonnées sphériques par :

- La distance radiale r : c'est la distance qui sépare M de l'origine O .

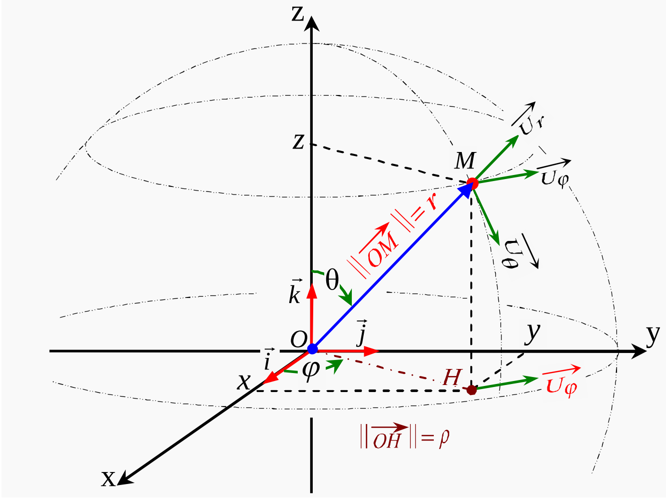
$$r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| \qquad (0 \leq r \leq +\infty)$$

- La colatitude θ :

  c'est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Oz $(0 \le \theta \le \pi)$

- La longitude φ :

  c'est l'angle que fait $\overrightarrow{OH}$ (la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur le plan horizontale (Oxy)) avec l'axe Ox $(0 \le \varphi \le 2\pi)$



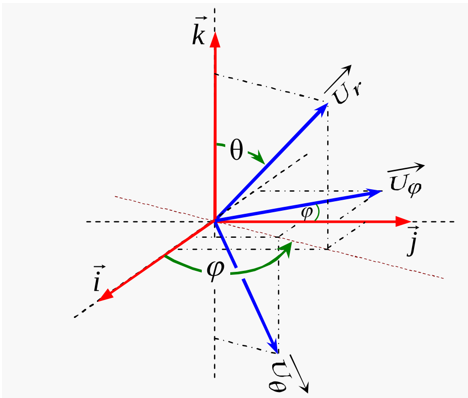
b. <u>Relation avec les coordonnées cartésiennes</u>

On peut passer du système de coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes (ou l'inverse) par les relations :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases} ;\text{ et } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (\text{si} : x > 0)\,;\text{ou} : \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad (\text{si} : x < 0) \end{cases}$$

La base orthonormée associée aux coordonnées sphériques est : $\left(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi}\right)$, tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{j} + \cos\theta \cdot \vec{k} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{j} - \sin\theta \cdot \vec{k} \\ \overrightarrow{U_\varphi} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j} \end{cases}$$



<u>Remarques :</u>

1- *La base sphérique $\left(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi}\right)$ est « mobile » par rapport à la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

2- *La base $\left(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi}\right)$ est orthonormée directe, c'est-à-dire :* $\begin{cases} \overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta} = \overrightarrow{U_\varphi} \\ \overrightarrow{U_\theta} \wedge \overrightarrow{U_\varphi} = \overrightarrow{U_r} \\ \overrightarrow{U_\varphi} \wedge \overrightarrow{U_r} = \overrightarrow{U_\theta} \end{cases}$

3- *Les différentielles totales des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}$, $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_\varphi}$ sont :*

- $$d\overrightarrow{U_r} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \theta}\right) \cdot d\theta + \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \varphi}\right) \cdot d\varphi = d\theta \cdot \overrightarrow{U_\theta} + \sin\theta \cdot d\varphi \cdot \overrightarrow{U_\varphi}$$

- $$\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_\theta}}{\partial \theta}\right)\cdot \mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_\theta}}{\partial \varphi}\right)\cdot \mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}\theta \cdot \overrightarrow{U_r} + \cos\theta \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \overrightarrow{U_\varphi}$$

- $$\mathrm{d}\overrightarrow{U_\varphi} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_\varphi}}{\partial \varphi}\right)\cdot \mathrm{d}\varphi = -\sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \overrightarrow{U_r} - \cos\theta \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

c. Vecteur position en coordonnées sphériques

En système de cordonnées sphériques, le vecteur position d'un point $M(r,\theta,\varphi)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{U_r}$$

Application

Démontrer que : $\dfrac{\partial \overrightarrow{U_\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta \cdot \overrightarrow{U_r} - \cos\theta \cdot \overrightarrow{U_\theta}$

Corrigé :

D'après l'égalité : $\overrightarrow{U_\varphi} = \overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta}$

Alors, la dérivée $\dfrac{\partial \overrightarrow{U_\varphi}}{\partial \varphi}$ *égale :* $\dfrac{\partial \overrightarrow{U_\varphi}}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \varphi} \wedge \overrightarrow{U_\theta} + \overrightarrow{U_r} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{U_\theta}}{\partial \varphi}$

Avec : $\dfrac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta \cdot \overrightarrow{U_\varphi}$ *et* $\dfrac{\partial \overrightarrow{U_\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta \cdot \overrightarrow{U_\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overrightarrow{U_\varphi}}{\partial \varphi} = \sin\theta \cdot \left(\overrightarrow{U_\varphi} \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right) + \cos\theta \cdot \left(\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\varphi}\right)$$

$$= \sin\theta \cdot \left(-\overrightarrow{U_r}\right) + \cos\theta \cdot \left(-\overrightarrow{U_\theta}\right)$$

$$= -\sin\theta \cdot \overrightarrow{U_r} - \cos\theta \cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

Application

Soit un point M *de coordonnées sphériqus* $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Trouver le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ *en coordonnées cartésiennes.*

Corrigé :

L'expression du vecteur position en coordonnées sphérique est :

$$\overrightarrow{OM} = r_M \cdot \overrightarrow{U}_{r\,(M)}$$

Avec : $r_M = 2$

et : $\overrightarrow{U}_{r\,(M)} = \sin\theta_M \cdot \cos\varphi_M \cdot \vec{i} + \sin\theta_M \cdot \sin\varphi_M \cdot \vec{j} + \cos\theta_M \cdot \vec{k}$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\vec{i} + \left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\vec{j} + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\cdot\vec{k}$$

$$= \frac{-1}{2}\cdot\vec{i} + \frac{1}{2}\cdot\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{k}$$

Donc, le vecteur position de $M\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ *en coordonnées cartésiennes est :*

$$\overrightarrow{OM} = -\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}\cdot\vec{k}$$

Annexe

- Algèbre

Exposants

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$
$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

- Trigonométrie

Identités trigonométriques

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \mp \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan(\alpha \mp \beta) = \frac{\tan\alpha \mp \tan\beta}{1 \pm (\tan\alpha \cdot \tan\beta)}$$

Fonctions trigonométrique

Fonction	Dérivée $\left(\frac{d}{dx}\right)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(f(x))$	$-\frac{df(x)}{dx} \cdot \sin(f(x))$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(f(x))$	$\frac{df(x)}{dx} \cdot \cos(f(x))$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$

Fonction réciproque	Dérivée $\left(\frac{d}{dx}\right)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\text{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$

- Géométrie

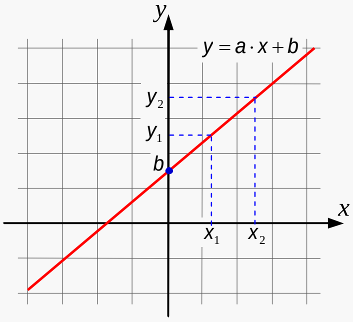
L'équation d'une droite est de la forme : $y = a \cdot x + b$

Où :

b est l'ordonnée à l'origine $y(0)$;

a est la pente, telle que :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



L'équation d'un cercle est de la forme : $x^2 + y^2 = r^2$

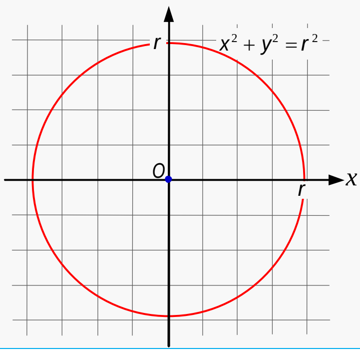
Où :

Le rayon : r ;

Le centre : l'origine $O(0,0)$;

La circonférence : $C = 2\pi \cdot r$;

La surface : $S_{cercle} = \pi \cdot r^2$



L'équation d'une sphère est de la forme : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

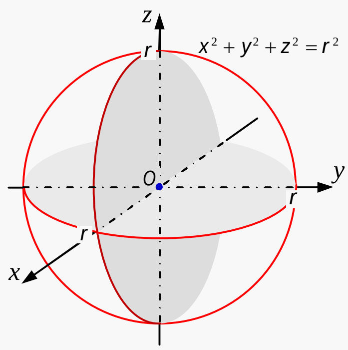
Où :

Le rayon : r ;

Le centre : l'origine $O(0,0,0)$;

La surface : $S_{sphère} = 4\pi \cdot r^2$;

Le volume : $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$



2

Cinématique du Point Matériel

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Décrire les paramètres d'un mouvement : le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération.
- Etablir l'équation de la trajectoire et identifier la nature du mouvement.
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération en différents systèmes de coordonnées.
- Définir les paramètres d'un mouvement circulaire : vitesse et accélération angulaire.

II.1- Introduction

La mécanique est la partie de la physique qui étudie les mouvements des corps.

La *cinématique* est une partie de la mécanique, consiste à analyser de façon purement mathématique le mouvement sans se préoccuper des causes qui le produit (comme les fores par exemple).

Les grandeurs physiques de la cinématique sont : le temps, la position, la vitesse et l'accélération.

II.2- Définitions

Mouvement : c'est le changement de la position (ou le déplacement) d'un corps (ou objet) dans l'espace.

Le mouvement est une notion relative qu'il convient de la préciser avec : « par rapport à ».

Point matériel : c'est un point géométrique (souvent noté "M") associe à un corps sans dimensions, ou ses dimensions sont négligeables par rapport à son déplacement.

Au cours de ce chapitre, tout corps à étudier est considéré comme un point.

Référentiel :

Avant de décrire le mouvement d'un point matériel, il est nécessaire de définir un référentiel d'étude.

Un référentiel est l'ensemble d'un repère d'espace, un repère de temps et un observateur.

Référentiel (R) = Repère d'espace + Repère de temps + Observateur

Repère d'espace : c'est un système de coordonnées défini par une origine (noté "O") et trois axes orientés, et il muni d'une base vectorielle orthonormée.

> *Exemple*
>
> *Le repère cartésien* $\mathsf{R}(O, x\,y\,z)$ *ou* $\mathsf{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Repère temps (Horloge) : Il sert à mesurer le temps du mouvement. Il constitué d'un instant d'origine (correspond à $t=0$) et d'une échelle de temps.

Observateur : c'est un corps matériel (réel ou imaginaire), lié et fixe (immobile) dans le référentiel d'étude.

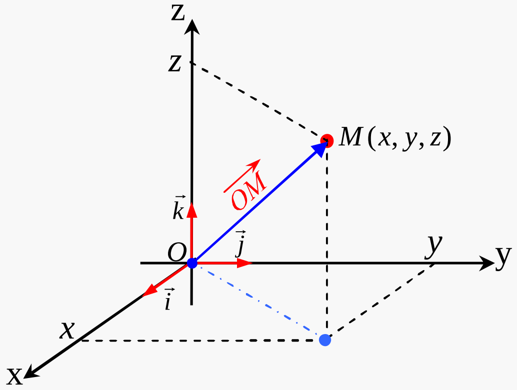
II.3- Mouvement d'un point matériel

Le mouvement d'un point matériel M dans un référentiel (R) peut être décrit par les paramètres cinématiques suivants : vecteur position, vecteur vitesse et vecteur d'accélération.

II.3-1. Vecteur position

La position du point M dans l'espace, à tout instant t, est définie par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (aussi noté $\vec{r}$).

> *Exemple*
>
> *Dans un repère cartésien* $\mathsf{R}(O, x\,y\,z)$, *le vecteur position du point* M, *à tout instant* t, *s'écrit :*
>
> $$\overrightarrow{OM}\,(\text{ou } \vec{r}(t)) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$
>
> *Les composantes* $x(t)$, $y(t)$ *et sont appelés :* les équations horaires du mouvement, *elles expriment les changements de la position de* M *avec le temps* t.

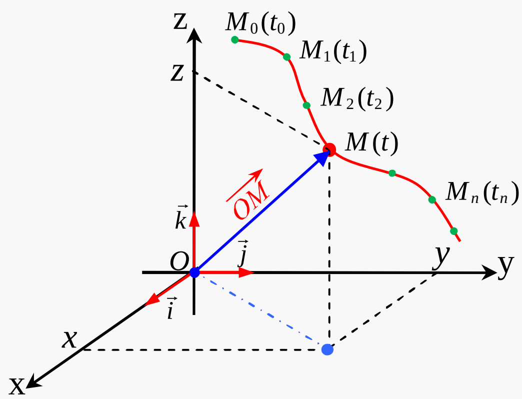


Trajectoire du mouvement

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le point M au cours du temps.

La trajectoire est une ligne continue reliant la position de départ M_0 (instante de départ t_0) à la position d'arrivée.

La forme de la trajectoire détermine la nature du mouvement. Le mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est rectiligne (ou droite), et curviligne s'elle est curviligne.



L'équation de la trajectoire est une relation entre les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ indépendamment du temps.

Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires pour obtenir la formule $f(x, y, z) = 0$.

Application

Dans le repère $\mathrm{R}(O, x\ y)$, *la position d'un point matériel* M *est donnée en fonction du temps t par le vecteur position :* $\vec{r}(t) = (2cos(2t)+5)\,\vec{i} + 2sin(2t)\,\vec{j}$

Quelle est la forme de sa trajectoire ?

<u>*Corrigé :*</u> $\vec{r}(t) = (2cos(2t)+5)\,\vec{i} + 2sin(2t)\,\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2cos(2t)+5 \\ y = 2sin(2t) \end{cases}$

En éliminant le temps t , on obtient : $\begin{cases} cos(2t) = \dfrac{x-5}{2} \\ sin(2t) = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

Avec : $cos^2(2t) + sin^2(2t) = 1 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 2^2$

Donc, la trajectoire de M *est un cercle de centre* $C(5, 0)$ *et de rayon* 2 .

Application

Dans le repère $\mathrm{R}(O, x\, y)$, *la trajectoire du mouvement d'un point matériel* P *est définie par l'équation :* $y = f(x) = \sqrt{x}\cdot(1-x)$

Si l'abscisse de P *est :* $x(t) = t^2$, *exprimer son ordonnée* y *en fonction de* t.

<u>*Corrigé :*</u> *D'après l'équation :* $y = \sqrt{x}\cdot(1-x)$, *avec :* $x = t^2$.

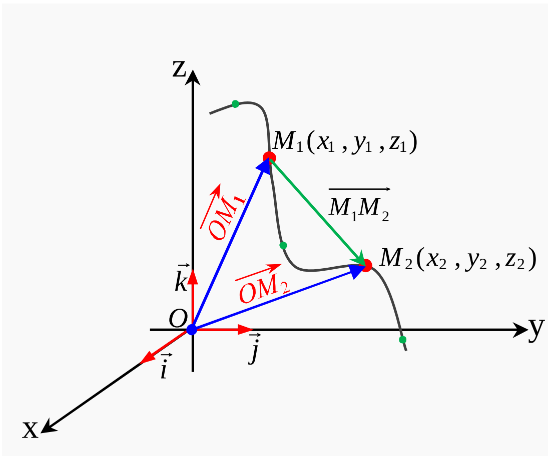
Donc : $y = \sqrt{t^2}\cdot(1-t^2) = t\cdot(1-t^2)$

II.3-2. Vecteur déplacement

Au cours de son mouvement, le point M (le mobile) occupe des positions différentes M_i. Par exemple, si M_1 (de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1, z_1)) est sa position à l'instant t_1 et M_2 (de coordonnées cartésiennes (x_2, y_2, z_2)) est la position à l'instant t_2.

Le vecteur déplacement $\Delta\overrightarrow{OM}$ est défini par :

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$



Avec :

$\overrightarrow{OM_1} \equiv \overrightarrow{OM}(t_1)$: Vecteur position à l'instant t_1 ;

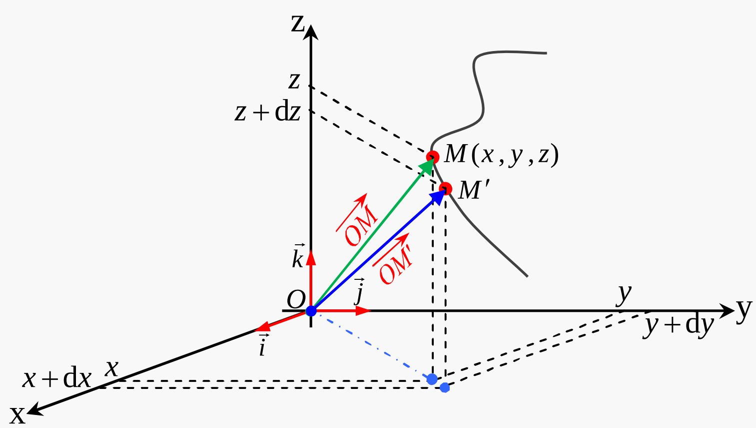
$\overrightarrow{OM_2} \equiv \overrightarrow{OM}(t_2)$: Vecteur position à l'instant t_2 ;

Déplacement élémentaire

Le déplacement élémentaire du mobile est un déplacement infiniment petit par rapport au système étudié.

Si un mobile subit un déplacement élémentaire entre la position $M(x, y, z)$ et la position $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$. Ce déplacement est représenté par le vecteur :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$$
$$= \mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$$



II.3-3. Vecteur vitesse

La vitesse d'un mobile est le rapport entre la variation de sa position (ou la distance parcourue) et le temps écoulé pendant ce changement de position.

Dans les mesures cinématiques, il faut distinguer deux types de vitesses :

a. <u>La vitesse moyenne</u>

Soit un mobile M qui se trouve à l'instant t_1 en position $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et à l'instant t_2 en position $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

La vitesse moyenne de M est définie sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ par les grandeurs :

Une grandeur vectorielle : $\vec{V}_{moy} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \dfrac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}\vec{i} + \dfrac{(y_2 - y_1)}{t_2 - t_1}\vec{j} + \dfrac{(z_2 - z_1)}{t_2 - t_1}\vec{k}$

$$= \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

Une grandeur scalaire (la valeur) : $V_{moy} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|}{t_2 - t_1} = \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t}$

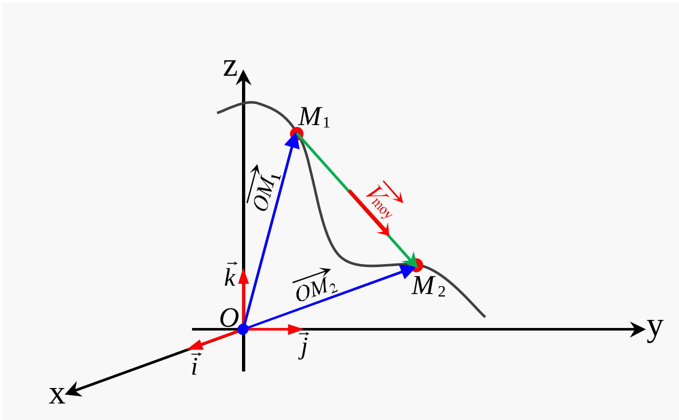
La vitesse s'exprime, dans le système international, en m/s ou $m.s^{-1}$.

<u>Remarques :</u>

1- *Le vecteur $\vec{V}_{moy}$ est appelée vecteur vitesse moyenne.*

2- *Les composantes* (en système cartésien) *de $\vec{V}_{moy}$ sont :*

$$\begin{cases} v_{moy}(x) = \dfrac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1} \\ v_{moy}(y) = \dfrac{(y_2 - y_1)}{t_2 - t_1} \\ v_{moy}(z) = \dfrac{(z_2 - z_1)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$



3- *Le vecteur vitesse $\vec{V}_{moy}$ est parallèle au vecteur déplacement $\Delta\overrightarrow{OM}$, et sa direction est celle du déplacement (de M_1 vers M_2).*

4- *Si le mouvement est sur une droite, donc :* $\vec{V}_{moy} = \dfrac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}\vec{i} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$ *; et sa valeur est :*

$$v_{moy} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t}$$

b. <u>La vitesse instantanée</u>

La vitesse instantanée (ou vitesse à un instant t) se définir comme une vitesse moyenne entre la position $M(t)$ (position à l'instant t) et la position $M(t+\delta t)$ (position à l'instant $t+\delta t$), où "δt"

représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend vers la vitesse à l'instant t lorsque la durée δt tend vers zéro.

Donc le vecteur vitesse instantané (noté vecteur vitesse $\vec{V}$) est :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\delta t}$$

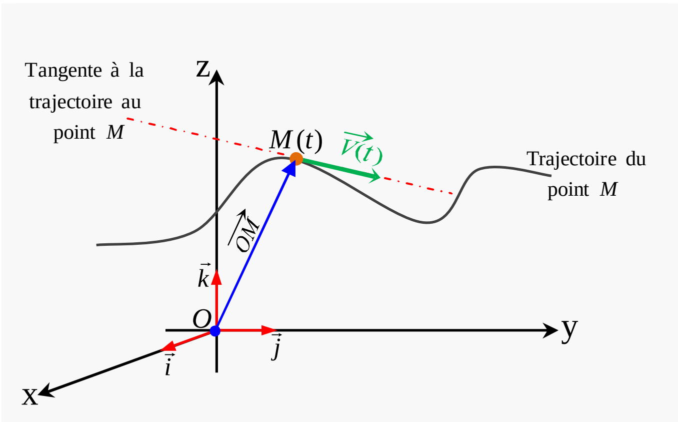
En outre, si on considère une durée élémentaire "$\mathrm{d}t$" « infiniment petite » correspondant à un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, alors la vitesse moyenne du mobile sur ce déplacement coïncide avec sa vitesse instantanée, et donc :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Le vecteur vitesse correspond alors à la dérivée temporelle du vecteur position.

<u>*Remarques :*</u>

1- *Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est un vecteur tangent à la trajectoire au point M.*



2- *Le sens de $\vec{V}(t)$ indique le sens du mouvement du mobile*

II.3-4. Vecteur accélération

Tout comme le vecteur vitesse qui correspond les variations du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération correspond les variations du vecteur vitesse par rapport au temps.

a. <u>L'accélération moyenne</u>

L'accélération moyenne d'un mobile est la variation de sa vitesse (instantanée) entre deux positions par rapport au temps.

Soit $\vec{V_1}$ le vecteur vitesse du mobile à un instant t_1 ($\vec{V_1} = \vec{V}(t_1)$)et $\vec{V_2}$ son vecteur vitesse à un instant t_2 ($\vec{V_2} = \vec{V}(t_2)$). Le vecteur accélération moyenne du mobile est définie sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ par : $\vec{a}_{moy} = \dfrac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}$

L'accélération s'exprime, dans le système international, en m/s^2 ou $m.s^{-2}$.

Remarques :

1- *Les composantes cartésienne de* $\vec{a}_{moy}$ *sont :* $\begin{cases} a_{moy(x)} = \dfrac{(v_x(t_2) - v_x(t_1))}{t_2 - t_1} \\ a_{moy(y)} = \dfrac{(v_y(t_2) - v_y(t_1))}{t_2 - t_1} \\ a_{moy(z)} = \dfrac{(v_z(t_2) - v_z(t_1))}{t_2 - t_1} \end{cases}$

2- *La valeur de l'accélération moyenne est :* $a_{moy} = \sqrt{a^2_{moy(x)} + a^2_{moy(y)} + a^2_{moy(z)}}$

b. L'accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée (noté simplement vecteur accélération $\vec{a}(t)$) est le vecteur accélération à un instant t. Il s'obtient d'une manière analogue à celle de vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\delta t) - \vec{V}(t)}{\delta t}$$

Si on considère une durée élémentaire " $\mathrm{d}t$ " « infiniment petite », le vecteur accélération sera correspond à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse et donc à la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Remarque :

Pour un mouvement rectiligne, si $\vec{a}(t) = \vec{0}$ (alors $\vec{V}(t) = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$) *donc le mouvement du point matériel est dit rectiligne uniforme.*

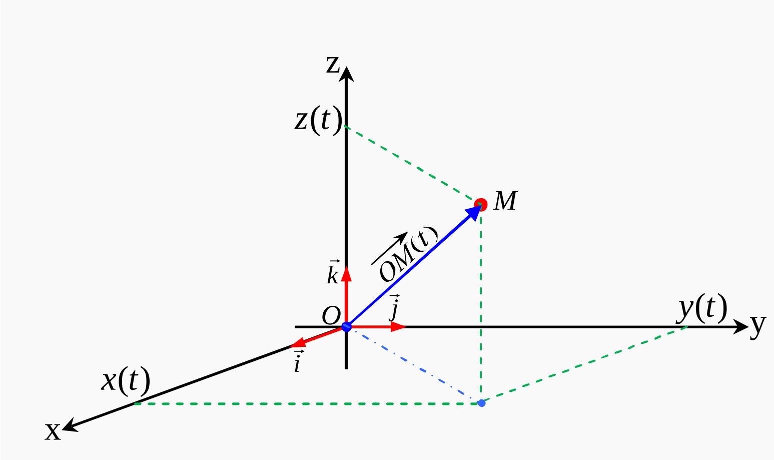
II.4- Vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées

II.4-1. Système de coordonnées cartésiennes

Soit un mobile M en mouvement dans un référentiel R (O, x, y, z) fixe, muni d'une base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Coordonnée cartésienne	Abréviation	Dérivée première	Abréviation	Dérivée seconde	Abréviation
$x(t)$	x	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$\dot{x}$	$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	$\ddot{x}$
$y(t)$	y	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$	$\dot{y}$	$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$	$\ddot{y}$
$z(t)$	z	$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$	$\dot{z}$	$\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$	$\ddot{z}$

Vecteur position : Le vecteur position à l'instant t est : $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.



Vecteur vitesse : Le vecteur vitesse à l'instant t est : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$.

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k} = \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right)$$

$$= \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k} \qquad \text{(puisque : } \left.\frac{d\,\vec{i}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\,\vec{j}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\,\vec{k}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}\ \text{)}$$

Le module du vecteur vitesse (la valeur de la vitesse du mobile à l'instant t) est :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Vecteur accélération : Le vecteur accélération à l'instant t est : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$.

$$\Rightarrow \vec{a}(t) == a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} = \frac{d}{dt}\left(v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}\right)$$

$$= \ddot{x}(t)\cdot\vec{i} + \ddot{y}(t)\cdot\vec{j} + \ddot{z}(t)\cdot\vec{k}$$

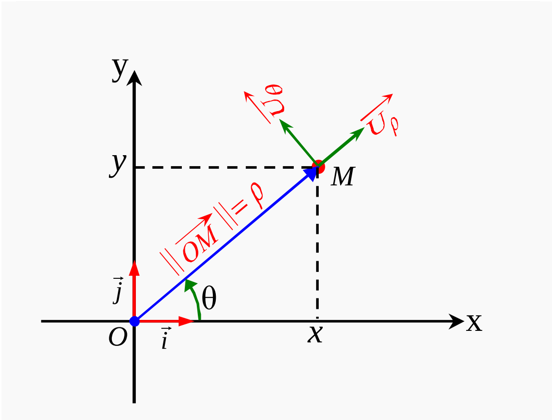
L'accélération à l'instant t est : $a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

II.4-2. Système de coordonnées polaires

Soit un mobile M en mouvement dans un plan (O, x, y) muni de la base polaire mobile $(\overrightarrow{U_\rho}\,,\,\overrightarrow{U_\theta})$.

Coordonnée polaire	Abréviation	Dérivée première	Abréviation	Dérivée seconde	Abréviation
$\rho(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$	ρ	$\dfrac{d\rho(t)}{dt} = \dfrac{d\rho}{dt}$	$\dot{\rho}$	$\dfrac{d^2\rho(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2\rho}{dt^2}$	$\ddot{\rho}$
$\theta(t) = arctan\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)$	θ	$\dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\dot{\theta}$	$\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	$\ddot{\theta}$

Vecteur position : En coordonnées polaires, le vecteur position à l'instant t est : $\overrightarrow{OM}(t) = \rho \cdot \overrightarrow{U_\rho}$.



Vecteur vitesse : En coordonnées polaires, l'expression du vecteur vitesse à l'instant t est :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho \cdot \overrightarrow{U_\rho}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}t}$$

D'après le chapitre I, nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{U_\theta}$

Donc, on peut écrire : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}\theta} \times \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$ (en divisant et en multipliant par "$\mathrm{d}\theta$")

Alors, $\vec{V}(t) = v_\rho \overrightarrow{U_\rho} + v_\theta \overrightarrow{U_\theta} = \dot{\rho} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta}$

Et le module du vecteur vitesse est : $v(t) = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2}$.

Remarques :

1- *La valeur* $v(t) = \left\| \vec{V}(t) \right\|$ *ne dépend pas du système de coordonnées, et dans tous les cas, le mobile a une seule valeur de vitesse à un instant* t.

$$v(t) = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

2- *La composante « $v_\rho = \dot{\rho}$ » est appelée la composante radiale du vecteur vitesse.*

3- *La composante « $v_\theta = \rho\dot{\theta}$ » est appelée la composante orthoradiale du vecteur vitesse.*

4- $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ *: est appelée la vitesse angulaire* (notée souvent "ω") (unité : $\mathrm{rad.s^{-1}}$ ou $\mathrm{s^{-1}}$).

Vecteur accélération : En coordonnées polaires, le vecteur accélération à l'instant t est :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{U_\theta}\right)$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}t}\right] + \left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{U_\theta} + \rho \cdot \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \cdot \overrightarrow{U_\theta} + \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t}\right]$$

La dérivée $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t}$ peut être trouvée par : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, avec $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{U_\rho}$ (Chapitre I)

Donc, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{U_\rho}$

Alors, $\vec{a}(t) = a_\rho \overrightarrow{U_\rho} + a_\theta \overrightarrow{U_\theta} = \left[\ddot{\rho} \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta}\right] + \left[\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta} - \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \overrightarrow{U_\rho}\right]$

$$= \left[\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2\right] \cdot \overrightarrow{U_\rho} + \left[\rho \cdot \ddot{\theta} + 2.\dot{\rho} \cdot \dot{\theta}\right] \cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

<u>Remarques :</u>

1- *La composante « $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ » est appelée la composante radiale du vecteur accélération.*

2- *La composante « $a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$ » est appelée la composante orthoradiale du vecteur accélération.*

3- $\ddot{\theta}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$ *: est appelée l'accélération angulaire* (notée souvent "γ") (unité : $\mathrm{rad.s^{-2}}$ ou $\mathrm{s^{-2}}$).

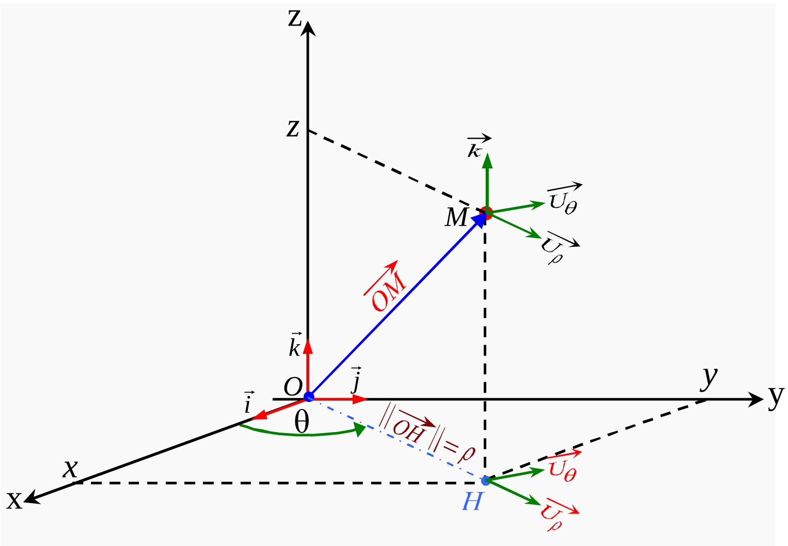
4- *La valeur de l'accélération est* $a(t) = \| \vec{a}(t) \| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2}$

II.4-3. Système de coordonnées cylindrique

Les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) sont les coordonnées polaires (ρ, θ) du plan (O, x, y) plus une coordonnée z suivant un axe perpendiculaire au plan. La base associée aux coordonnées cylindriques est donc $(\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$. Sachant que, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$ sont « mobiles », alors que le vecteur $\vec{k}$ est un vecteur « fixe ».

Donc, pour trouver les expressions des vecteurs : position, vitesse et accélération, il suffit d'ajouter la troisième composante suivant l'axe Oz à leurs expressions en coordonnées polaires.

<u>Vecteur position :</u> Le vecteur position en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM}(t) = \rho \cdot \overrightarrow{U_\rho} + z\,\vec{k}$.



Vecteur vitesse : L'expression du vecteur vitesse à l'instant t est :

$$\vec{V}(t) = v_\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + v_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + v_z\,\vec{k} = \dot{\rho}\cdot\overrightarrow{U_\rho} + \rho\cdot\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\cdot\vec{k}$$

Et son module est : $v(t) = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\cdot\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$.

Vecteur accélération : Le vecteur accélération à l'instant t est :

$$\vec{a}(t) = a_\rho\,\overrightarrow{U_\rho} + a_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + a_z\,\vec{k} = \left[\ddot{\rho} - \rho\cdot\dot{\theta}^2\right]\cdot\overrightarrow{U_\rho} + \left[\rho\cdot\ddot{\theta} + 2.\dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\right]\cdot\overrightarrow{U_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

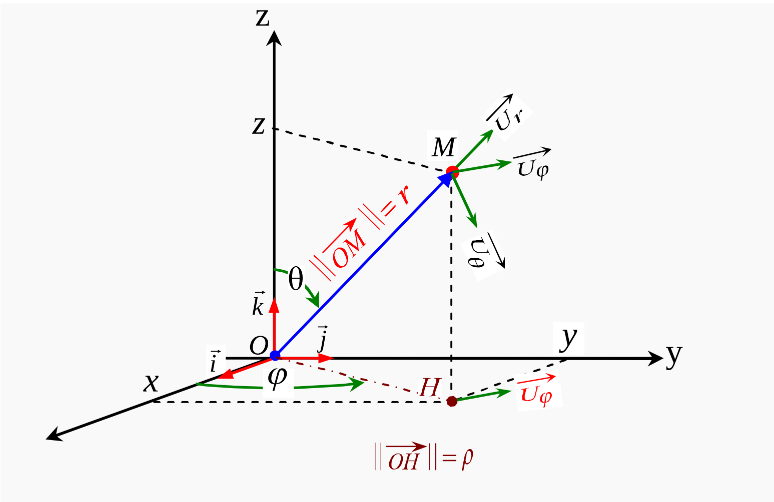
Et sa valeur à l'instant t est $a(t) = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + \ddot{z}^2}$

II.4-4. Système de coordonnées sphériques

Soit un mobile M en mouvement dans un référentiel tridimensionnel R muni de la base sphérique mobile $(\overrightarrow{U_r}\,,\,\overrightarrow{U_\theta}\,,\,\overrightarrow{U_\varphi})$.

Coordonnée polaire	Abr.	Dérivée première	Abr.	Dérivée seconde	Abr.
$r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$	r	$\dfrac{dr(t)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}$	$\dot{r}$	$\dfrac{d^2r(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$	$\ddot{r}$
$\theta(t) = arccos\dfrac{z(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}}$	θ	$\dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\dot{\theta}$	$\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	$\ddot{\theta}$
$\varphi(t) = arctan\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)$	θ	$\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}$	$\dot{\varphi}$	$\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$	$\ddot{\varphi}$

Vecteur position : En coordonnées sphérique : $\overrightarrow{OM}(t) = r\cdot\overrightarrow{U_r}$.



Vecteur vitesse : Le vecteur vitesse à l'instant t est : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(r\cdot\overrightarrow{U_r}\right)$

$$= \frac{dr}{dt}\cdot\overrightarrow{U_r} + r\cdot\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$$

D'après le chapitre I, la différentielle totale du vecteur unitaire $\overrightarrow{U_r}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{U_r} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \theta}\right)\cdot \mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial \overrightarrow{U_r}}{\partial \varphi}\right)\cdot \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\theta \cdot \overrightarrow{U_\theta} + \sin\theta \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \overrightarrow{U_\varphi}$$

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_r}}{\mathrm{d}t} == \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + \sin\theta \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} = \dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + \dot{\varphi}\cdot \sin(\theta)\cdot \overrightarrow{U_\varphi}$ (par division sur "$\mathrm{d}t$")

Alors, $\vec{V}(t) = v_r\,\overrightarrow{U_r} + v_\theta \overrightarrow{U_\theta} + v_\varphi\,\overrightarrow{U_\varphi} = \dot{r}\cdot \overrightarrow{U_r} + r\cdot\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + r\cdot \sin(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi}$

Et le module du vecteur vitesse est : $v(t) = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2}$.

<u>Vecteur accélération :</u> En coordonnées sphériques, l'expression du vecteur accélération est :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\cdot \overrightarrow{U_r} + r\cdot\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + r\cdot \sin(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi}\right)$$

$$= \left[\ddot{r}\cdot \overrightarrow{U_r} + \dot{r}\cdot\left(\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + \dot{\varphi}\cdot \sin(\theta)\cdot \overrightarrow{U_\varphi}\right)\right] + \left[\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$+ \left[\dot{r}\cdot \sin(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} + r\cdot \frac{\mathrm{d}(\sin(\theta))}{\mathrm{d}t}\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} + r\cdot \sin(\theta)\cdot\ddot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} + r\cdot \sin(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\varphi}}{\mathrm{d}t}\right]$$

D'après le chapitre I, nous avons :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta} = -\mathrm{d}\theta\cdot \overrightarrow{U_r} + \cos\theta\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \overrightarrow{U_\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_r} + \cos(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi}$$

Et : $\mathrm{d}\overrightarrow{U_\varphi} = -\sin\theta\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \overrightarrow{U_r} - \cos\theta\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \overrightarrow{U_\theta} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\varphi}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\cdot\left[\sin\theta\cdot \overrightarrow{U_r} + \cos\theta\cdot \overrightarrow{U_\theta}\right]$

Donc : $\vec{a}(t) = \left[\ddot{r}\cdot \overrightarrow{U_r} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + \dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot \sin(\theta)\cdot \overrightarrow{U_\varphi}\right] + \left[\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot \overrightarrow{U_\theta} - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot \overrightarrow{U_r}\right.$

$$\left. + r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cdot \cos(\theta)\cdot \overrightarrow{U_\varphi}\right] + \left[\dot{r}\cdot \sin(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} + r\cdot\dot{\theta}\cdot \cos(\theta)\cdot\dot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi}\right.$$

$$\left. + r\cdot \sin(\theta)\cdot\ddot{\varphi}\cdot \overrightarrow{U_\varphi} - r\cdot \sin^2(\theta)\cdot\dot{\varphi}^2\cdot \overrightarrow{U_r} - r\cdot \sin(\theta)\cdot \cos(\theta)\cdot\dot{\varphi}^2\cdot \overrightarrow{U_\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = a_r\overrightarrow{U_r} + a_\theta\,\overrightarrow{U_\theta} + a_\varphi\,\overrightarrow{U_\varphi}$$

$$= \left[\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2 - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot \sin^2(\theta)\right]\cdot \overrightarrow{U_r} + \left[r\cdot\ddot{\theta} + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta} - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot \sin(\theta)\cdot \cos(\theta)\right]\cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

$$+ \left[r\cdot\ddot{\varphi}\cdot \sin(\theta) + 2\cdot r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cdot \cos(\theta) + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot \sin(\theta)\right]\cdot \overrightarrow{U_\varphi}$$

La valeur de l'accélération à l'instant t est $a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2}$

II.5- Types de mouvements

II.5-1. Le mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne est un mouvement qui s'effectue le long d'une ligne droite. Au cours de ce mouvement, la trajectoire du mobile M se confond avec l'un des axes du référentiel d'étude (R), par exemple avec l'axe Ox des coordonnées cartésiennes.

Donc, le vecteur position à l'instant t s'écrit : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\cdot\vec{i}$

Et les vecteur vitesse et accélération sont : $\vec{V}(t) = v_x(t)\cdot\vec{i}$ et $\vec{a}(t) = a_x(t)\cdot\vec{i}$

Les relations entre les composantes $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$ peuvent être déterminer par les intégrales :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}x(t) = \int v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Et $$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{d}v_x(t) = \int a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Si " t_0 " est l'instant initial du mouvement dans le référentiel (R), alors les intégrales précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x(t_0)}^{x(t)} \mathrm{d}x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t + x(t_0) \;\;.......(1) \\ \displaystyle\int_{v(t_0)}^{v(t)} \mathrm{d}v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t + v_x(t_0) \;\;....(2) \end{cases}$$

Avec : $x(t_0)$ et $v_x(t_0)$ sont la position et la vitesse du mobile à l'instant t_0 (notées souvent : la position initale " x_0 " et la vitesse initiale " v_0 ").

Selon les variations de l'accélération avec le temps, les types de mouvement rectiligne suivants peuvent être distingués :

1- Mouvement rectiligne uniforme (MRU):

Il est caractérisé par un vecteur vitesse constant $\vec{V}(t) = \vec{v} = \overrightarrow{cte}$ (la valeur, la direction et le sens du vecteur vitesse restent inchangés). L'accélération est donc nulle : $\vec{a}(t) = \vec{0}$.

L'équation (2) nous donne : la composante du vecteur vitesse est $v_x(t) = v_0 = v$,

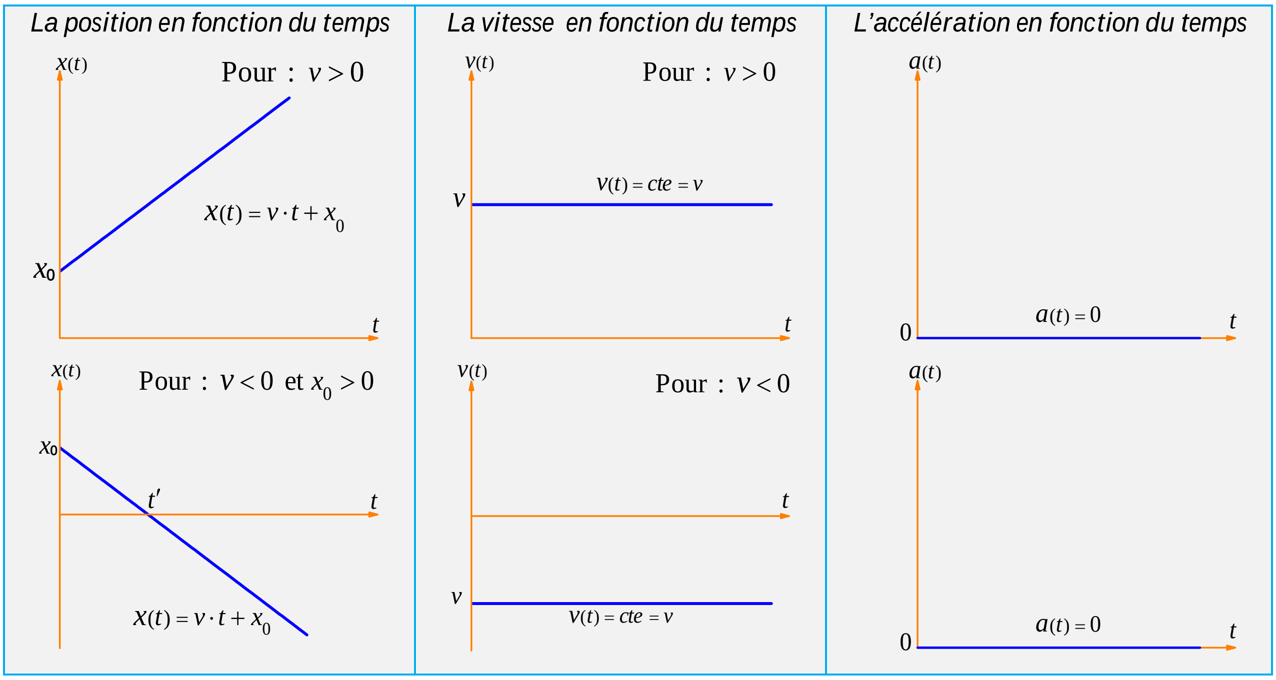
Et l'équation (1) nous donne : $x(t) = v\cdot[t - t_0] + x_0$

Pour simplifier les expressions, on choisit souvent l'instant initial t_0 comme origine du repère de temps, alors : $t_0 = 0$. Dans ce cas l'équation horaire d'un MRU, est : $x(t) = v\cdot t + x_0$

<u>Cas Particulier :</u> Si $x_0 = 0$, c'est-à-dire que la position initiale du mouvement est l'origine O du repère d'espace. L'équation horaire s'écrit sous sa forme la plus simple : $x(t) = v\cdot t$.

Représentation graphique des fonctions $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$

Mouvement rectiligne uniforme (MRV)



2- Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV):

Si le mobile a un vecteur d'accélération $\vec{a}(t)$ constant ($\vec{a}(t) = a \cdot \vec{i} = \overrightarrow{cte}$), son mouvement est dit rectiligne uniformément varié.

Dans ce cas, la composante du vecteur vitesse s'écrit : $v_x(t) = a \cdot [t - t_0] + v_0$.

Et l'équation (1) devient : $x(t) = \int_{t_0}^{t} \left(a \cdot [t - t_0] + v_0\right) \mathrm{d}t + x_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{2} \cdot [t - t_0]^2 + v_0 \cdot [t - t_0] + x_0$$

Si on choisi : $t_0 = 0$, l'équation horaire d'un MRUV est : $x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$

Et l'équation de la vitesse s'écrit : $v(t) = a \cdot t + v_0$

__Remarques :__

1- *Si on élimine le temps entre les équations de $v(t)$ et $x(t)$, on trouve :*

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a} \quad \Rightarrow \quad x(t) - x_0 = \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{v(t) - v_0}{a}\right]^2 + v_0 \cdot \left[\frac{v(t) - v_0}{a}\right] = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2 \cdot a}$$

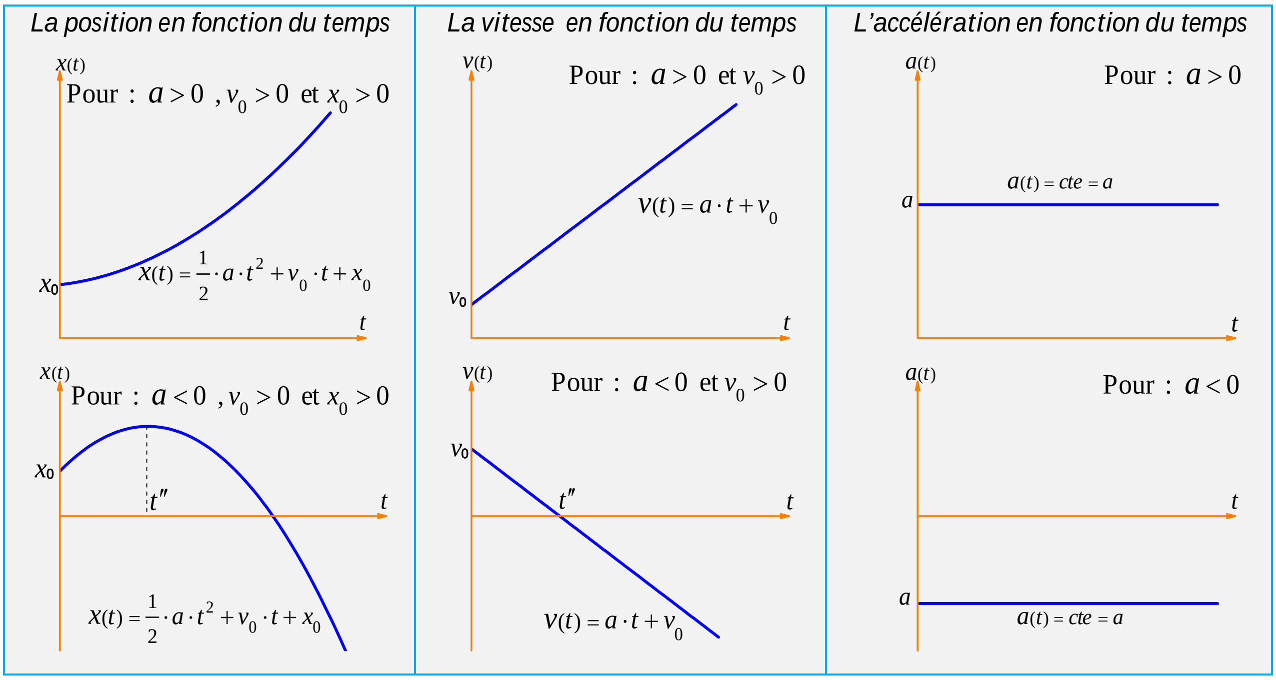
Cette équation relie la position à l'instant t d'un mobile à sa vitesse.

2- *Si $a \cdot v(t) > 0$ (plus précisément, si le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}(t) > 0$) : Le mouvement du mobile est dit uniformément accéléré.*

3- *Si $a \cdot v(t) < 0$ (plus précisément, si le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}(t) < 0$) : Le mouvement du mobile est dit uniformément ralenti (ou décéléré, ou retardé) .*

Représentation graphiques des fonctions $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$

Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)



Interprétation des graphes

La position en fonction du temps

La pente du graphe (ou la pente de la tangente au graphe) à l'instant t donne la vitesse à cet instant.

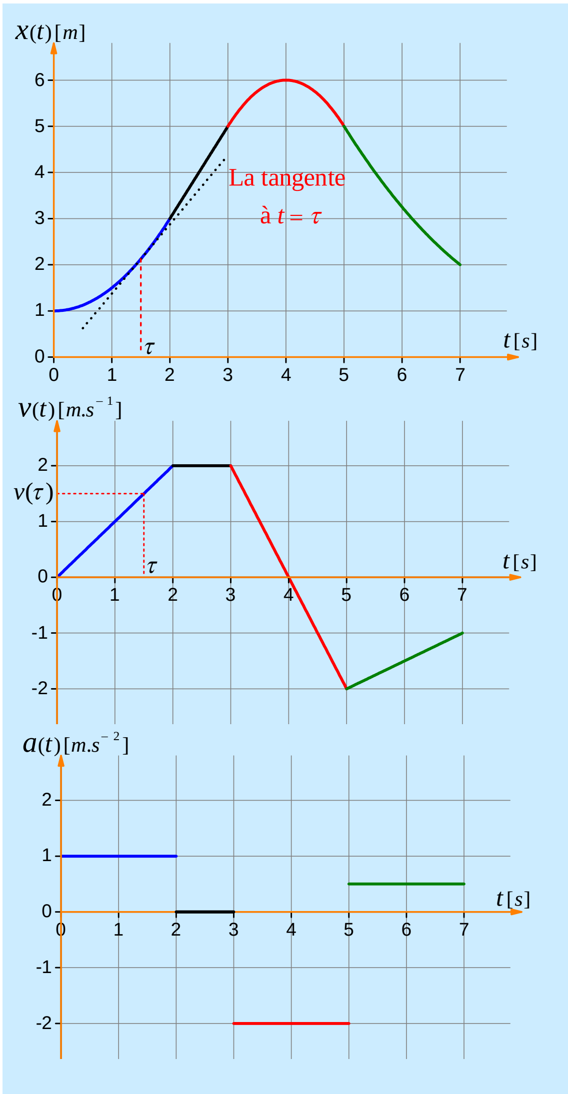
La vitesse en fonction du temps

- La pente du graphe donne l'accélération.
- L'aire (signée positive ou négative) entre le graphe et l'axe du temps donne le déplacement.

  S'elle est négative (le graphe ou une partie de celui-ci est sous l'axe du temps) le déplacement est en sens négatif.

L'accélération en fonction du temps

L'aire (signée positive ou négative) entre le graphe et l'axe du temps donne la variation de la vitesse.



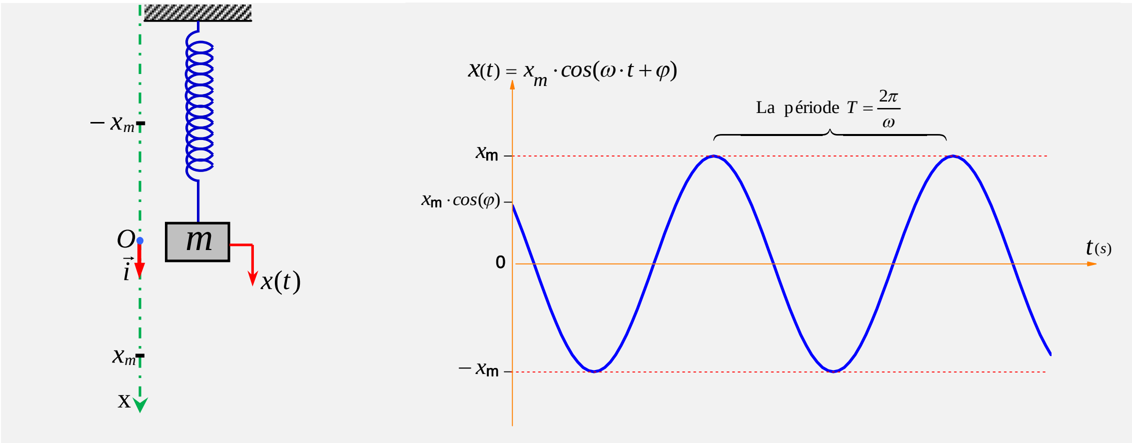
3- Mouvement rectiligne sinusoïdal :

Le mouvement d'un point matériel M est rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est droite (par exemple l'axe Ox) et son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = x_m \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ ou } x(t) = x_m \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

C'est le mouvement par exemple d'une masse attachée à un ressort.

Avec :
- $x(t)$: L'élongation ou la position à l'instant t (unité : m).
- x_m : L'amplitude ou l'élongation maximale du mouvement oscillatoire du point M autour l'origine O. (La fonction sinusoïdale variant entre -1 et $+1$, alors M oscille entre les positions $-x_m$ et x_m)
- ω : La pulsation du mouvement oscillatoire (unité : $\mathrm{rad.s^{-1}}$ ou $\mathrm{s^{-1}}$), elle n'est pas une vitesse angulaire.
- $\Phi(t) = \omega \cdot t + \varphi$: La phase à l'instant t.
- φ : La phase initiale, c'est-à-dire à $t = 0$ (unité : rad).



Remarques :

1- *Le mouvement sinusoïdal est caractérisé par une grandeur appelée «* la période T *», qui correspond à la durée d'une oscillation complète* (l'intervalle de temps entre deux passages successifs du mobile au même point et dans le même sens*).*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(unité : s)}.$$

2- *Une autre caractéristique du mouvement sinusoïdal est «* la fréquence f *», qui correspond au nombre des oscillations par unité de temps* (seconde).

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{(unité : Hz ou } \mathrm{s^{-1}}).$$

Expressions de la vitesse et de l'accélération du mouvement sinusoïdal

- La vitesse du mobile (l'oscillateur) est : $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$

  Par exemple, si : $x(t) = x_m \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow v(t) = x_m \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$

- L'accélération de l'oscillateur est : $a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}$

  Donc, si : $x(t) = x_m \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) \Rightarrow a(t) = -x_m \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$$= -\omega^2 \cdot x$$

Alors, on constate que l'accélération peut s'exprimer par la relation :

$$a(t) = \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Remarque :

L'équation : $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$ est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, et c'est une équation différentielle d'ordre 2 dont la solution s'écrit sous la forme sinusoïdale :

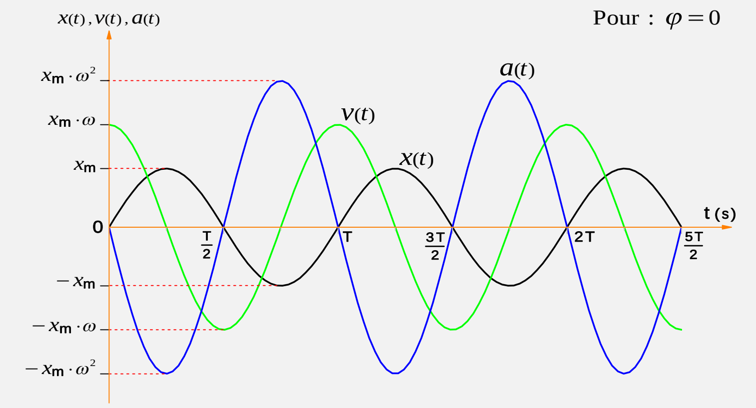
$$x(t) = x_m \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi) = x_m \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi') \qquad (\text{avec : } \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Représentation graphiques des fonctions $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$

$$x(t) = x_m \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$v(t) = x_m \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

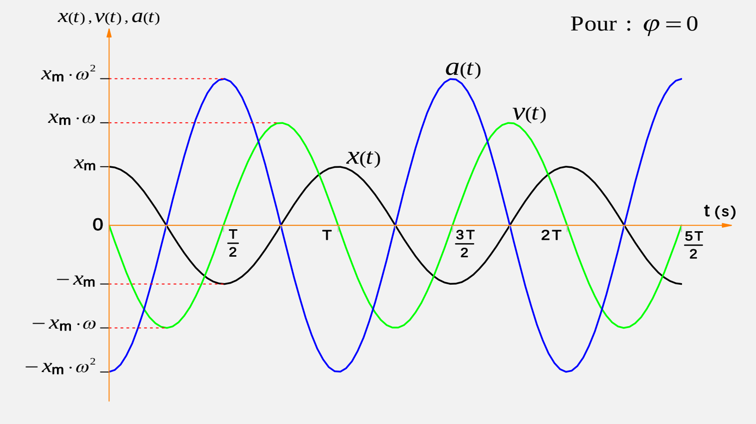
$$a(t) = -x_m \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



$$x(t) = x_m \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$v(t) = -x_m \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = -x_m \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



I.5-2. Le mouvement curviligne

Si un mobile M se déplace sur une trajectoire courbe, son mouvement est appelé mouvement curviligne.

La trajectoire courbe peut être en deux dimensions (dans un plan) ou en trois dimensions.

1- Système de coordonnées curvilignes (intrinsèques)

A chaque position M d'une courbe (C), il est possible d'associer un référentiel tangent à la courbe et d'origine M dont les axes sont définis par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_T}$, $\overrightarrow{U_N}$ et $\overrightarrow{U_B}$, avec :

- $\overrightarrow{U_T}$ (le tangentiel) : Il est dans la direction tangente à la trajectoire, et orienté dans le sens positif donné à la trajectoire.

- $\overrightarrow{U_N}$ (le normal) : Il est perpendiculaire à la tangente, et dirigé vert un point fixe appelé le centre de courbure de la trajectoire.
- $\overrightarrow{U_B}$: (le binormal) : il est perpendiculaire à $\overrightarrow{U_T}$ et à $\overrightarrow{U_N}$, alors $\overrightarrow{U_B} = \overrightarrow{U_T} \wedge \overrightarrow{U_N}$) .

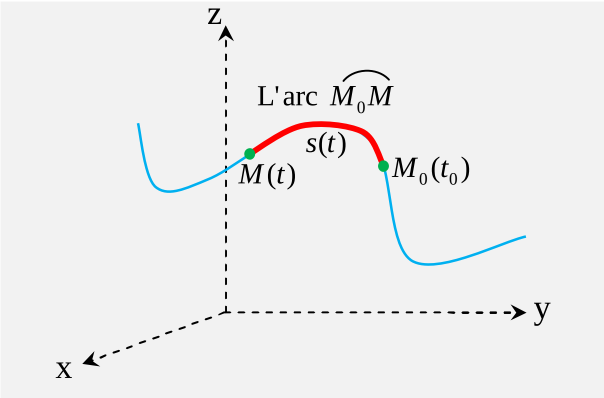
Remarques :

1- *La base vectorielle* $\left(\overrightarrow{U_T}, \overrightarrow{U_N}, \overrightarrow{U_B}\right)$ *est appelée* base de Frenet.

2- *Le plan contenant les vecteurs* $\overrightarrow{U_T}$ *et* $\overrightarrow{U_N}$ *est appelé* plan osculateur.

a. Abscisse curviligne

Soit un point matériel M qui se déplace le long d'une trajectoire curviligne (C). La position intrinsèque de M à l'instant t , par rapport à une position initiale M_0, est défini par l' abscisse curviligne : $s(t) = \widehat{M_0M}(t)$



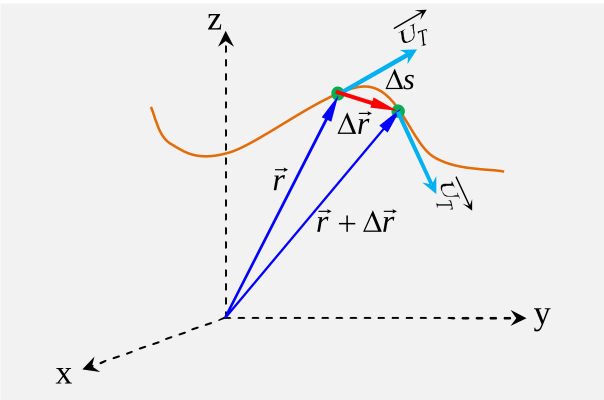
Avec, $\widehat{M_0M}$ c'est la longueur de l'arc entre M_0 et M (ou la distance parcourue le long de la trajectoire (C) de M_0 à M).

Remarque :

La distance $\widehat{M_0M}$ est mesurée le long de la trajectoire, alors que le module du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_0M}$ est mesurée le long du segment droit $[M_0, M]$.

b. Vecteur vitesse en coordonnées intrinsèques

Soit $\Delta\vec{r}$ le vecteur déplacement du point M sur un intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$, et Δs la distance parcourue pendant cet intervalle ($\Delta s \geq \| \Delta\vec{r} \|$).



Si Δt tend vers zéro ou les positions $M(t)$ et $M(t+\Delta t)$ sont très proches l'une de l'autre (formant presque un segment droit), donc la direction de $\Delta\vec{r}$ est approximativement la même que le tangentiel $\overrightarrow{U_T}$ et son module Δr est égale à Δs.

$\Rightarrow$ Le vecteur déplacement est : $\Delta\vec{r} = \Delta s \cdot \overrightarrow{U_T}$

Le vecteur vitesse moyenne est : $\vec{V}_{\text{moy}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{U_T}$

Le vecteur vitesse instantanée est : $\vec{V}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{U_T} = \frac{ds}{dt} \cdot \overrightarrow{U_T}$$

$$= \dot{s}(t) \cdot \overrightarrow{U_T}$$

<u>Remarques :</u>

1- *Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, et orienté dans le sens du mouvement.*

2- Le vecteur $\vec{V}(t)$ *peut s'écrit sous la forme :* $\vec{V}(t) = v(t) \cdot \overrightarrow{U_T}$,

Avec, $v(t)\cdot$ *: le module de* $\vec{V}(t)$ ($v(t) = |\dot{s}(t)|$, ou : $v^2(t) = \dot{s}^2(t)$).

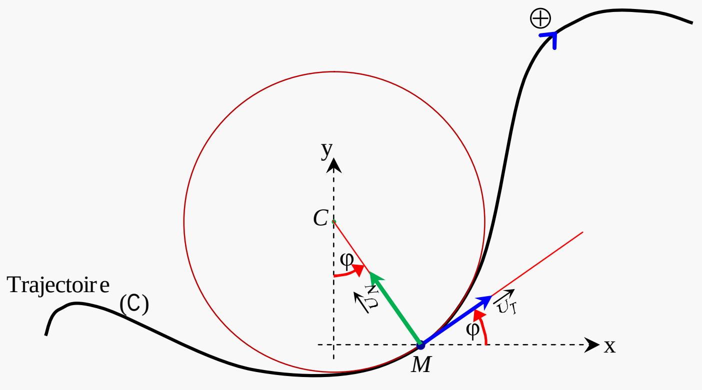
c. <u>Vecteur accélération en coordonnées intrinsèques</u>

Le vecteur accélération est : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}$

$$= \frac{d\left(\dot{s} \cdot \overrightarrow{U_T}\right)}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} \cdot \overrightarrow{U_T} + \dot{s} \cdot \frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}$$

Accélération normale et accélération tangentielle

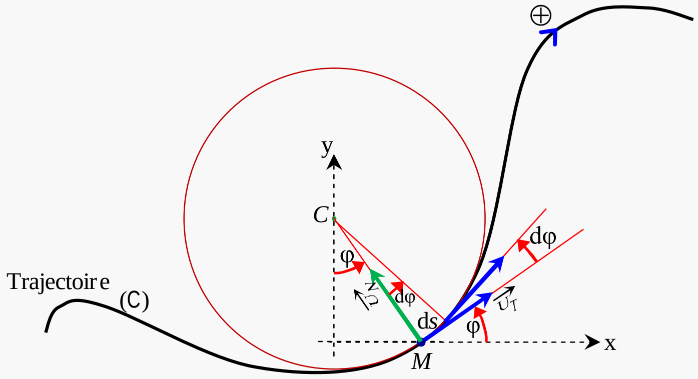
À un instant t, au point M de la trajectoire, le vecteur $\overrightarrow{U_T}$ fait un angle " φ " avec l'axe Ox.



Alors, $\overrightarrow{U_T} = cos(\varphi) \cdot \vec{i} + sin(\varphi) \cdot \vec{j}$,

et $\overrightarrow{U_N} = -sin(\varphi) \cdot \vec{i} + cos(\varphi) \cdot \vec{j}$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{U_T}$, et dirigé vert un point fixe C)

À l'instant $t + dt$, la distance parcourue est ds, et vecteur $\overrightarrow{U_T}$ tourne d'un angle " $d\varphi$ " .



$\Rightarrow$ la dérivée $\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}$ est : $\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\left[-sin(\varphi)\cdot\vec{i} + cos(\varphi)\cdot\vec{j}\right] = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\overrightarrow{U_N}$

De plus on a : $ds = R\cdot d\varphi$,

Avec : "R" c'est le rayon de courbure de la trajectoire (ou le rayon du cercle osculateur en point M, dont le centre est C, alors : $R = CM$)

Donc, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\dot{s}$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\dot{s}\cdot\overrightarrow{U_N}$$

Alors, le vecteur accélération devient : $\vec{a}(t) = \frac{d\dot{s}}{dt}\cdot\overrightarrow{U_T} + \dot{s}\cdot\frac{1}{R}\cdot\dot{s}\cdot\overrightarrow{U_N} = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$

$$= \frac{dv(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{U_T} + \frac{v^2(t)}{R}\cdot\overrightarrow{U_N}$$

$$= a_T(t)\cdot\overrightarrow{U_T} + a_N(t)\cdot\overrightarrow{U_N}$$

Avec : $a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt}$: est la composante tangentielle (ou l'accélération tangentielle) ;

$a_N(t) = \frac{v^2(t)}{R}$: est la composante normale (ou l'accélération normale) .

Le module de l'accélération est donnée par : $a(t) = \sqrt{a_T^2(t) + a_N^2(t)}$

<u>*Remarques :*</u>

1- *La composante $a_N(t)$ étant toujours positive, donc le vecteur $\vec{a}(t)$ est toujours tourné vers la concavité de la trajectoire.*

2- *Avec une simple calcul, on peut trouver le module du produit vectoriel $\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)$ sous la forme : $\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\| = \frac{v^3(t)}{R}$. Cette relation est souvent utilisée pour trouver le rayon de courbure R.*

3- *Dans le cas : $a_T(t) = 0$, le mouvement est dit mouvement curviligne uniforme* (les modules : $v(t) = cte$ et $a(t) = a_N = \frac{v^2(t)}{R}$).

4- *Dans le cas d'une trajectoire à très grand rayon de courbure, c'est-à-dire :* $R \to \infty \Rightarrow a_N(t) = 0$, *donc le mouvement est rectiligne.*

d. Mouvement circulaire

Si le mobile M se déplace sur un cercle ou une partie de cercle par rapport à un référentiel donnée, son mouvement est dit un mouvement circulaire (cas particulier du mouvement curviligne).

Dans ce cas, le rayon de courbure est constant $R = cte$ (égale le rayon d'un cercle de centre O).

1- *Mouvement circulaire en coordonnées polaires* $(\rho = R, \theta)$

A l'instant t,

- Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \cdot \overrightarrow{U_\rho} = R \cdot \overrightarrow{U_\rho}$$

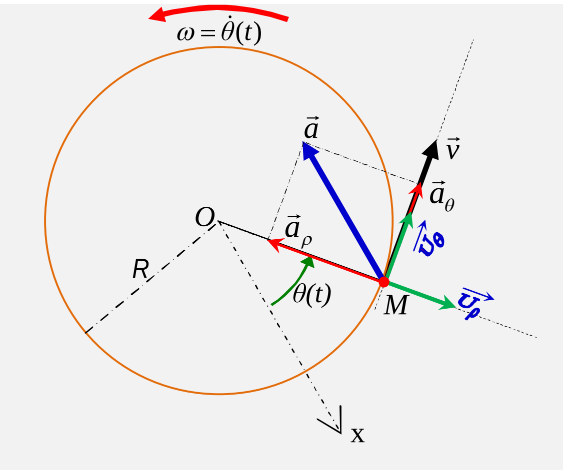
- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

$$= R \cdot \omega \cdot \overrightarrow{U_\theta}$$

Avec : $\dot{\theta} = \omega$ c'est la vitesse angulaire.

Le module de $\vec{V}(t)$ est : $v(t) = R \cdot |\omega(t)|$



- Le vecteur accélération est : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = -R \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{U_\rho} + R \cdot \dot{\omega} \cdot \overrightarrow{U_\theta}$

Et son module est : $a(t) = R \cdot \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}$

2- *Mouvement circulaire en coordonnées intrinsèques*

A l'instant t,

- L'abscisse curviligne est : $s(t) = R \cdot \theta(t)$
- Le vecteur vitesse est :

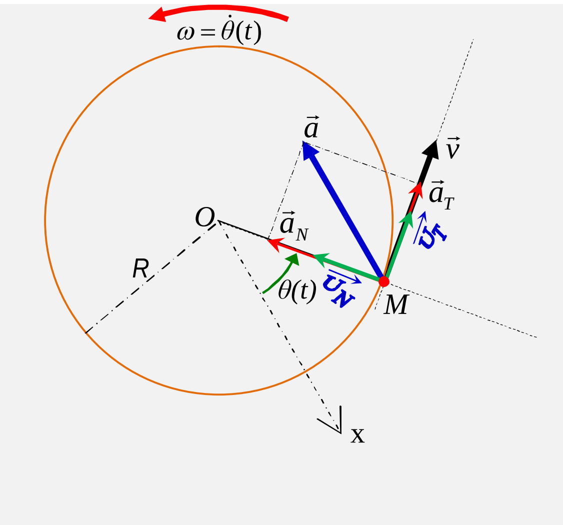
$$\vec{V}(t) = \dot{s}(t) \cdot \overrightarrow{U_T} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{U_T}$$

$$= R \cdot \omega \cdot \overrightarrow{U_T}$$

- Le vecteur accélération est :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{U_T} + \frac{v^2(t)}{R} \cdot \overrightarrow{U_N}$$

$$= R \cdot \dot{\omega} \cdot \overrightarrow{U_T} + R \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{U_N}$$



$\Rightarrow$ L'accélération tangentielle est : $a_T = R \cdot \dot{\omega}$

Et l'accélération normale est : $a_N = R \cdot \omega^2$

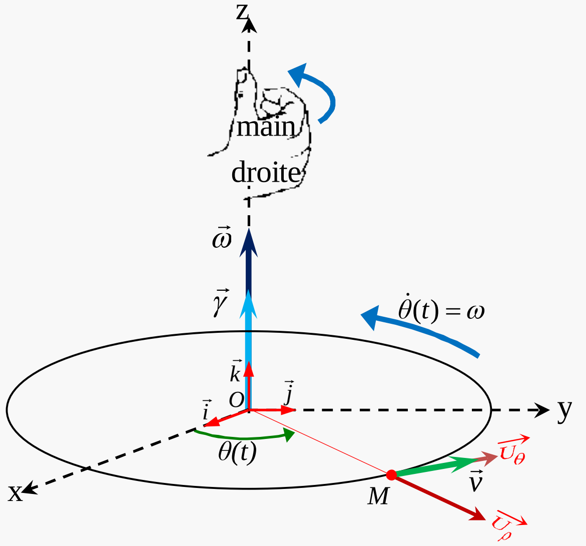
Vecteurs vitesse angulaire et accélération angulaire de rotation

On définit le vecteur vitesse angulaire caractérisant la rotation dans le plan $(O\,,x\,,y)$, par la relation :

$$\vec{\omega}(t)=\omega(t)\cdot\vec{k}=\dot{\theta}(t)\cdot\vec{k}$$

Et le vecteur d'accélération angulaire par :

$$\vec{\gamma}(t)=\gamma(t)\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\dot{\omega}(t)\cdot\vec{k}$$
$$=\ddot{\theta}(t)\cdot\vec{k}$$



<u>*Remarques :*</u>

1- *Les vecteurs* $\vec{\omega}(t)$ *et* $\vec{\gamma}(t)$ *sont portés par l'axe de rotation* Oz, *et leurs sens sont déterminés par la règle de la mai droite.*

2- *Si le vecteur unitaire* $\overrightarrow{U_\theta}$ *s'écrit sous forme de produit vectoriel :* $\overrightarrow{U_\theta}=\vec{k}\wedge\overrightarrow{U_\rho}$, *le vecteur vitesse* $\vec{V}(t)$ *d'un mouvement circulaire peut s'écrire :*

$$\vec{V}(t)=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}=R\cdot\dot{\theta}(t)\cdot\overrightarrow{U_\theta}=R\cdot\omega(t)\cdot\left(\vec{k}\wedge\overrightarrow{U_\rho}\right)$$
$$=(\,\omega(t)\cdot\vec{k}\,)\wedge(\,R\cdot\overrightarrow{U_\rho}\,)$$
$$=\vec{\omega}(t)\wedge\overrightarrow{OM}$$

Cette relation : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}(t)\wedge\overrightarrow{OM}$ est valable pour tout mouvement circulaire et pour tout vecteur de module constant et en rotation.

Exemple : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\rho}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}(t)\wedge\overrightarrow{U_\rho}$; $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{U_\theta}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}(t)\wedge\overrightarrow{U_\theta}$.

3- *Cas particuliers de mouvement circulaire*

a. Mouvement circulaire uniforme (MCU):

La vitesse angulaire de rotation est constante : $\omega(t)=\omega_0=cte\ \Rightarrow\vec{\gamma}(t)=\vec{0}$

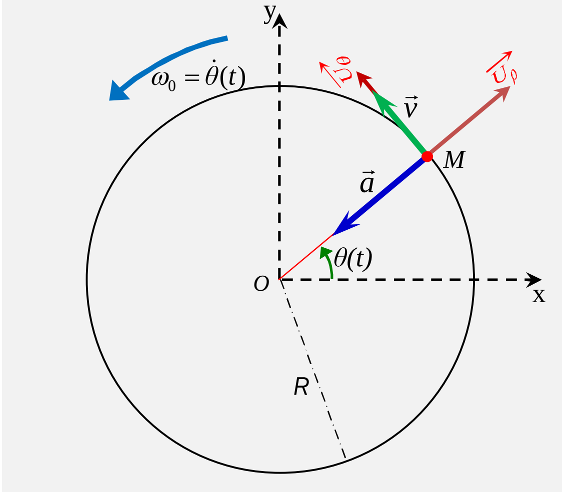
Donc, l'équation différentielle du mouvement est donnée par : $\dot{\theta}(t)=\omega_0$

Par intégration, l'équation horaire du MCU est : $\theta(t)=\int_{t_0}^{t}\omega_0\,\mathrm{d}t+\theta(t_0)$

$$=\omega_0\cdot[t-t_0]+\theta(t_0)$$

Pour : $t_0 = 0$ et $\theta(t_0 = 0) = \theta_0$,

On peut écrire : $\theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0$



- Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R \cdot \overrightarrow{U_\rho} = -R \cdot \overrightarrow{U_N}$$

- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}(t) = R \cdot \omega_0 \cdot \overrightarrow{U_\theta} = R \cdot \omega_0 \cdot \overrightarrow{U_T}$$

,

Et : $v_0 = \left\| \vec{V}(t) \right\| = R \cdot |\omega_0|$

- Le vecteur accélération est :

$v(t) = cte \Rightarrow a_T(t) = 0$

Alors : $\vec{a}(t) = \vec{a}_N(t) = R \cdot \omega_0^2 \cdot \overrightarrow{U_N} = -R \cdot \omega_0^2 \cdot \overrightarrow{U_\rho}$

<u>*Remarque :*</u>

Un MCU est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète (dirigée vert le centre).

b. Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV):

L'accélération angulaire est constante : $\gamma(t) = \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \gamma = cte$.

Par intégration, on obtient : $\displaystyle\int_{\omega(t_0)}^{\omega(t)} d\omega(t) = \gamma \cdot \int_{t_0}^{t} dt$

$\Rightarrow \omega(t) = \gamma \cdot [t - t_0] + \omega(t_0)$

Pour $t_0 = 0$ et $\omega(t_0 = 0) = \omega_0$, nous avons : $\omega(t) = \gamma \cdot t + \omega_0$

De même, l'intégration de la relation : $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$, nous donne :

$$\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} d\theta(t) = \int_{t_0}^{t} (\gamma \cdot [t - t_0] + \omega_0) dt \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{\gamma}{2} \cdot [t - t_0]^2 + \omega_0 \cdot [t - t_0] + \theta(t_0)$$

Si $t_0 = 0$ et $\theta(t_0) = \theta_0$, on peut écrire : $\theta(t) = \dfrac{\gamma}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0$

<u>*Remarques :*</u>

1- *Si la vitesse angulaire ω augmente avec le temps, le mouvement est dit circulaire uniformément accéléré .*

2- *Si la vitesse angulaire ω diminue avec le temps, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).*

3

Mouvement Relatif

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Différencier entre mouvement absolu et mouvement relatif.
- Distinguer entre la vitesse absolue et relative et la vitesse d'entrainement.
- Comprendre et utiliser les lois de composition des vitesses et des accélérations.

III.1- Introduction

Le mouvement d'un point matériel (ou d'un corps) ne peut être étudié que par rapport à un référentiel, donc on dit que le mouvement est une notion relative, et que l'état de mouvement ou de repos d'un point dépend du référentiel utilisé.

Le mouvement relatif est la partie de la cinématique qui permet de trouver les relations entre les vecteurs position, vitesse et accélération d'un mobile mesurées par rapport à différents référentiels.

III.2- Définitions

On considère deux référentiels $\mathrm{R}(O;\ x,y,z)$ et $\mathrm{R}'(O';\ x',y',z')$, de bases respectives $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

<u>Référentiel absolu</u>

On suppose que (R) est fixe, on l'appel référentiel absolu.

La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ liée à (R) est appelée base absolue, elle est fixe par rapport à (R).

Donc, les dérivées temporelles dans (R) sont nulles : $\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}$

<u>Référentiel relatif</u>

Le référentiel (R′) est appelé référentiel relatif; il est en mouvement par rapport à (R).
La base $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ liée à (R′) est appelée base relative, elle est fixe par rapport à (R′)

(c'est-à-dire : $\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R')} = \left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R')} = \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R')} = \vec{0}$).

<u>Mouvement absolu d'un point</u>

Le mouvement d'un point M par rapport au référentiel absolu (R) est appelé mouvement absolu.

<u>Mouvement relatif d'un point</u>

Le mouvement du point M par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif.

<u>Mouvement d'entraînement</u>

Le mouvement de (R′) par rapport à (R) est appelé mouvement d'entraînement.

<u>Cas 1 :</u> (R′) en translation rectiligne par rapport à (R)

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ sont aussi fixe par rapport au référentiel (R) : $\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{0}$

<u>Cas 2 :</u> (R′) en rotation par rapport à (R)

Si le référentiel (R′) est en rotation par rapport au référentiel (R) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Les vecteurs $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ et $\vec{k}'$ sont aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Alors, les dérivées temporelles $\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)}$, $\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)}$ et $\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)}$ peuvent être obtenus par les relations : $\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}'$; $\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{j}'$; $\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{k}'$ (d'après chapitre II)

<u>Cas général :</u> (R′) en mouvement quelconque par rapport à (R)

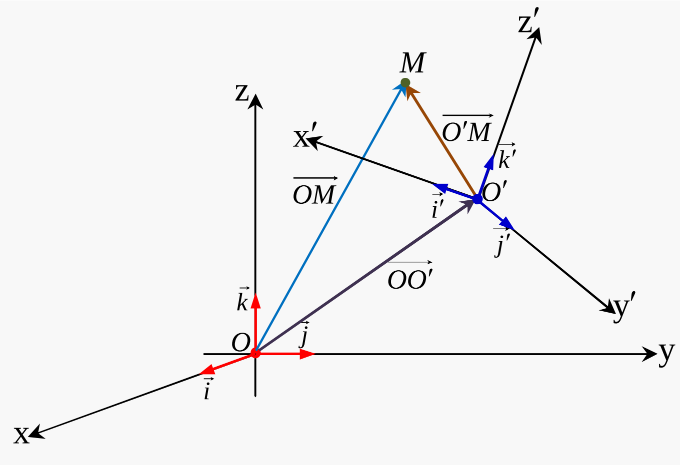
Le mouvement quelconque d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation.

III.3- Relations entre le mouvement absolu et le mouvement relatif d'un point

On considère un point matériel M en mouvement par rapport à deux référentiels $R(O;\ x,y,z)$ et $R'(O';\ x',y',z')$.

Deux bases orthonormées $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ sont associées respectivement aux référentiels (R) et (R′).

On suppose que le mouvement de (R′) par rapport à (R) est quelconque et caractérisé par une vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



III.3-1. Relation des vecteurs position

Dans le référentiel fixe (R), la position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), alors : $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$

Dans le référentiel fixe (R′), la position du point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x', y', z'), alors : $\overrightarrow{O'M} = x'\cdot\vec{i}' + y'\cdot\vec{j}' + z'\cdot\vec{k}'$

La relation entre les deux vecteurs positions est : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\Rightarrow \quad x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\cdot\vec{i}' + y'\cdot\vec{j}' + z'\cdot\vec{k}'$$

III.3-2. Relation des vecteurs vitesse

La vitesse de M par rapport au référentiel absolu (R) est appelée la vitesse absolue, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel (R) :

$$\vec{V}_{(M/\mathrm{R})} = \vec{V}_a = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k} + x\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} + y\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} + z\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k} \qquad \text{(puisque : } \left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \vec{0}\text{)}$$

La vitesse de M par rapport au référentiel relatif (R′) est appelée la vitesse relative, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ dans le référentiel (R′) :

$$\vec{V}_{(M/\mathrm{R}')} = \vec{V}_r = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}' + x'\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}' \qquad \text{(puisque : } \left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \vec{0}\text{)}$$

La dérivation par rapport au temps de la relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_a = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}' + x'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + y'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + z'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})}$$

$$= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \vec{V}_r + x'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right) + y'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right) + z'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right)$$

$$= \vec{V}_r + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \vec{\omega}\wedge\left(x'\cdot\vec{i}' + y'\cdot\vec{j}' + z'\cdot\vec{k}'\right)$$

$$= \vec{V}_r + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

Donc, la relation entre les deux vecteurs vitesse est : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

Avec : $\vec{V}_e = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$ est appelée vitesse d'entraînement.

__Remarques :__

1- *La relation $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ est appelée la loi de composition des vitesses.*

2- *Si (R′) est en translation rectiligne par rapport à (R), donc $\vec{V}_e = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})}$.*

3- *Si (R′) est en rotation autour d'un axe passant par l'origine commun des deux référentiels $O \equiv O'$, alors : $\vec{V}_e = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.*

III.3-2. Relation des vecteurs accélération

L'accélération absolue de M est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel (R):

$$\vec{a}_{(M/\mathrm{R})} = \overrightarrow{a_a} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}$$

L'accélération relative de M est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif (R′) :

$$\vec{a}_{(M/\mathrm{R}')} = \overrightarrow{a_r} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R}')} = \ddot{x}'\cdot\vec{i}' + \ddot{y}'\cdot\vec{j}' + \ddot{z}'\cdot\vec{k}'$$

La dérivation par rapport au temps de la relation :

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}' + x'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + y'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + z'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})}$$

donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{(\mathrm{R})} + \ddot{x}'\cdot\vec{i}' + \ddot{y}'\cdot\vec{j}' + \ddot{z}'\cdot\vec{k}' + 2\cdot\left[\dot{x}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{y}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{z}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})}\right]$$

$$+ x'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})} + y'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})} + z'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})}$$

Avec : $\dot{x}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{y}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} + \dot{z}'\cdot\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \dot{x}'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right) + \dot{y}'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right) + \dot{z}'\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right)$

$$= \vec{\omega}\wedge\left(\dot{x}'\cdot\vec{i}' + \dot{y}'\cdot\vec{j}' + \dot{z}'\cdot\vec{k}'\right)$$

$$= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$$

Et :
$$\begin{cases} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{i}' + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{i}' + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right) \\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{j}' + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{j}' + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right) \\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right)\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{k}' + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}\right|_{(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{k}' + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)\bigg|_{(R)}+y'\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)\bigg|_{(R)}+z'\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\bigg|_{(R)}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'\cdot\vec{i}'+y'\cdot\vec{j}'+z'\cdot\vec{k}'\right)$$

$$+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\left(x'\cdot\vec{i}'+y'\cdot\vec{j}'+z'\cdot\vec{k}'\right)\right)$$

$$=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

Donc le résultat de dérivation est :

$$\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\bigg|_{(R)}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)+2\cdot\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$$

Et la relation entre les deux vecteurs accélération devient : $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_e}+\overrightarrow{a_c}$

Avec : $\overrightarrow{a_e}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\bigg|_{(R)}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$ est l'accélération d'entraînement.

$\overrightarrow{a_c}=2\cdot\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$ est appelée accélération de Coriolis.

Remarques :

1- *La relation* $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_e}+\overrightarrow{a_c}$ *est appelée la loi de composition des accélérations .*

2- *Si (R′) est en translation rectiligne par rapport à (R), donc* $\overrightarrow{V_e}=\overrightarrow{cte}$*, et par conséquence :* $\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}$

3- *Si (R′) est en rotation uniforme (* $\vec{\omega}=\overrightarrow{cte}$ *) et* $O\equiv O'$ *, donc :* $\overrightarrow{a_e}=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)$

4

Dynamique du Point Matériel

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Apprendre et appliquer les trois lois de Newton.
- Comprendre les caractéristiques de certaines forces (poids, force normale, force de frottement et force de rappel).
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique.
- Introduire la notion du moment cinétique.
- Apprendre et appliquer les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

IV.1- Introduction

La dynamique est une partie de la mécanique consiste à étudier les causes physiques qui produisent le mouvement des corps (les forces).

L'objectif principal de la dynamique est d'établir une relation entre le mouvement et ses causes.

IV.2- Définitions

La force : c'est toute action mécanique exercée par un corps sur un autre, et qui entraîne :

- la modification de sa vitesse (le déplacer ou l'arrêter) ;

  ou/et

- la modification de sa trajectoire ;

  ou/et

- la modification de sa forme (le déformer).

La force est représentée par un vecteur (souvent noté $\vec{F}$) possède les mêmes caractéristiques qu'elle (direction, sens, valeur) et qui est lié à son point d'application.

On peut classer les forces selon leur distance d'action en forces de contact et forces à distance.

La résultante des forces appliquée sur un corps ($\sum \vec{F_i}$ ou la force résultante) est la somme vectorielle de toutes les forces agissant sur lui.

La mécanique de Newton (ou la mécanique classique) : c'est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et la force qui provoque ce mouvement.

La masse : c'est une propriété physique fondamentale des corps matériels. Elle exprime la quantité de matière présente en eux.

La masse est un scalaire positif (noté m, d'unité en SI :le kilogramme (Kg).).

L'inertie : c'est la résistance d'un corps immobile au mouvement ou d'un corps en mouvement pour lui fournir une accélération ou changer sa direction (changement de son vecteur vitesse).

Le degré d'inertie d'un corps est directement lié à sa masse.

Le système mécanique (ou matériel) : c'est un ensemble des corps matériels (points matériels ou corps solides), qui pouvant être liés entre eux ou non, de masse ou de masse négligeable.

Les forces appliquées sur un système mécanique sont :

- Des forces intérieures $\vec{F}_{\text{int}}$: exercées par les corps intérieurs au système ;
- Les forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}}$: exercées par des corps extérieurs au système.

Un système mécanique qui n'est soumis à aucune force est appelé système isolé, ou un pseudo-isolé s'il est soumis à une force résultante nulle.

IV.3- Principe d'inertie

IV.3-1. Enoncé du principe

Enoncé

Si aucune force n'agit sur un corps ou si la force résultante est nulle, celui-ci reste au repos s'il est initialement au repos ou se déplace en ligne droite à vitesse constante s'il est en mouvement.

IV.3-2. Référentiel d'inertie (ou référentiel galiléen)

a. Définition

Le principe d'inertie permet de définir le référentiel Galiléen (ou d'inertie). On appelle référentiel Galiléen, tout référence (ou repère) dans lequel le principe d'inertie est applicable.

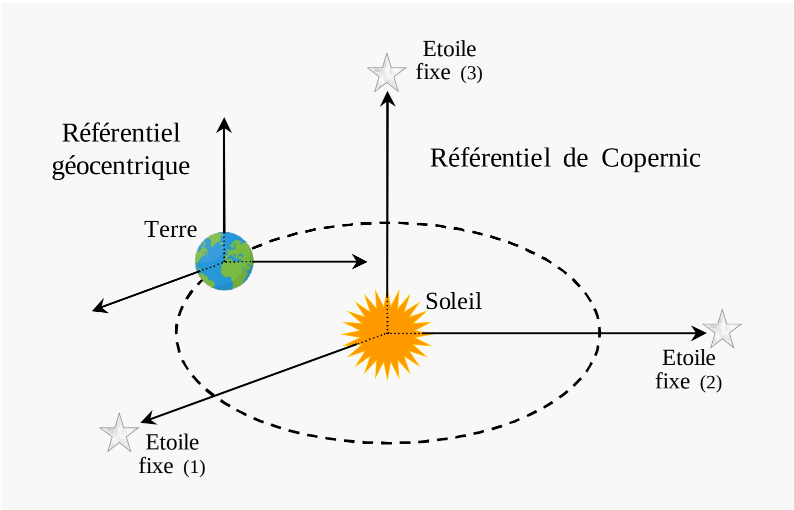
b. Exemples de référentiel Galiléens

<u>Référentiel de Copernic</u>

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire (le soleil) et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

<u>Référentiel géocentrique</u>

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.



<u>Référentiel terrestre</u>

Un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre (au sol). Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

<u>Remarques :</u>

1- *Tout référentiel (ou système de coordonnées) en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est aussi Galiléen.*

2- *Un référentiel en mouvement accéléré est un référentiel non Galiléen.*

IV.4- Quantité de mouvement et centre de masse

IV.4-1. Vecteur quantité de mouvement d'un point matériel

La quantité de mouvement d'un point matériel M est définie comme le produit de sa masse m par sa vitesse $\vec{V}$: $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ est un vecteur parallèle à la vitesse $\vec{V}$, car la masse m est un scalaire positif.

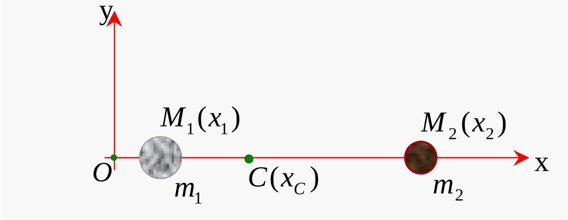
Dans le SI d'unités, l'unité de la quantité de mouvement est $\mathrm{Kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

IV.4-2. Centre de masse (ou d'inertie) d'un système matériel

On considère un système constitué de deux particules M_1 et M_2 de masses, respectivement, m_1 et m_2. Les particules M_1 et M_2 se situent le long de l'axe Ox d'un système de coordonnées cartésiennes $\mathrm{R}(O;\ x,y,z)$.

L'abscisse x_C du centre de masse « le point C » de M_1 et M_2 est donnée par la relation :

$$x_C = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$



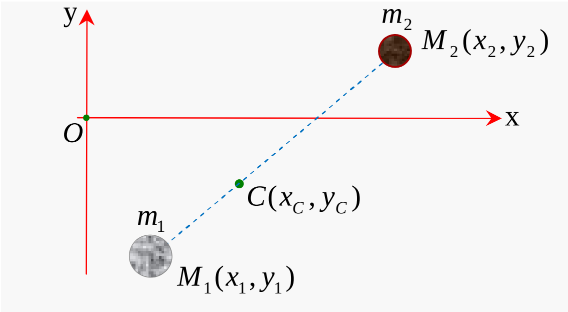
Avec : x_1 est x_2 sont les abscisses de M_1 et M_2 , respectivement.

Si les particules se trouvent sur le plan xOy de coordonnées (x_1, y_1) pour M_1 et (x_2, y_2) pour M_2.

Les coordonnées (x_C, y_C) du centre de masse C sont données par les relations :

$$x_C = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_C = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2}{m_1 + m_2}$$



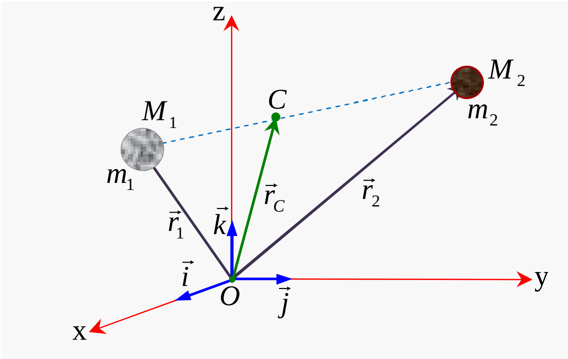
En général, la position du centre de masse d'un système de deux particules M_1 et M_2 est définie par le vecteur position :

$$\vec{r}_C = x_C \cdot \vec{i} + y_C \cdot \vec{j} + z_C \cdot \vec{k} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Où :

$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$ et $\vec{r}_2 = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$

sont les vecteurs position de M_1 et M_2, respectivement.



Remarque :

La relation : $\vec{r}_C = \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ *est équivalente à la relation du barycentre des points* M_1 *et* M_2 *:* $\quad m_1 \cdot \overrightarrow{CM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{CM_2} = \vec{0}$

a. Cas d'un système de ***n*** particules

Lorsque le système est composé de n particules de masses m_1, m_2, ... , m_n. La position du centre de masse de ce système est données par :

$$\vec{r}_C = x_C \cdot \vec{i} + y_C \cdot \vec{j} + z_C \cdot \vec{k} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{M_{sys}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

Avec : M_{sys} est la masse du système ; $M_{sys} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Alors, les coordonnées (x_C, y_C, z_C) sont données par les relations :

$$x_C = \frac{1}{M_{sys}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \quad ; \quad y_C = \frac{1}{M_{sys}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \quad ; \quad z_C = \frac{1}{M_{sys}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i$$

b. Cas d'un corps solide

En physique, un corps solide peut être considérer comme un système matériel constitué d'un grand nombre de particules (c'est-à-dire lorsque $n \to \infty$).

Les coordonnées du centre de masse d'un corps solide de masse M_{corps} sont déterminées par les relations d'intégration suivantes :

$$x_C = \frac{1}{M_{corps}} \cdot \int x \cdot \mathrm{d}m \quad ; \quad y_C = \frac{1}{M_{corps}} \cdot \int y \cdot \mathrm{d}m \quad ; \quad z_C = \frac{1}{M_{corps}} \cdot \int z \cdot \mathrm{d}m$$

Avec : $\mathrm{d}m$ est une masse ponctuelle infinitésimale (ou élémentaire) : $M_{corps} = \int \mathrm{d}m$

<u>*Remarque :*</u>

La masse élémentaire $\mathrm{d}m$ *dépend de la distribution dans le solide :*

- *Un solide de distribution linéique :* $\mathrm{d}m = \lambda \cdot \mathrm{d}\ell$
- *Un solide de distribution surfacique :* $\mathrm{d}m = \sigma \cdot \mathrm{d}S$
- *Un solide de distribution volumique :* $\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}V$

où :
- $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}S$ *et* $\mathrm{d}V$ *sont respectivement des éléments de longueur, de surface et de volume ;*
- λ, σ *et* ρ *sont les densités linéique, surfacique et volumique de masse.*

IV.4-3. Vecteur quantité de mouvement d'un système matériel

La quantité de mouvement d'un système composé de n particules de masses m_1, m_2, ... , m_n, est égale à la somme de leurs quantités de mouvement :

$$\vec{p}_{sys} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_3 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{V}_i$$

Où : $\vec{V}_i$ ($\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ... , $\vec{V}_n$) ont les vecteurs vitesse des n particules de masses m_1, m_2, ... , m_n, respectivement. Donc, $\vec{V}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \vec{p}_{sys} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \right)$$

Avec : $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = M_{sys} \cdot \vec{r}_C$ ($\vec{r}_C$ est le vecteur position du centre de masse de système), Donc :

$$\vec{p}_{sys} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_{sys} \cdot \vec{r}_C\right) = M_{sys} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}$$

Si le vecteur position du centre C est : $\vec{V}_C = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}$, donc la quantité de mouvement d'un système composé de n particules s'écrit : $\vec{p}_{sys} = M_{sys} \cdot \vec{V}_C$

Résultat

Le centre de masse d'un système matériel est un point auquel la masse du système peut être supposée concentrée.

IV.4-4. Principe de conservation de la quantité de mouvement

Enoncé

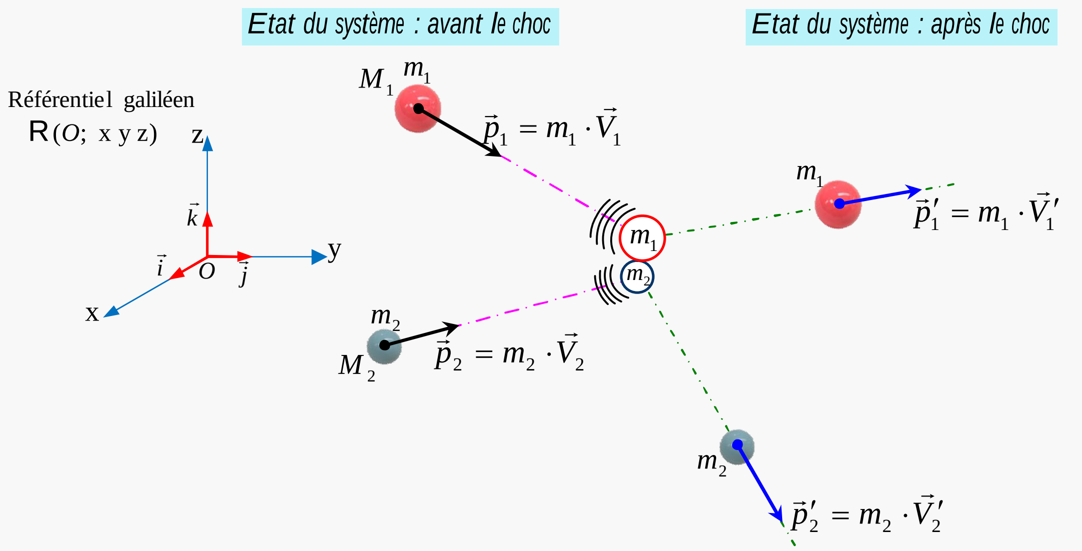
Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système matériel isolé (ou pseudo-isolé) est constante : $\Delta\vec{p}_{sys} = \vec{0}$ (variation nulle)

Ou $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sys}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ (variation instantanée nulle)

choc élastique entre deux particules

Soit un système matériel constitué de deux particules M_1 et M_2 de masses, respectivement, m_1 et m_2. Les particules sont en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathrm{R}(O;\ x\,y\,z)$.

Nous supposons M_1 et M_2 entrent en choc élastique (les masses des particules ne changent pas) pendant une durée suffisamment courte pour que le système soit considéré comme isolé au moment du choc.



Donc, nous avons les données suivantes :

Etat du système avant le choc :

Les vitesses de M_1 et M_2 sont, respectivement, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

$\Rightarrow$ La quantité de mouvement du système avant le choc est :

$$\vec{p}_{sys} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2$$

Etat du système après le choc :

Les vitesses des particule changent et deviennent $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$.

$\Rightarrow$ La quantité de mouvement du système après le choc est :

$$\vec{p}'_{sys} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1 \cdot \vec{V}_1' + m_2 \cdot \vec{V}_2'$$

Au moment du choc, le système est isolé et donc sa quantité de mouvement doit être conservée : $\Delta\vec{p}_{sys} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{sys} = \vec{p}'_{sys}$

$$\Leftrightarrow m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2 = m_1 \cdot \vec{V}_1' + m_2 \cdot \vec{V}_2'$$

$$\Leftrightarrow m_1 \cdot \vec{V}_1 - m_1 \cdot \vec{V}_1' = -m_2 \cdot \vec{V}_2 + m_2 \cdot \vec{V}_2'$$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Le signe négatif ($-\Delta\vec{p}_2$) indique que, la quantité de mouvement du système reste constante de sorte que la quantité de mouvement perdue par l'une des particules sera acquise par l'autre.

IV.5- Les lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les principes de base de la mécanique newtonienne.

IV.5-1. La 1ère loi (principe d'inertie)

Enoncé

En l'absence d'une force extérieure résultante agissant sur lui, un corps conserve son état de repos ou son mouvement rectiligne uniforme.

Conséquence : *La 1ère loi de Newton suggère qu'il existe une relation entre l'application d'une force résultante non nulle et l'accélération (changement de la vitesse) d'un corps.*

Etat d'équilibre d'un corps matériel

Un corps (ou un système) matériel atteint l'état d'équilibre, lorsque la force résultante qui s'exerce sur lui est nulle : $\sum \overrightarrow{F} = \vec{0}$ (condition d'équilibre)

Equilibre statique : *un corps est en état d'équilibre statique, s'il est initialement au repos et qu'aucune force résultante ne s'exerce sur lui.*

Equilibre dynamique : *un corps est en état d'équilibre dynamique, s'il se déplace en mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force résultante.*

IV.5-2. La 2ème loi

Enoncé

La force résultante exercée sur un corps est égale à sa masse multipliée par son accélération. $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Remarques :

1- *Dans le SI d'unités, la force s'exprime en newtons* (N) : $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{Kg} \times \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2- *Le vecteur accélération* $\vec{a}$ *est orienté dans le même sens que le vecteur* $\sum \vec{F}$.

IV.5-3. La 3ème loi (principe d'action–réaction)

Enoncé

Lorsqu'un corps A *exerce sur un corps* B *une force* $\vec{F}_{A\to B}$ *, le corps* B *exerce sur le corps* A *une force* $\vec{F}_{B\to A}$ *de même grandeur, mais dirigée en sens opposé.*

$$\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = \vec{0}$$

Conséquences :

1- *Une force n'existe jamais seule et la présence d'une force d'action génère automatiquement une force de réaction. L'action et la réaction s'exercent simultanément.*

2- *La résultante des forces intérieures d'un système est nulle* $\sum \vec{F}_{\mathrm{int}} = \vec{0}$ *, c'est puisque chaque force intérieure* $\vec{F}_{A\to B}$ *exercée sur un corps* A *par un corps* B *est équilibrée par une force intérieure opposée* $\vec{F}_{B\to A}$.

IV.6- Le principe fondamental de la dynamique en translation (PFD)

Enoncé

Dans un référentiel galiléen, l'accélération du centre d'inertie d'un corps (ou un système) de masse constante m *est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à la masse.*

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\mathrm{int}} + \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

IV.6-1. Formule du PFD

D'après le principe d'action–réaction : $\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$, donc le PFD s'écrit sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

IV.6-2. Théorème de la quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen, le PFD peut être reformulé comme suivant :

La résultante des forces extérieures exercées sur un système de masse constante m est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

IV.6-3. Méthodologie pour résoudre un problème de dynamique

Etape ①	Identifier le corps (ou le système) à étudié
Etape ②	Tracer un diagramme des forces agissant sur chaque corps du système
Etape ③	Choisir un référentiel qui simplifie les calculs
Etape ④	Écrire le PFD et développer les équations des vecteurs force
Etape ⑤	Projeter les équation des vecteurs sur le référentiel choisi
Etape ⑥	Résoudre les équations obtenues

.

IV.7- Quelques types des forces

IV.7-1. La force de gravité (ou le poids)

Le poids (appelé aussi la pesanteur) « $\vec{P}$ » est la force gravitationnelle exercée sur un corps par la Terre (ou une autre planète).

a. La force gravitationnelle

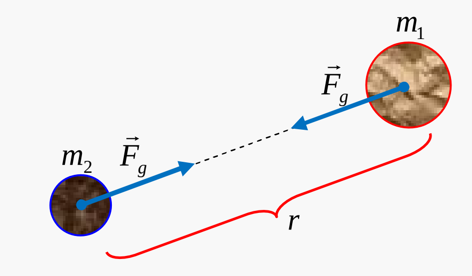
La force gravitationnelle « $\vec{F}_g$ » est l'attraction mutuelle entre les corps (ou les points matériels) due à leur masse.

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Où : F_g : la grandeur (ou le module) de la force gravitationnelle

G : la constante gravitationnelle :

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \ \frac{\text{N.m}^2}{\text{Kg}^2}$$



m_1 et m_2 : les masses de corps en interaction (en Kg)

r : la distance entre les deux corps (en m)

Remarques :

1- *La force gravitationnelle est une force qu'agit à distance.*

2- $\vec{F}_g$ *est proportionnelle aux masses* m_1 *et* m_2, *donc plus les masses sont grandes, plus la force d'attraction gravitationnelle est grande.*

3- $\vec{F}_g$ *est inversement proportionnelle à* r^2 (carré de la distance qui sépare les deux corps), *donc plus la distance qui sépare les deux corps est grande, plus la force d'attraction gravitationnelle est faible.*

b. La chute libre

La chute libre est le mouvement vertical d'un objet qui n'est soumis qu'à la force de la gravité. Ce mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA).

c. Accélération gravitationnelle

L'accélération gravitationnelle (ou l'accélération de la pesanteur) g est l'accélération subie par un corps en chute libre sur la surface de la Terre (ou d'une autre planète).

Près de la surface de la Terre, la valeur de l'accélération gravitationnelle (ou l'accélération terrestre) est : $g = 9{,}80\ \text{m.s}^{-2}$

Remarques :

1- *Tous les corps en chute libre subissent la même accélération* g *(indépendamment de leur masse).*

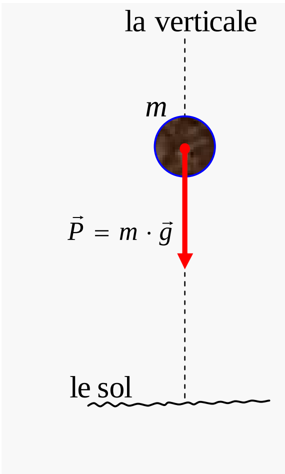
2- *La valeur de* g *est obtenue à partir de la loi de la gravitation universelle, par la relation :*

$$g = G \cdot \frac{m_T}{R_T^2}$$

Où : m_T *: la masse de la Terre :* $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{Kg}$

R_T *: le rayon de la Terre :* $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m}$

3- *Le vecteur accélération gravitationnelle* $\vec{g}$ *est orienté vers le bas (vers le centre de la Terre).*



d. Expression de la force de gravité

La force de la gravité exercée sur un corps de masse m *par la Terre est donnée par la loi :* $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

Tout comme le vecteur $\vec{g}$, *le vecteur de la force* $\vec{P}$ *est toujours orienté vers le centre de la Terre.*

IV.7-2. La force normale

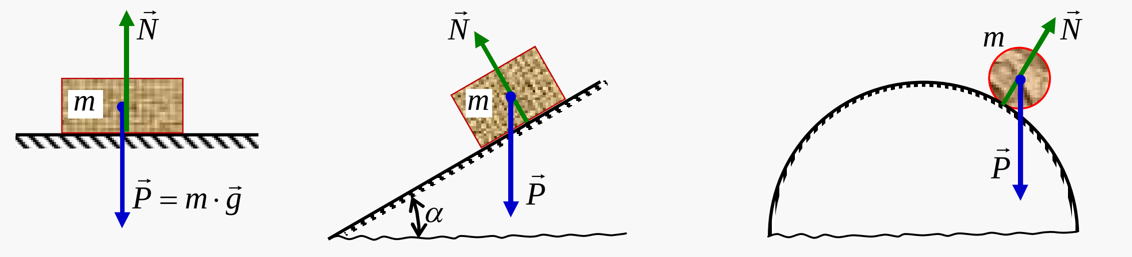
La force normale « $\vec{N}$ » est la force normale exercée sur un corps par la surface d'un autre corps (ou un support) en contact avec lui. Elle résulte du principe d'action-réaction.

Remarques :

1- *La force* $\vec{N}$ *est perpendiculaire à la surface de contact.*

2- *La force normale* $\vec{N}$ *est une force de contact, si le corps n'est pas en contact avec la surface, donc* $\vec{N} = \vec{0}$.

Exemples



IV.7-3. La force de frottement sec

La force de frottement sec « $\vec{f}$ » est la force exercée par la surface d'un corps solide sur un autre corps solide, dans le sens opposé au mouvement de ce dernier sur cette surface.

Remarques :

1- *La force de frottement entre deux corps est une force de contact, si les corps ne sont pas en contact, il n'y a pas de force de frottement.*

2- *La résultante :* $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$ *est appelée la réaction du support.*

a. Le coefficient de frottement

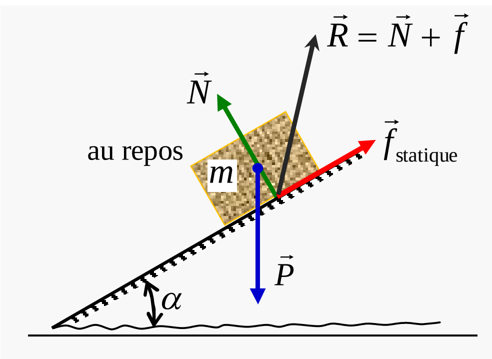
La force de frottement entre deux corps est proportionnelle à la force normale qui s'exerce entre eux : $f = \left\| \vec{f} \right\| = \mu \cdot N$, avec : $N = \left\| \vec{N} \right\|$

μ : est appelé coefficient de frottement., il dépend seulement de la nature des surfaces en contact et de leur rugosité.

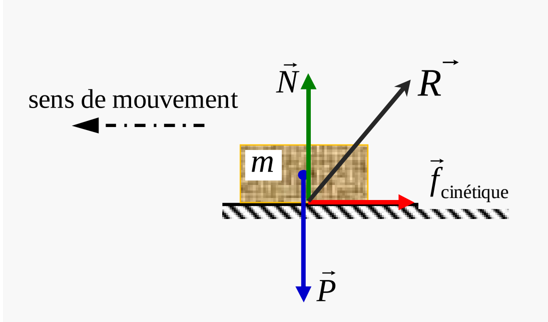
b. Le frottement statique $\vec{f}_{\text{statique}}$

C'est la force de frottement entre deux corps qui ne sont pas en mouvement l'un par rapport à l'autre (c'est-à-dire immobiles).

Le coefficient de frottement statique (noté μ_s) représente le rapport maximal entre la force de frottement et la force normale avant que les corps se mettent en mouvement.



c. <u>Le frottement cinétique</u> $\vec{f}_{\text{cinétique}}$



C'est la force de frottement entre deux corps qui sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Le coefficient de frottement cinétique (noté μ_C) est le rapport entre la force de frottement et la force normale durant le mouvement l'un corps par rapport à un autre.

<u>*Remarques :*</u>

1- $\vec{f}_{\text{statique}}$ *est une force qui empêche la mise en mouvement, donc pour déplacer un corps immobile sur une surface, il faut appliquer sur lui une force plus grande que la valeur de* $\vec{f}_{\text{statique}}$.

2- *Le coefficient de frottement statique* μ_s *est plus grand que le coefficient de frottement cinétique* μ_C*, donc :* $f_{\text{statique}} > f_{\text{cinétique}}$.

IV.7-4. La tension

La tension «$\vec{T}$» est la force de traction qu'un fil (ou une corde) exerce sur un corps attaché à lui.

<u>*Remarques :*</u>

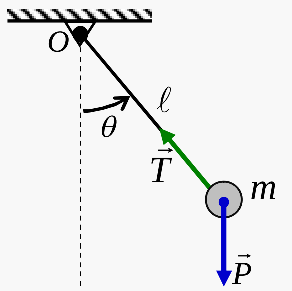
1- *En générale, Pour simplifier l'étude d'un système mécanique constitué par des masses suspendue à un fil, comme le pendule ou la machine d'Atwood, on peut supposer que :*
- *la masse et l'épaisseur du fil sont négligeables ;*
- *le câble ne s'étire pas (inextensible).*

2- *Si le fil du système étudié passe par une poulie fixe, le module «T» de la tension n'est pas modifiée; seule sa direction change.*

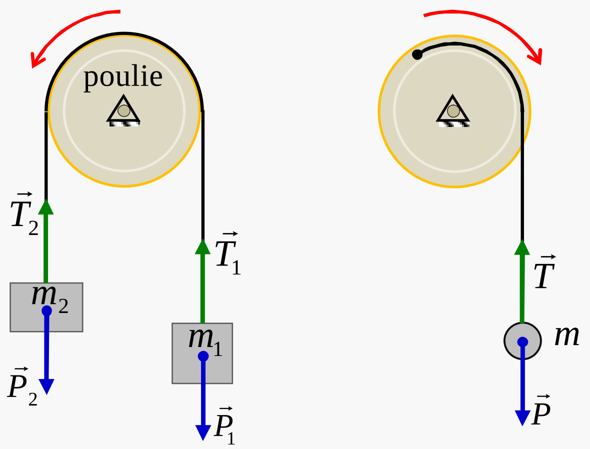
3- *La tension est une force qui ne peut pas être directement déterminée par une formule, donc pour la calculer il faut déterminer la force qui s'y oppose (le poids par exemple).*

Exemples

Pendule simple



Machine d'Atwood

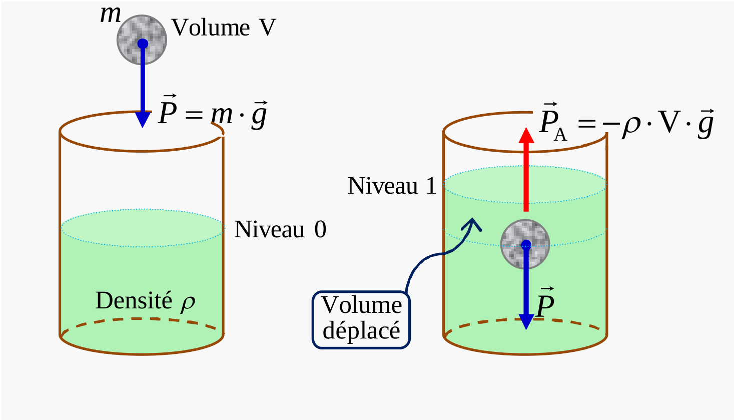


IV.7-5. La poussée d'Archimède

Tout corps placé entièrement ou partiellement dans un fluide (liquide ou gaz), subit une force verticale, dirigée de bas vers haut et égale au poids du volume de fluide déplacé. Cette force est appelée poussée d'Archimède.

$$\vec{P}_A = -\rho_{\text{fluide}} \cdot \mathrm{V} \cdot \vec{g}$$

(cette formule est établie par Archimède)



Où : ρ_{fluide} : la densité du fluide (en $\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$)

V : le volume de fluide déplacé (en m^3)

IV.7-6. La force de frottement fluide (ou visqueux) $\vec{f}_\mathrm{F}$

C'est une force opposé au mouvement d'un corps qui se déplace dans un fluide (liquide ou gaz).

Si le corps mobile est de forme sphérique, le module de $\vec{f}_\mathrm{F}$ est :

$$f_\mathrm{F} = k \cdot v \; = 6\pi \cdot \mu \cdot \mathrm{r} \cdot v$$

Où : k : coefficient de frottement (en $\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$)

v : la vitesse du corps mobile (en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$)

μ : la viscosité dynamique du fluide (en $\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$)

r : le rayon d'un corps sphérique (en m)

IV.7-7. La force de rappel d'un ressort (force élastique)

Quand on exerce une force sur l'extrémité d'un ressort hélicoïdal pour l'étirer ou le comprimer, ce ressort exerce en retour une force pour résister à l'étirement ou à la compression, qui se nomme force de rappel « $\vec{F}_r$ ».

La force $\vec{F}_r$ est caractérisée par :

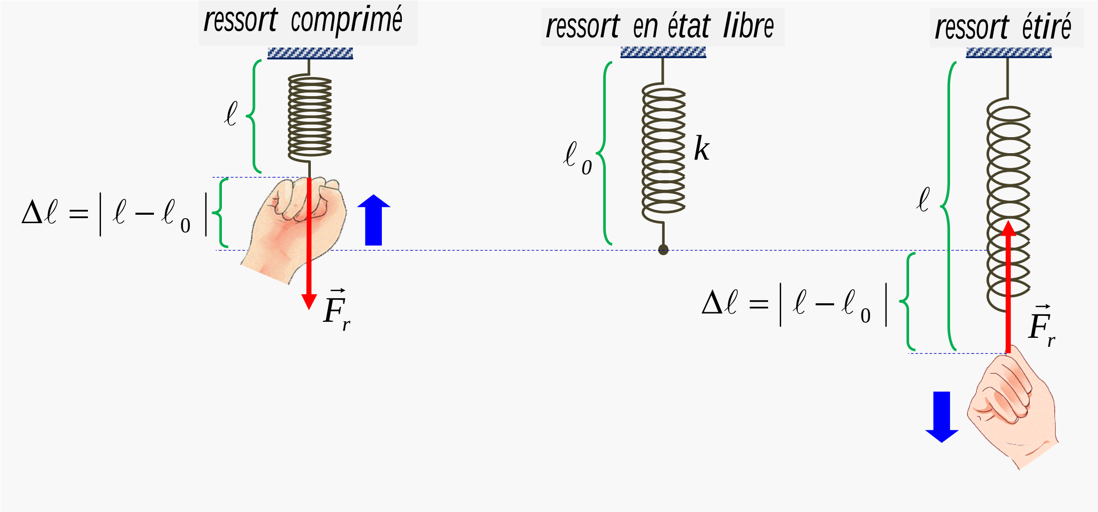
- $\vec{F}_r$ agit toujours en sens inverse par rapport au déplacement de l'extrémité libre du ressort.
- Le module de F_r est proportionnelle à la variation de longueur du ressort :

$$F_r = k \cdot \Delta\ell = k \cdot \left| \ell - \ell_0 \right|$$

Où : k : la constante de rappel du ressort ou la raideur (en $\mathrm{N.m}^{-1}$).

ℓ_0 : la longueur initiale du ressort (c'est-à-dire lorsque le ressort est à son état libre).

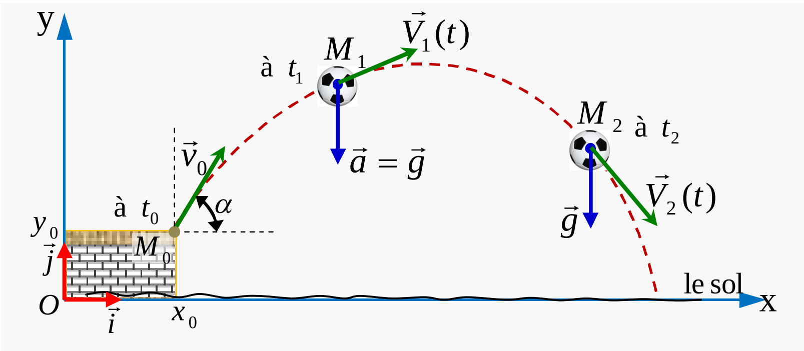
ℓ : la longueur actuelle du ressort (c'est-à-dire après l'étirement ou la compression).



IV.8- Quelques exemples sur l'application de PFD

IV.8-1. Le mouvement de projectile

C'est est le mouvement d'un corps (ou une particule) lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ qui a une composante horizontale non nulle, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{v}_0$ fait un angle $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ avec l'horizon.



Au cours de son mouvement, un projectile M , de masse m , est soumis à une seule force , qui est le poids $\vec{P}$.

Donc, le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow$ Le mouvement du projectile M est uniformément varié avec une accélération constante :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{P} = \vec{g}$$

Donc, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{V}(t_0)=\vec{v}_0}^{\vec{V}(t)} d\vec{V}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{g} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}(t) = \vec{g} \cdot [t - t_0] + \vec{v}_0$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\overrightarrow{OM}(t_0)=\overrightarrow{OM}_0}^{\overrightarrow{OM}(t)} d\overrightarrow{OM}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{g} \cdot [t - t_0] + \vec{v}_0\right) dt$$

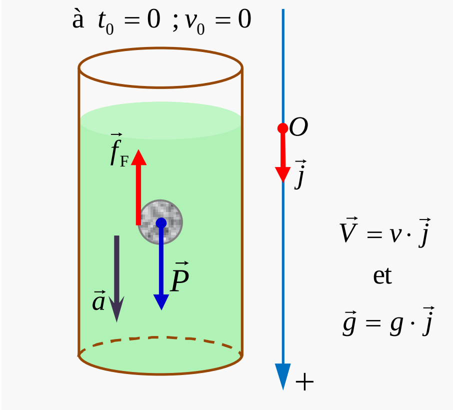
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot [t - t_0]^2 + \vec{v}_0 \cdot [t - t_0] + \overrightarrow{OM}_0$$

IV.8-2. Le mouvement d'une bille qui tombe dans un fluide visqueux

A l'instant $t = 0$, on lâche, sans vitesse initiale, une bille de masse m dans un fluide (l'air par exemple).

Avec la négligence de la poussée d'Archimède pour la simplification, la bille est soumise aux deux forces suivantes :

- Le poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$;
- La force de frottement fluide :
- $\vec{f}_{\mathrm{F}} = -k \cdot \vec{V}$ (si le fluide c'est l'air, $\vec{f}_{\mathrm{F}}$ s'appelle la résistance de l'air)



Le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{f}_{\mathrm{F}} = m \cdot \vec{a}$

La projection sur la verticale donne : $m \cdot g - k \cdot v = m \cdot a = m \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - \left(\dfrac{k}{m}\right) \cdot v}$$

L'intégration donne : $\displaystyle\int_{v_0=0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{g - \left(\dfrac{k}{m}\right) \cdot v} = \int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \quad -\frac{m}{k} \cdot \left[ln\left(g - \left(\frac{k}{m}\right) \cdot v \right) \right]_0^{v(t)} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g - \left(\dfrac{k}{m}\right) \cdot v(t)}{g} = e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

Donc, la vitesse de la bille à l'instant t est : $v(t) = \dfrac{m \cdot g}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \right)$

IV.8-3. Le mouvement d'un pendule élastique (système libre masse–ressort, ou l'oscillateur harmonique)

Soit un ressort, de longueur initiale ℓ_0 et de raideur k. À son extrémité libre, on attache une masse m, et accrochée à l'extrémité libre du ressort, et on laisse la étendre le ressort jusqu'à l'équilibre.

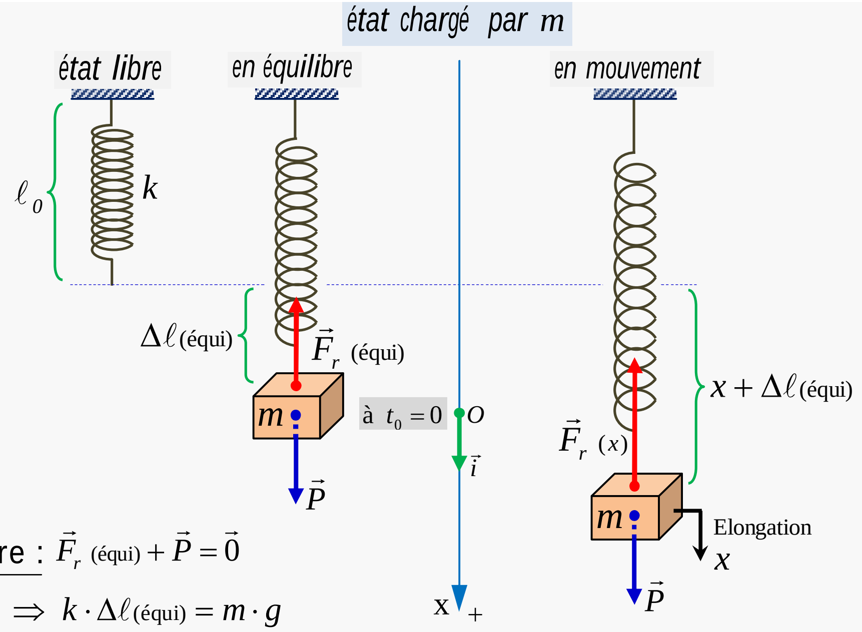
A l'équilibre, la masse m (immobile) est soumise aux deux forces suivantes :

- Le poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$;
- La force de rappel du ressort (à l'équilibre) : $\vec{F}_{r\ (\text{équi})}$.

Donc, le PFD à l'équilibre s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{F}_{r\ (\text{équi})} = \vec{0}$

La projection sur la verticale donne : $m \cdot g = k \cdot \Delta\ell_{(\text{équi})}$

$\Rightarrow$ L'allongement d'un ressort (ou le raccourcissement en cas de compression) en équilibre est : $\Delta\ell_{(\text{équi})} = \dfrac{m \cdot g}{k}$



<u>En équilibre</u> : $\vec{F}_r\,_{(\text{équi})} + \vec{P} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \; k\cdot\Delta\ell_{(\text{équi})} = m\cdot g$$

<u>En mouvement</u> : $F_{r\,(x)} = \left\| \vec{F}_r(x) \right\| = k\cdot(x + \Delta\ell_{(\text{équi})})$

$$= k\cdot x + m\cdot g$$

Si la masse est écartée d'une distance x_0 (de la position d'équilibre) et relâchée (à l'instant $t=0$, sans vitesse initiale), donc il se mette à osciller autour de la position d'équilibre.

En mouvement oscillatoire, la masse m est soumise aux deux forces :

- Le poids : $\vec{P}$;
- La force de rappel : $\vec{F}_r\,_{(x)}$.

Le PFD s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{F}_r\,_{(x)} = m\cdot\vec{a}$

La projection sur l'axe choisi donne : $m\cdot g - k\cdot(x + \Delta\ell_{(\text{équi})}) = m\cdot\ddot{x}$

En replaçant par : $\Delta\ell_{(\text{équi})} = \dfrac{m\cdot g}{k} \;\Rightarrow\; -k\cdot x = m\cdot\ddot{x}$

Donc, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\cdot x = 0 \text{, avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \,.$$

Le mouvement de m c'est rectiligne sinusoïdale (voir chapitre II) .

L'équation horaire est donnée par : $x(t) = x_m\cdot cos(\omega_0\cdot t + \varphi)$

A $t=0$: $x = x_0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_m = x_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

Donc, la position de m à l'instant t est définie par : $x(t) = x_0\cdot cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot t\right)$.

IV.9- Dynamique de rotation

Contrairement au mouvement de translation, l'effet d'une force sur un corps en rotation (qui a une accélération angulaire) dépend non seulement du module et de la direction de la force mais aussi de son point d'application.

En fait, l'étude dynamique du mouvement de rotation dépend d'une quantité angulaire associée à la force, appelée moment de la force.

IV.9-1. Moment d'une force

a. Définition

Le moment d'une force par rapport à un point donné (souvent appelé pivot) est une grandeur vectorielle exprimant la capacité de cette force à faire tourner un corps (ou un système) autour de ce point.

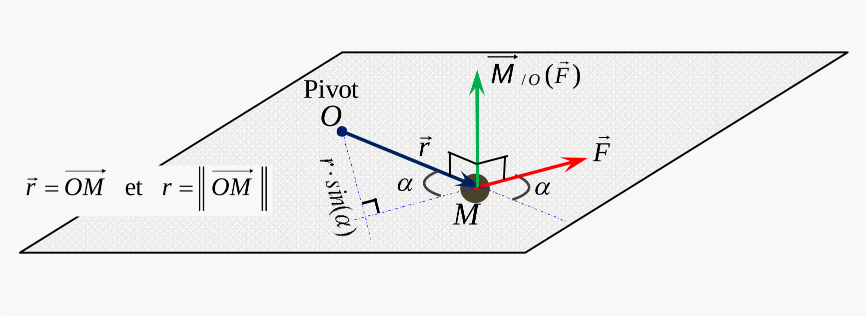
b. Vecteur moment d'une force par rapport à un point

Soit un point matériel M, de masse m, soumis à une force $\vec{F}$. Le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O (l'origine du repère par exemple) est défini par :

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Avec : $\overrightarrow{OM}$: le vecteur position de M, il reliant le point O et le point d'application de la force $\vec{F}$

Le vecteur $\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F})$ est orienté selon une direction perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$.



Le module du vecteur $\overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F})$ est : $M_{/O}(\vec{F}) = \left\| \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) \right\| = r \cdot F \cdot sin(\alpha)$ $\quad (\mathrm{N \cdot m})$

Où : $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$ est le module du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$F = \left\| \vec{F} \right\|$ est le module du vecteur force $\vec{F}$.

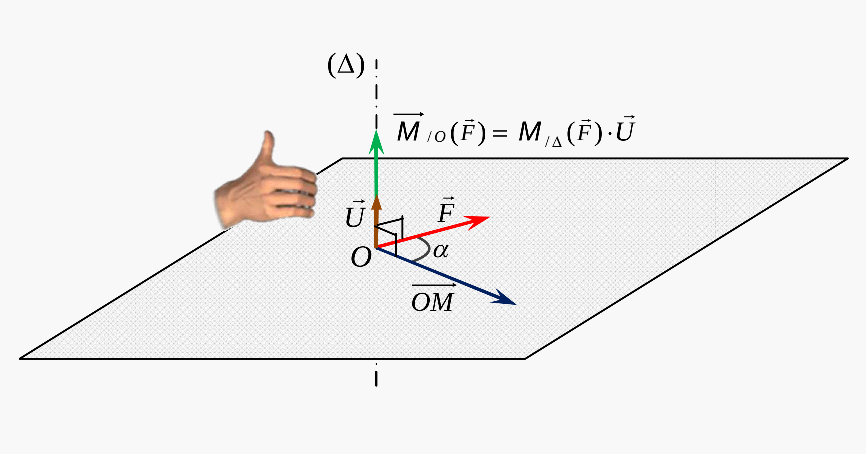
α est l'angle entre les directions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$.

Le moment d'un ensemble de forces $\sum \vec{F}_i$, est la somme des moments de ces forces :

$$\overrightarrow{M}_{/O}(\sum \vec{F}_i) = \sum \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}_i)$$

c. Moment d'une force par rapport à un axe

La projection du vecteur moment d'une force par rapport à un point sur un axe (Δ) passant par ce point est une grandeur scalaire appelée le moment de la force par rapport à l'axe (Δ). .



Le moment d'une force par rapport à un axe exprime sa capacité à faire tourner un corps autour cet axe)

$$M_{/\Delta}(\vec{F}) = \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}) \bullet \vec{U}$$

Avec : $\vec{U}$: le vecteur unitaire de l'axe (Δ)

IV.9-2. Moment cinétique (ou moment angulaire)

Soit un point matériel M , de masse m , déplace le long d'un trajectoire (C). A l'instant t, le vecteur quantité de mouvement de M est $\vec{p} = m\cdot\vec{V}$, avec $\vec{V}$ c'est son vecteur vitesse à cet instant.

a. <u>Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point</u>

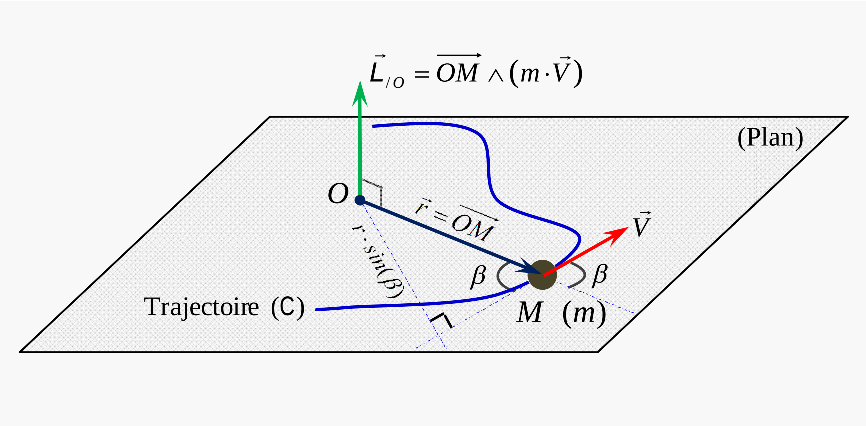
Le moment cinétique de M par rapport à un point O ", est le moment de son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport à ce point.

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \quad = \quad \overrightarrow{OM} \wedge (m\cdot\vec{V})$$

Avec : $\overrightarrow{OM}$: le vecteur position du point M à l'instant t.

Le vecteur $\vec{L}_{/O}$ est orienté selon une direction perpendiculaire au plan formé par les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}$.

En générale, $\vec{L}_{/O}$ change de direction (et de module) au cours du mouvement de M , mais si le mouvement est dans un plan, il conserve une direction fixe perpendiculaire à ce plan.



Le module du moment cinétique de M par rapport à O est :

$$L_{/O} = \left\| \vec{L}_{/O} \right\| = m \cdot r \cdot v \cdot sin(\beta) \qquad \text{(exprimé en (} \mathrm{Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}} \text{))}$$

Où : $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$ est le module du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$v = \left\| \vec{V} \right\|$ est le module du vecteur vitesse de M à l'instant t.

β est l'angle entre les directions des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$.

Le moment cinétique d'un système matériel est la somme des moments cinétiques (par rapport au même point O) des points matériels constituant le système :

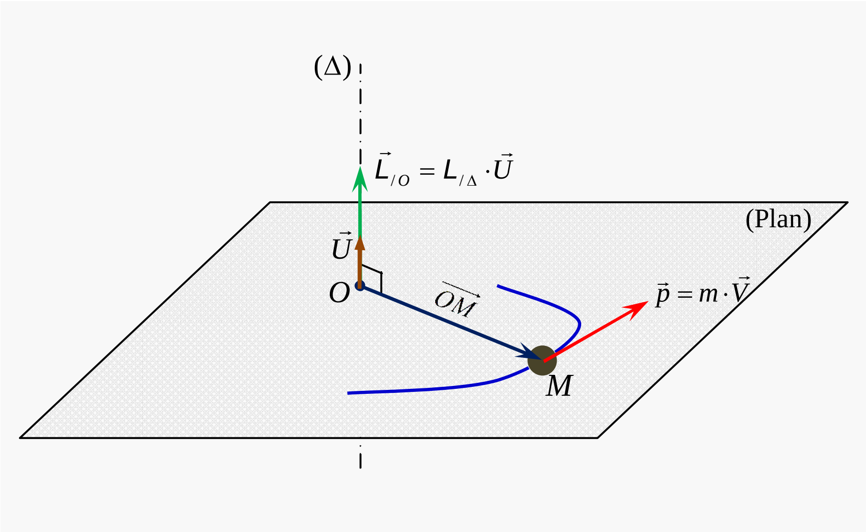
$$\vec{L}_{/O}(sys) = \sum \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i$$

b. <u>Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe</u>

La projection du vecteur moment cinétique de M par rapport à un point O sur un axe (Δ) passant par le point O est une grandeur scalaire appelée le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Δ).

$$L_{/\Delta} = \vec{L}_{/O} \bullet \vec{U}$$

Avec : $\vec{U}$: le vecteur unitaire de l'axe (Δ) .



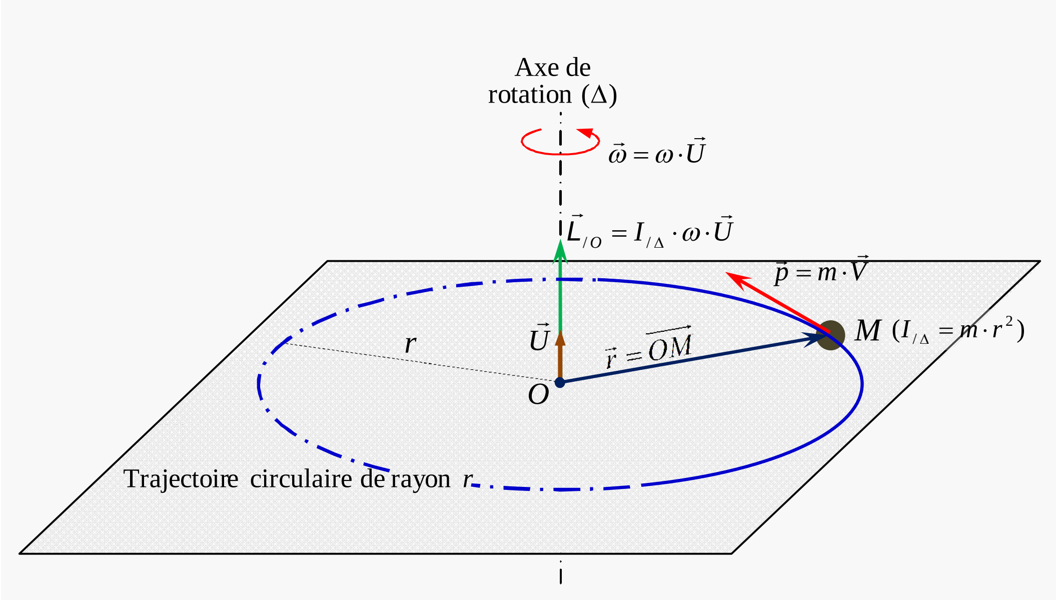
IV.9-3. Théorème du moment cinétique

a. <u>Moment cinétique d'un point en mouvement de rotation</u>

Soit un point matériel M , de masse m , tournant autour un axe (Δ) passant par le point O.

Si ω est sa vitesse angulaire à l'instant t, donc son vecteur vitesse linéaire $\vec{V}$ peut s'écrire :

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{(le mouvement de } M \text{ est circulaire)}$$



Dans ce cas, le moment cinétique de M par rapport à O sera :

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge (m \cdot \vec{V}) = m \cdot \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})\right]$$

(En utilisant la formule du double produit vectoriel $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \bullet \vec{B})\vec{C}$)

$$= m \cdot \left[\underbrace{(\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OM})}_{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = r^2} \vec{\omega} - (\overrightarrow{OM} \bullet \vec{\omega})\, \overrightarrow{OM}\right]$$

(le vecteur de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ $\Rightarrow$ le produit scalaire : $\overrightarrow{OM} \bullet \vec{\omega} = 0$)

$$= m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

Le facteur : $m \cdot r^2$, qui représente le produit de la masse de M par le carré de sa distance à (Δ), est une grandeur positive appelée : le moment d'inertie de M par rapport à l'axe (Δ) :

$$m \cdot r^2 = I_{/\Delta} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{/O} = I_{/\Delta} \cdot \vec{\omega}$$

Moment d'inertie

Le moment d'inertie, noté I (unité : $\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^2$), est un scalaire reflète l'effet de la masse sur la mise en rotation d'un mobile. Plus la masse d'un corps est concentrée loin de son axe de rotation, plus son moment d'inertie est grand et plus sa mise en rotation (ou l'arrêt de la rotation) est difficile.

b. Théorème du moment cinétique

Enoncé

Dans un référentiel galiléen, la dérivée première par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M est égale au moment en O (point fixe) de la résultante des forces extérieures agissant sur M.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{dt}} = \sum \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Soit un point matériel M , de masse m , en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans le référentiel galiléen, d'origine O, point fixé sur (Δ) .

La dérivée du moment cinétique par rapport à O de M s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OM} \wedge (m \cdot \vec{V})) \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge (m \cdot \vec{V}) + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{V})}{\mathrm{d}t} \\
&= \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{a} \quad \text{(puisque : } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{V} \quad \Rightarrow \quad = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge (m \cdot \vec{V}) = \vec{0} \text{)}
\end{aligned}$$

Et d'après le PFD : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

Avec : $\overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \sum \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}_{\text{ext}})$ c'est la résultante des moments en O des forces extérieures appliquées au point M .

Donc, le théorème du moment cinétique s'écrit : $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{/O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{M}_{/O}(\vec{F}_{\text{ext}})$

5

Travail et Energie

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Introduire les notions du travail, de puissance et d'énergie.
- Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
- Comprendre et utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique.
- Définir la condition d'équilibre stable d'un système physique.

V.1- Introduction

Dans ce chapitre, on étudier le mouvement d'un point matériel à l'aide d'une nouvelle grandeur physique appelée « énergie ».

V.2- Définitions

Champ scalaire : est une fonction de plusieurs variables scalaires.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes un champ scalaire s'écrit $f(x,y,z)$

Champ vectoriel (champ de vecteurs) : est une application qui associe à tout point M de l'espace, un vecteur.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, un point $M(x,y,z)$ soumis à une force $\vec{F}$, qui peut être un champ vectoriel défini par ses fonctions composantes : $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ et $F_z(x,y,z)$.

Opérateur nabla $\vec{\nabla}$: est un vecteur, c'est-à-dire qu'il satisfait aux règles de calcul de produit scalaire et vectoriel, mais ses composantes ne sont pas des scalaires. Les composantes de $\vec{\nabla}$ sont des opérateurs différentiels.

Expression de $\vec{\nabla}$	
En coordonnées cartésiennes	$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$
En coordonnées cylindriques	$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \rho}\cdot\overrightarrow{U_\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\overrightarrow{U_\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$
En coordonnées sphériques	$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\overrightarrow{U_r}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\overrightarrow{U_\theta}+\frac{1}{r\cdot sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}\cdot\overrightarrow{U_\varphi}$

Gradient d'un champ scalaire (gradient d'une fonction scalaire f) :

C'est un vecteur $\vec{V}$ (ou champ vectoriel) défini par la relation : $\vec{V}=\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}f$

Le gradient transforme un champ scalaire en un champ vectoriel.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, le gradient de la fonction $f(x,y,z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

Remarque :

Lorsque un champ vectoriel : $\vec{V}=\overrightarrow{grad}(f)$, on dit que $\vec{V}$ dérive de la fonction scalaire f.

Divergence d'un champ vectoriel (divergence d'un vecteur $\vec{V}$) :

C'est une fonction scalaire (ou champ scalaire) définie par la relation : $div(\vec{V})=\vec{\nabla}\bullet\vec{V}$

La divergence transforme un champ vectoriel en un champ scalaire.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, la divergence du champ vectoriel $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k} \;\Rightarrow\; div(\vec{V}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

<u>Rotationnel d'un champ vectoriel</u> (rotationnel d'un vecteur $\vec{V}$) :

C'est un vecteur $\vec{U}$ (ou champ vectoriel) défini par la relation : $\vec{U} = \overrightarrow{Rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

Le rotationnel transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, le rotationnel du champ vectoriel $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right] \cdot \vec{i} - \left[\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right] \cdot \vec{j} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right] \cdot \vec{k}$$

<u>Remarque :</u>

Le rotationnel d'un gradient est nul, c'est-à-dire que si f est une fonction scalaire, donc :

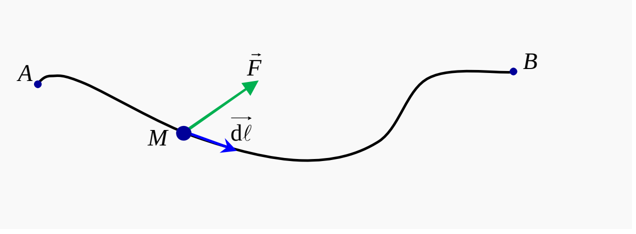
$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{0}$$

Autrement dit, si un vecteur $\vec{V}$ dérive d'une fonction scalaire, donc : $\overrightarrow{Rot}(\vec{V}) = \vec{0}$

V.2- Travail et puissance d'une force

V.2-1. Travail élémentaire d'une force

Soit un point matériel M, de masse m, décrivant une trajectoire (C) par rapport à un référentiel (R). Au cours de son mouvement, le point M est soumis à une force $\vec{F}$.



Le travail élémentaire effectué par $\vec{F}$ sur le point matériel M lors de son déplacement élémentaire (infiniment petit) $\overrightarrow{d\ell}$ est donné par la loi : $dW(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{d\ell}$

V.2-2. Travail d'une force

On suppose que le point matériel M, qui soumis à la force $\vec{F}$, passe à l'instant t_1 par la position M_1 et à l'instant t_2 par la position M_2.

Le travail effectué par la force $\vec{F}$ lors du déplacement de M_1 à M_2 est :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \bullet \overrightarrow{d\ell} \quad \text{(exprimé en Joule "J" } [1\ J = 1\ N \cdot m])$$

<u>*Remarques :*</u>

1- *Si la force* $\vec{F}$ *est constante* (ne dépend pas du mouvement, comme le poids $\vec{P}$ par exemple) *et le déplacement entre* M_1 *et* M_2 *est rectiligne. Le travail de* $\vec{F}$ *s'écrit :*

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{M_1 M_2}$$

2- *Si la force* $\vec{F}$ *est perpendiculaire au trajet de* M_1 *à* M_2*, son travail au cours de ce déplacement est nul :* $W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = 0\ J$

3- *La force appliquée* $\vec{F}$ *est dite :*

- *motrice si son travail est positif* $W(\vec{F}) > 0$ (travail moteur) *: la force* $\vec{F}$ *tend à faire déplacer le mobile dans le sens positif du mouvement.*
- *résistante si son travail est négatif* $W(\vec{F}) < 0$ (travail résistant) *: la force* $\vec{F}$ *tend à s'opposer au mouvement du mobile.*
- *ne travail pas si son travail est nul :* $W(\vec{F}) = 0\ J$.

4- *Le travail effectué par un ensemble de forces* $\sum \vec{F_i}$, *est la somme des travaux de ces forces :* $W(\sum \vec{F_i}) = \sum W_i(\vec{F_i})$

V.2-3. Puissance d'une force

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{V}$, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$ (notée $P(\vec{F})$) est la grandeur scalaire définie par la relation :

$$P(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \vec{V} \quad \text{(exprimée en Watts "W" } [1\ W = 1\ J \cdot s^{-1}])$$

D'après la définition du vecteur vitesse $\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{d\ell}}{dt}$, la relation entre la puissance d'une force et son travail élémentaire s'écrit : $dW(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{d\ell} = P(\vec{F}) \cdot dt$

Par conséquence : le travail d'une force égal : $W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F}) \cdot dt$,

Ou : la puissance d'une force égale : $P(\vec{F}) = \dfrac{dW(\vec{F})}{dt}$

<u>*Remarque :*</u>

La puissance d'une force $\vec{F}$ *est :*

- *positive* $P(\vec{F}) > 0$, *si* $\vec{F}$ *est motrice (*$W(\vec{F}) > 0$*)*
- *négative* $P(\vec{F}) < 0$, *si* $\vec{F}$ *est résistante (*$W(\vec{F}) < 0$*)*
- *nulle* $P(\vec{F}) = 0$, *si* $\vec{F}$ *ne travail pas (*$\vec{F}$ perpendiculaire au trajet ($W(\vec{F}) = 0\ J$)), *ou si le point matériel est immobile.*

V.3- Energie d'un système matériel

L'énergie (notée E) est une grandeur scalaire qui décrit l'état du système matériel. Dans le SI d'unités, l'énergie est exprimée en Joule "J" .

V. 3.-1. Energie cinétique

a. Définition

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m, animé avec une vitesse v, par la grandeur E_C , telle que : $E_C = \frac{1}{2} m v^2$

b. Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

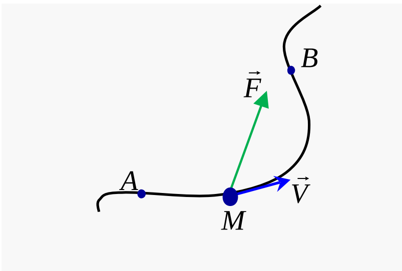
$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

Soit un point matériel M, de masse m, en déplacement entre les points A et B, sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$.

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par: $\mathrm{d}W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

Alors que, la vitesse s'écrite : $\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{V}\,\mathrm{d}t$

Et d'après le P. F. D (Principe fondamental de la dynamique), on a : $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}$



Donc, $\mathrm{d}W(\vec{F}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} \bullet \vec{V}\,\mathrm{d}t$

Sachant que : $\mathrm{d}(v^2) = \mathrm{d}(\vec{V} \bullet \vec{V}) = 2\,\vec{V} \bullet \mathrm{d}\vec{V}$

Alors : $\mathrm{d}W(\vec{F}) = \frac{1}{2} m\,\mathrm{d}(v^2) \Rightarrow \mathrm{d}W(\vec{F}) = \mathrm{d}E_C$

Par conséquence, le travail effectué entre les positions A et B sera:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_A^B \mathrm{d}E_C$$
$$= E_C(B) - E_C(A)$$

V. 3-2. Energie potentielle

a. Forces conservatives et non conservatives

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si son travail entre deux positions M_1 et M_2 dépend uniquement de la position de départ (M_1) et de la position d'arrivée (M_2).

<u>Remarques :</u>

1- *Le travail* $W_{M_1\to M_2}(\vec{F})$ *effectué par une force conservative est indépendant du chemin suivi pour déplacer de* M_1 *à* M_2.

2- *Si la trajectoire du mobile est fermée* ($M_1 \to M_2 \to M_1$), *le travail effectué par la force conservative* $\vec{F}$ *est nul :* $W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -W_{M_2\to M_1}(\vec{F})$

3- *Si le travail* $W_{M_1\to M_2}(\vec{F})$ *dépend du chemin suivi entre* M_1 *à* M_2, *la force* $\vec{F}$ *est dite non conservative.*

Exemples

<u>Forces conservatives</u> ($\vec{F}_C$)

- Le poids $\vec{P}$;
- La force de rappel $\vec{F}_r$.

<u>Forces non conservatives</u> ($\vec{F}_{NC}$)

- La force normale de la réaction $\vec{N}$;
- Les forces de frottement $\vec{f}$;
- La tension du fil $\vec{T}$.

b. Energie potentielle

1- *Définition*

Soit un point matériel M de masse m , soumis à une force $\vec{F}$.

Condition

La force $\vec{F}$ *est conservative si elle dérive d'une fonction scalaire* (ou potentiel); *c'est-à-dire qu'elle existe une fonction scalaire* E_P *tel que :* $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,(E_p)$

E_P *: est appelé l'énergie potentielle du point* M .

<u>Remarques :</u>

1- *L'énergie potentielle* E_P *n'est définie qu'à une constante près* C *; c'est-à-dire que* E_P *s'écrit :* $E_P = E'_P + C$

2- *Puisque :* $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}\,(f)) = \vec{0}$, *quelque soit la fonction* f *, donc pour vérifier qu'une force* $\vec{F}$ *est conservative, il suffit de vérifier que :* $\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

3- *On peut associer une énergie potentielle uniquement aux forces conservatives.*

2- *Relation entre l'énergie potentielle et le travail*

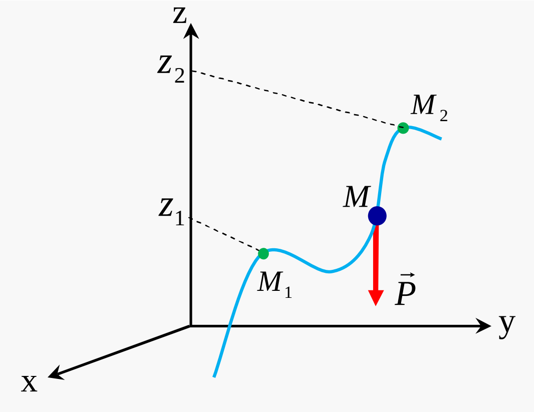
Le travail effectué par une force conservative $\vec{F}_C$ quand un point matériel M se déplace de M_1 vers M_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_C) = -\Delta E_P = -\left(E_P(M_2) - E_P(M_1)\right)$$

3- Energie potentielle gravitationnelle

C'est l'énergie potentielle associée à la force du poids (ou la pesanteur) $\vec{P}$.

Dans un référentiel R(O, x, y, z), on considère le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à la pesanteur terrestre: $\vec{P} = -m g \vec{k}$



Donc, le travail de $\vec{P}$ quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P} \bullet \overrightarrow{d\ell} = \int_{z_1}^{z_2} -m\, g\, dz$$

$$= -m\, g\, (z_2 - z_1) = -m\, g\, \Delta h$$

Donc, l'énergie potentielle gravitationnelle du point de masse m peut être donnée par la relation : $E_P = m\, g\, h + C$

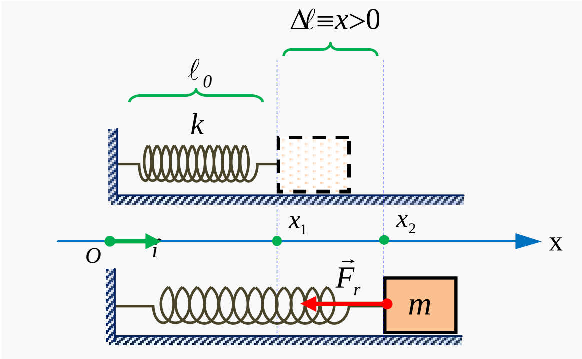
Où : h : la hauteur de la position de M par rapport à un niveau $h = 0$

C : une constante d'intégration.

4- Energie potentielle élastique

C'est l'énergie potentielle associée à la force du rappel $\vec{F_r}$ d'un ressort .

On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur k (figure ci-contre).



La force de rappel du ressort est donnée par :

$$\vec{F_r} = -k\, \Delta\ell\, \vec{i} = -k\, x\, \vec{i}$$

Donc, le travail effectué par $\vec{F_r}$ quand le point matériel se déplace de M_1 à M_2 est :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_r} \bullet \overrightarrow{d\ell} = \int_{x_1}^{x_2} -k\, x\, dx$$

$$= -\left(\frac{1}{2} k\, x_2^2 - \frac{1}{2} k\, x_1^2\right)$$

Alors, l'énergie potentielle élastique est donnée par : $E_P = \frac{1}{2} k\, x^2 + C$

Où : x : l'allongement du ressort

C : une constante d'intégration.

V. 3-3. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

$$\Rightarrow E_C(B) - E_C(A) = -\left(E_P(B) - E_P(A)\right) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

$$\Leftrightarrow \left(E_C(B) + E_P(B)\right) - \left(E_C(A) + E_P(A)\right) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

On introduit une nouvelle grandeur symbolisée par E, et qu'on l'appeler « Energie mécanique du système », telle que : $E = E_C + E_P$

Alors, entre les deux points A et B : $E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$

Théorème de l'énergie mécanique

Enoncé

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système.

$$\Delta E = E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

Cependant, si le système ne subit aucune force extérieure non conservative, l'énergie mécanique se conserve : $\Delta E = 0$

V.4- Conditions de stabilité d'un équilibre de système

V.4-1. Equilibre et condition d'équilibre

Dans un référentiel galiléen, un système est en équilibre à la position M_0, si abandonné en ce point sans vitesse initiale, il y demeure au repos.

D'après le principe d'inertie, il suffit que la résultante des forces appliquées sur le système placé en M_0 soit nulle :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \vec{F}_C + \sum \vec{F}_{NC} = 0$$

Pour un système soumis uniquement à une force conservative $\vec{F}_C$ ($\sum \vec{F}_{NC} = 0$), son énergie potentielle est donnée par la relation : $\vec{F}_C = -\overrightarrow{grad}\,(E_p)$

Et dans le cas où E_p ne dépend que d'une variable x, nous avons : $\vec{F}_C = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{i}$

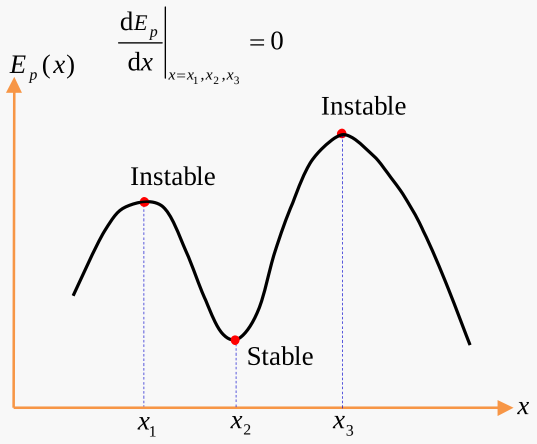
Donc, la condition d'équilibre du système s'écrite : $\vec{F}_C = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$

Position d'équilibre d'un système

D'après la condition : $\dfrac{dE_p}{dx} = 0$

La position d'équilibre du système est définie par un extremum de la fonction $E_P(x)$,

C'est la position à laquelle l'énergie potentielle est maximale ou minimale .



V.4-2. Stabilité d'un équilibre

On écarte un système matériel de sa position d'équilibre M_0 :

- Si la résultante des forces qui apparaît tend à ramener le système en M_0, alors son équilibre est dit *stable*.
- Si la résultante des forces qui apparaît tend à éloigner le système de M_0, alors son équilibre est dit *instable*.

V.4-3. Condition de stabilité d'un équilibre

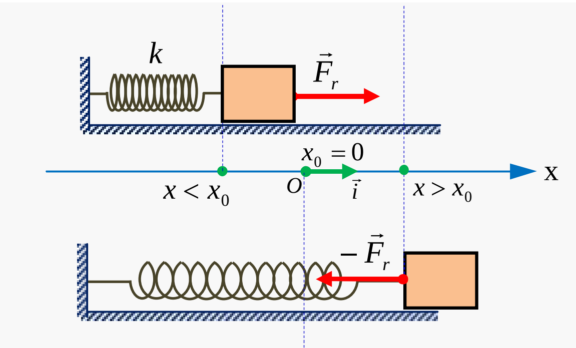
Soit le système masse-ressort de la figure ci-contre.

La force conservative agit sur le système dans ce cas, est la force de rappel du ressort.

L'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.

Supposons que la position d'équilibre est x_0, donc :

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$$



Position d'équilibre

On écarte le système à $x < x_0$, donc la composante de la force de rappel, qui ramène le système à nouveau en x_0, est positive : $F_r > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dE_p}{dx} < 0$ (puisque $F_r = -\dfrac{dE_p}{dx}$)

Cependant, dans le cas d'écartement à $x > x_0$, la composante est négative $\Rightarrow \dfrac{dE_p}{dx} > 0$

Donc, la dérivée $\dfrac{dE_p}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule à $x = x_0 \Leftrightarrow \left.\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$

Et l'énergie potentielle du système présente un minimum pour $x = x_0$

Et par conséquence, la condition de stabilité traduite par E_p minimale, peut s'écrite par la relation :

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Conclusion

	Conditions
Système en équilibre à $x = x_0$, si :	$\left.\frac{dE_p}{dx}\right\|_{x=x_0} = 0$
Equilibre stable si :	$E_p(x_0)$ minimale $\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right\|_{x=x_0} > 0$
Equilibre instable si :	$E_p(x_0)$ maximale $\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right\|_{x=x_0} < 0$