Université Mohamed Boudiaf – M'sila
Faculté Des Sciences

Domaine : Sciences de la Matière (SM)

1ère année LMD

Semestre : S1

Sujets d'examen corrigés

Physique 1
Mécanique du Point Matériel

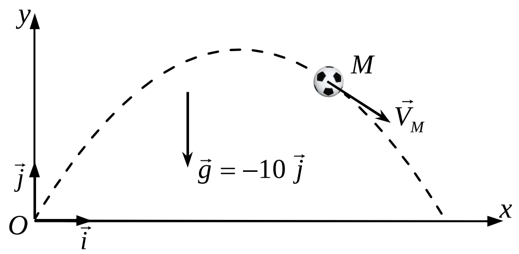
Préparé par : Dr. KHALFALLAH Fares

Année universitaire 2021/2022

SUJET 1

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $R(O,\ x\,y)$, la position M d'un projectile est donnée, à l'instant t, par les coordonnées : $x(t)=2\,t$; $y(t)=-5\,t^2+2\,t$



1. Montrer que le module du vecteur vitesse est :
$$\left\|\vec{V}(t)\right\|=2\sqrt{1+(1-5\,t)^2}$$

2. Montrer que la composante tangentielle de l'accélération est : $a_T(t)=\dfrac{-10\,(1-5\,t)}{\sqrt{1+(1-5\,t)^2}}$

3. Trouver, en fonction de t, l'expression de la composante normale $a_N(t)$.

في معلم متعامد و متجانس $R(O,\ x\,y)$ ، يتم تحديد الموضع M لقذيفة، عند اللحظة t، بالإحداثيات :

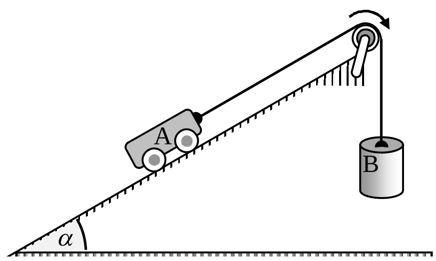
$$y(t)=-5\,t^2+2\,t \quad ؛ \quad x(t)=2\,t$$

1. بين أن طويلة شعاع السرعة هي : $\left\|\vec{V}(t)\right\|=2\sqrt{1+(1-5\,t)^2}$.
2. بين أن المركبة المماسية للتسارع هي : $a_T(t)=\dfrac{-10\,(1-5\,t)}{\sqrt{1+(1-5\,t)^2}}$
3. أوجد، بدلالة t، عبارة المركبة الناظمية $a_N(t)$.

Exercice 2

Un chariot (A), de masse m_1, se déplace sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le chariot est attaché à un corps (B) de masse m_2 par un fil inextensible glisse, sans frottement, sur une poulie.

On néglige les masses du fil et de la poulie et on suppose que le chariot (A) est soumis, au cours de son mouvement sur le plan incliné, à une force de frottement de valeur constante f_c.



1. Représenter les forces agissant sur le chariot (A) et sur le corps (B).
2. Représenter les accélérations $\vec{a}_A$ (du chariot (A)) et $\vec{a}_B$ (du corps (B)).
3. Si μ_c est le coefficient de frottement cinétique du plan incliné et g est l'accélération gravitationnelle, montrer que l'expression de l'accélération du chariot est :
$$a=\frac{m_2-m_1\left(\mu_c\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{m_1+m_2}\,g$$
4. Pour : $m_1=1\ \mathrm{kg}$, $m_2=1{,}5\ \mathrm{kg}$, $\alpha=30°$, $\mu_c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, calculer la valeur de l'accélération a.

تتحرك عربة (A) كتلتها m_1 على مستوى مائل بزاوية α بالنسبة للأفق. يتم وصل العربة بجسم (B) كتلته m_2 بواسطة خيط غير ممتط ينزلق بدون احتكاك على بكرة. بإهمال كتل الخيط والبكرة ، وبفرض أن العربة (A) تتعرض أثناء حركتها على المستوى المائل

لقوة احتكاك بقيمة ثابتة f_c .

1. مثل القوى المؤثرة على العربة (A) و على الجسم (B).
2. مثل التسارعات $\vec{a}_A$ (للعربة (A)) و $\vec{a}_B$ (للجسم (B)).
3. إذا كان μ_c هو معامل الاحتكاك الحركي للمستوى المائل و g هو تسارع الجاذبية، فبين أن عبارة تسارع العربة هي :

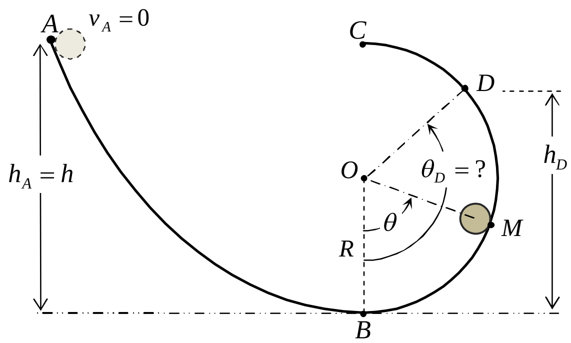
$$a = \frac{m_2 - m_1\left(\mu_c \cos\alpha + \sin\alpha\right)}{m_1 + m_2} g$$

4. من أجل : $m_1 = 1 \text{ kg}$ ، $m_2 = 1{,}5 \text{ kg}$ ، $\alpha = 30°$ ، $\mu_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ، احسب قيمة التسارع a

Exercice 3

Une bille, de masse m, se déplace sans frottement sur une trajectoire ABC formée de deux parties. La partie BC est un demi-cercle de centre O et de rayon R (figure ci-dessous).

À l'instant $t = 0$, la bille est libérée, sans vitesse initiale, au point A de hauteur $h_A = h$, ensuite sa position M, à l'intérieur du demi-cercle, est repérée par l'angle θ, qui est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM}$.



1. Représenter en position M :
   a) les forces agissant sur la bille ;
   b) le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ de la bille ;
   c) la base de Frenet $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$
2. Montrer que la vitesse de la bille en position M est donnée en fonction de θ, par :

$$v_M = \sqrt{2g\left[h - R\left(1 - \cos\theta\right)\right]}$$

3. Montrer que l'expression de la réaction normale appliquée sur la bille en position M est :

$$\vec{N} = \frac{m\,g}{R}\left[2h - R\left(2 - 3\cos\theta\right)\right]\vec{U}_N$$

5. Trouver la relation entre h et R, pour laquelle la bille peut quitter la surface du demi-cercle à un point D de hauteur $h_D = \frac{5R}{3}$.

تتحرك كرية، كتلتها m ، بدون احتكاك على مسار ABC مكون من جزأين (الشكل أعلاه). الجزء BC هو عبارة عن نصف دائرة مركزها O ونصف قطر R. عند اللحظة $t = 0$ ، يتم تحرير الكرية، بدون سرعة ابتدائية ، عند النقطة A التي ارتفاعها $h_A = h$ ، ثم يتم تحديد موضعها M ، داخل نصف الدائرة ، بالزاوية θ ، والتي هي الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OM}$.

1. مثل في الموضع M :
   - القوى المؤثرة على الكرية ،
   - شعاع السرعة للكرية $\vec{V}_M$ ،
   - قاعدة فريني $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$.
2. بين أن سرعة الكرية في الموضع M تعطى كدالة لـ θ ، بـ: $v_M = \sqrt{2g\left[h - R\left(1 - \cos\theta\right)\right]}$
3. بين أن عبارة رد الفعل الناظمي المطبق على الكرية في الموضع M هي : $\vec{N} = \frac{m\,g}{R}\left[2h - R\left(2 - 3\cos\theta\right)\right]\vec{U}_N$
4. أوجد العلاقة بين h و R ، و التي من أجلها يمكن للكرية أن تغادر سطح نصف الدائرة عند نقطة D ارتفاعها $h_D = \frac{5R}{3}$.

SUJET 1 – Corrigé

Exercice 1

Les coordonnées de la position M du projectile sont : $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = -5t^2 + 2t \end{cases}$

1. Le vecteur vitesses est : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy(t)}{dt}\vec{j}$ (ou $\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$)

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = 2\,\vec{i} + 2\,(-5t+1)\,\vec{j}$$

Donc, le module de $\vec{V}(t)$ est : $\left\|\vec{V}(t)\right\| = 2\sqrt{1+(1-5t)^2}$

2. En cordonnées intrinsèques, la composante tangentielle du vecteur accélération est :

$$a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{avec : } v(t) = \left\|\vec{V}(t)\right\| \quad \left(\text{ou} \quad a_T(t) = \frac{d\left\|\vec{V}(t)\right\|}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_T(t) = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{2\times(-5)\times(1-5t)}{\sqrt{1+(1-5t)^2}} = \frac{-10\,(1-5t)}{\sqrt{1+(1-5t)^2}}$$

3. L'accélération du mouvement est : $\vec{a} = \vec{g} = -10\,\vec{j}$ (mouvement d'un projectile)

Donc, l'accélération normale $a_N(t)$ peut être trouvée à partir de la relation :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \text{ , avec : } a = \left\|\vec{a}\right\| = 10$$

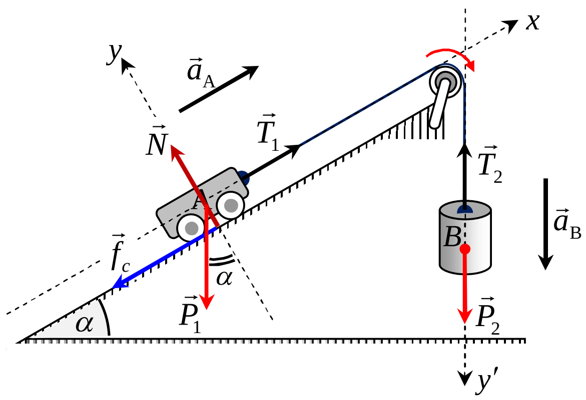
$$\Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = 100 - \frac{100(1-5t)^2}{1+(1-5t)^2} = \frac{100}{1+(1-5t)^2}$$

Donc, $a_N(t) = \dfrac{10}{\sqrt{1+(1-5t)^2}}$

Exercice 2

1. Représentation des forces
2. Représentation des accélérations $\vec{a}_A$ et $\vec{a}_B$
3. L'expression de l'accélération :

L'application du principe fondamental de la dynamique (P.F.D) : $\sum\vec{F} = m\,\vec{a}$



a) Pour le chariot (A) : $\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{f}_c + \vec{T}_1 = m_1\,\vec{a}_A$

La projection sur le repère choisi : $\begin{cases} axe\,(x) & -P_1 \sin\alpha - f_c + T_1 = m_1\,a_A \text{ ....Eq(1)} \\ axe\,(y) & -P_1 \cos\alpha + N = 0 \text{ ....Eq(2)} \end{cases}$

b) Pour le corps (B) : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\,\vec{a}_B$

La projection sur le repère choisi : $P_2 - T_2 = m_2\,a_B$ ....Eq(3)

Avec : $T_1 = T_2 = T$, $a_A = a_B = a$ et $f_c = \mu_c\,N$

Donc, Eq(1) + Eq(3) $\Leftrightarrow$ $P_2 - P_1 \sin\alpha - \mu_c\,N = (m_1 + m_2)\,a$ ....Eq(4)

Et puisque : Eq(2) $\Leftrightarrow$ $N = P_1 \cos\alpha$

Alors, Eq(4) $\Leftrightarrow$ $P_2 - P_1 \sin\alpha - \mu_c\, P_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2)\, a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{P_2 - P_1(\mu_c \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2}$$

Avec : $P_1 = m_1\, g$ et $P_2 = m_2\, g$

$\Rightarrow$ l'accélération du chariot est : $a = \dfrac{m_2 - m_1(\mu_c \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2}\, g$

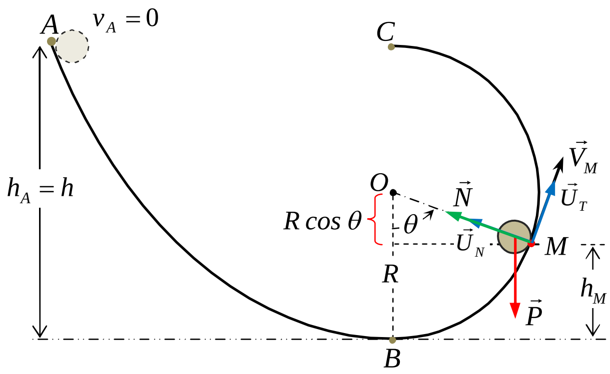
4. Pour : $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1{,}5$ kg, $\alpha = 30°$, $\mu_c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $g = 10$ m·s^{-2}, la valeur de a est :

$$a = \frac{1{,}5 - 1\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{1{,}5 + 1}\times 10 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Exercice 3

A la position M, la bille est soumise aux forces suivantes :

- Le poids : $\vec{P}$
- La réaction normale : $\vec{N}$



1. Représentation des forces, du vecteur vitesse $\vec{V}_M$ et de la base de Frenet $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$

2. La vitesse de la bille à la position M repéré par l'angle θ

En absence de frottement (forces non conservatives nulles), On peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$

Entre la position A et la position M : $E_T(M) - E_T(A) = 0 \Leftrightarrow E_T(A) = E_T(M)$

$$\Leftrightarrow E_C(A) + E_P(A) = E_C(M) + E_P(M)$$

<u>A la position A</u> : l'énergie cinétique : $E_C(A) = \dfrac{1}{2} m\, v_A^2 = 0$ (puisque : $v_A = 0$) ;

l'énergie potentielle gravitationnelle: $E_P(A) = m\, g\, h_A = m\, g\, h$

<u>A la position M</u> : l'énergie cinétique : $E_C(M) = \dfrac{1}{2} m\, v_M^2$ (avec : $v_M = \left\| \vec{V}_M \right\|$) ;

l'énergie potentielle gravitationnelle: $E_P(M) = m\, g\, h_M$

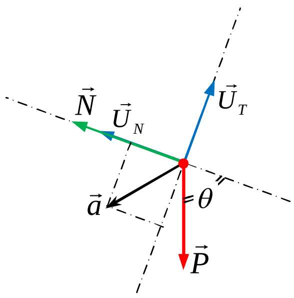
Avec : $h_M = R(1 - \cos\theta)$ $\Rightarrow E_P(M) = m\, g\, R(1 - \cos\theta)$

Donc : $\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow m\, g\, h = \dfrac{1}{2} m\, v_M^2 + m\, g\, R(1 - \cos\theta) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} m\, v_M^2 = m\, g\left[h - R(1 - \cos\theta)\right]$

$\Rightarrow$ la vitesse de la bille à la position M est : $v_M = \sqrt{2\, g\left[h - R(1 - \cos\theta)\right]}$

3. En appliquant le P.F.D, à la position M : $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$

La projection sur la base de Frenet $(\vec{U}_N , \vec{U}_T)$, nous donne :



$$\begin{cases} \text{sur } \vec{U}_N & -P\cos\theta + N = m\, a_N \text{ ....Eq(1)} \\ \text{sur } \vec{U}_T & -P\sin\theta = m\, a_T \text{ ....Eq(2)} \end{cases}$$

Avec : $a_N = \frac{v_M^2}{R} = 2\frac{g}{R}\left[h - R(1-\cos\theta)\right]$ et $P = m\,g$,

Donc : Eq(1) $\Leftrightarrow$ $N = \frac{m\,g}{R}\left[2h - 2R(1-\cos\theta)\right] + m\,g\cos\theta$

$$= \frac{m\,g}{R}\left[2h - 2R(1-\cos\theta) + R\cos\theta\right]$$

$$= \frac{m\,g}{R}\left[2h - R(2-3\cos\theta)\right]$$

$\Rightarrow$ l'expression de la réaction normale $\vec{N}$ est : $\vec{N} = \frac{m\,g}{R}\left[2h - R(2-3\cos\theta)\right]\vec{U}_N$

4. La bille quitte la surface du demi-cercle $\Leftrightarrow$ la réaction normale $\vec{N}$ est nulle ou $N = 0$

$\Rightarrow$ au point D : $\frac{m\,g}{R}\left[2h - R(2-3\cos\theta_D)\right] = 0 \Leftrightarrow 2h = R(2-3\cos\theta_D)$

Avec : $\cos\theta_D = \frac{R-h_D}{R}$ (d'après le résultat de $h_M = R(1-\cos\theta_M)$)

$\Rightarrow$ $2h = 2R - 3R\left(\frac{R-h_D}{R}\right) = 3h_D - R$

Pour : $h_D = \frac{5R}{3}$, la hauteur du point A est : $h = 2R$

SUJET 2

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $R(O,\ x\,y)$, les coordonnées d'un point matériel M sont données par les équations horaires : $x(t) = t$; $y(t) = t\,(t-1)$

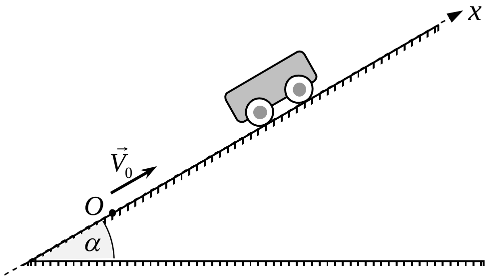
1. Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire du point M.
2. Montrer que le module du vecteur vitesse de M, à l'instant t, est : $\left\|\vec{V}(t)\right\| = \sqrt{1+(2\,t-1)^2}$.
3. En utilisant la relation : $\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\| = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^3}{R}$, montrer que le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de t est : $R = \dfrac{1}{2}\left(1+(2\,t-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}$
4. Trouver, en fonction de t, l'expression de la composante normale de l'accélération $a_N(t)$.

معلم متعامد و متجانس $R(O,\ x\,y)$، تعطى إحداثيات نقطة مادية M بالمعادلات الزمنية : $x(t) = t$ ؛ $y(t) = t\,(t-1)$

1. أوجد المعادلة الديكارتية لمسار النقطة M .
2. بين أن طويلة شعاع السرعة لـ M ، عند اللحظة t، هي : $\left\|\vec{V}(t)\right\| = \sqrt{1+(2\,t-1)^2}$.
3. باستعمال العلاقة : $\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\| = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^3}{R}$، بين أن نصف قطر انحناء المسار بدلالة الزمن t هو : $R = \dfrac{1}{2}\left(1+(2\,t-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}$.
4. أوجد، بدلالة t، عبارة المركبة الناظمية للتسارع $a_N(t)$.

Exercice 2

Un chariot de masse m, se trouve sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (figure ci-contre). A partir du point O, on lance le chariot vers le haut avec une vitesse initiale de valeur v_0 et on suppose qu'il est soumis, au cours de son mouvement, à une force de frottement de valeur constante f_c.



1. Représenter les forces agissant sur le chariot.
2. Représenter le vecteur accélérations $\vec{a}$.
3. Si μ_c est le coefficient de frottement cinétique du plan incliné et g est l'accélération gravitationnelle, montrer que l'expression de l'accélération du chariot est :
$$a = -g\,(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)$$
4. Déterminer, en fonction de v_0, la distance "d" que parcourra le chariot avant de s'arrêter.
5. Pour : $v_0 = 5\sqrt{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha = 30°$, $\mu_c = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, calculer les valeurs de l'accélération a et la distance d.

عربة كتلتها m تتواجد على سطح مستوى مائل يصنع زاوية α مع الأفق. من النقطة O، يتم إطلاق العربة لأعلى بسرعة ابتدائية v_0 ، ويفترض أنها تتعرض أثناء حركتها لقوة احتكاك ذات قيمة ثابتة f_c .

1. مثل القوى المؤثرة على العربة .

2. مثل شعاع التسارع $\vec{a}$.

3. إذا كان μ_c هو معامل الاحتكاك الحركي للمستوى المائل و g هو تسارع الجاذبية، فبين أن عبارة تسارع العربة هي :

$a = -g\left(\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha\right)$،

4. حدد، بدلالة v_0 ، المسافة " d " التي ستقطعها العربة قبل أن تتوقف.

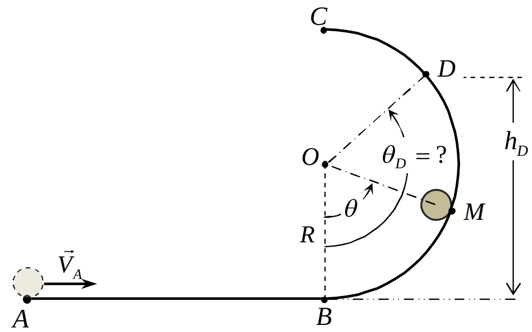
5. من أجل : $v_0 = 5\sqrt{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ، $\alpha = 30°$ ، $\mu_c = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ و $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ ، احسب قيم التسارع a و المسافة d .

Exercice 3

Une bille, de masse m, se déplace sans frottement sur une trajectoire ABC formée de deux parties. La partie BC est un demi-cercle de centre O et de rayon R (figure ci-dessous).

À l'instant $t = 0$, la bille est lancée en A avec une vitesse initiale horizontale de valeur v_A.

À l'intérieur du demi-cercle, la position M de la bille est repérée par l'angle θ, qui est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM}$.



1. Représenter en position M :
   a) les forces agissant sur la bille ;
   b) le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ de la bille ;
   c) la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$
2. Montrer que la vitesse de la bille en position M est donnée en fonction de v_A et θ, par :

$$v_M = \sqrt{v_A^2 - 2\,g\,R\,(1-\cos\theta)}$$

3. Montrer que l'expression de la réaction normale appliquée sur la bille en position M est :

$$\vec{N} = -\,m\,g\left[\frac{v_A^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta\right]\vec{U}_\rho$$

6. Déterminer la valeur de v_A, en fonction de g et R, pour laquelle la bille peut quitter la surface du demi-cercle à un point D de hauteur $h_D = \dfrac{5\,R}{3}$.

تتحرك كرية، كتلتها m ، بدون احتكاك على مسار ABC مكون من جزأين (الشكل أعلاه). الجزء BC هو عبارة عن نصف دائرة مركزها O ونصف قطر R. عند اللحظة $t = 0$ ، يتم إطلاق الكرية عند النقطة A بسرعة ابتدائية أفقية قيمتها v_A ، داخل نصف الدائرة ، يتم تحديد الموضع M للكرية، بالزاوية θ والتي هي الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OM}$.

1. مثل في الموضع M :
   • القوى المؤثرة على الكرية ،
   • شعاع السرعة للكرية $\vec{V}_M$ ،
   • القاعدة القطبية $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$.
2. بين أن سرعة الكرية في الموضع M تعطى كدالة لـ v_A و θ ، بـ : $v_M = \sqrt{v_A^2 - 2\,g\,R\,(1-\cos\theta)}$
3. بين أن عبارة رد الفعل الناظمي المطبق على الكرية في الموضع M هي : $\vec{N} = -\,m\,g\left[\dfrac{v_A^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta\right]\vec{U}_\rho$
4. حدد قيمة v_A ، بدلالة g و R ، و التي من أجلها يمكن للكرية أن تغادر سطح نصف الدائرة عند نقطة D ارتفاعها $h_D = \dfrac{5\,R}{3}$.

SUJET 2 – Corrigé

Exercice 1

Les coordonnées du point M sont : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t\,(t-1) \end{cases}$

1. L'équation cartésienne de la trajectoire : $x = t \quad \Rightarrow \quad y(x) = x\,(x-1) = x^2 - x$

2. Le vecteur vitesses est : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy(t)}{dt}\vec{j}$ (ou $\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$)

   $\Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{i} + (2t-1)\,\vec{j}$

   Donc, le module de $\vec{V}(t)$ est : $\left\|\vec{V}(t)\right\| = \sqrt{1+(2t-1)^2}$

3. En utilisant la relation : $\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\| = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^3}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^3}{\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\|}$

   Avec : l'accélération c'est $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}$ (ou $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j}$)

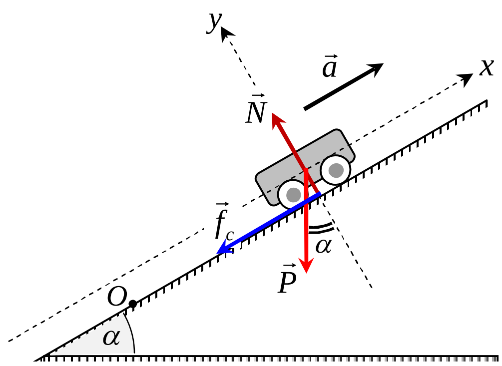
   $\Rightarrow \vec{a}(t) = 2\,\vec{j}$

   Donc, $\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & (2t-1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\| = 2$

   $\Rightarrow R = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^3}{\left\|\vec{V}(t)\wedge\vec{a}(t)\right\|} = \dfrac{1}{2}\left(1+(2t-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}$

4. La composante normale du vecteur accélération est : $a_N(t) = \dfrac{\left\|\vec{V}(t)\right\|^2}{R} = \dfrac{2}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}$

Exercice 2



1. Représentation des forces
2. Représentation de l'accélérations $\vec{a}$
3. L'expression de l'accélération :

   L'application du principe fondamental de la dynamique (P.F.D) : $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

   Nous avons : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_c = m\,\vec{a}$

   La projection sur le repère choisi : $\begin{matrix} axe\,(x) \\ axe\,(y) \end{matrix} \begin{cases} -P\sin\alpha - f_c = m\,a \text{..............Eq(1)} \\ -P\cos\alpha + N = 0 \text{.................Eq(2)} \end{cases}$

   D'après l'équation (2) : $N = P\cos\alpha$

Avec : $f_c = \mu_c \, N$ et $P = m\,g$

Donc, l'équation (1) $\Leftrightarrow$ $-m\,g\,\sin\alpha - \mu_c\,m\,g\,\cos\alpha = m\,a$

$$\Rightarrow \quad a = -g\left(\sin\alpha + \mu_c\,\cos\alpha\right)$$

4. La distance "d" parcourue par le chariot avant de s'arrêter :

   Comme l'accélération $a = cte$ $\Rightarrow$ le mouvement du chariot est uniformément varié (MUV)

   En utilisant la relation : $d = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2\,a}$

   A l'arrêt, $v = 0$ $\Rightarrow$ $d = \dfrac{-v_0^2}{2\,a} = \dfrac{v_0^2}{2\,g\left(\sin\alpha + \mu_c\,\cos\alpha\right)}$

5. Pour : $v_0 = 5\sqrt{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha = 30°$, $\mu_c = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,

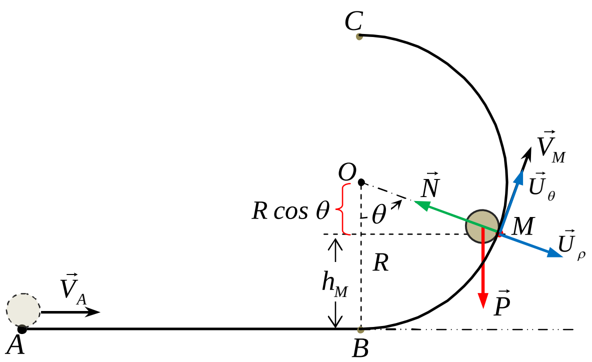
   La valeur de a est : $a = -10\times\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -10\times\left(\dfrac{3}{4}\right) = -7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

   La valeur de d est : $d = \dfrac{-(25\times 3)}{2\times(-7{,}5)} = 5\ \mathrm{m}$

Exercice 3

A la position M, la bille est soumise aux forces suivantes :

- Le poids : $\vec{P}$
- La réaction normale : $\vec{N}$



1. Représentation des forces, du vecteur vitesse $\vec{V}_M$ et de la base de Frenet $(\vec{U}_N, \vec{U}_T)$

2. La vitesse de la bille à la position M repéré par l'angle θ

   En absence de frottement (forces non conservatives nulles), On peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$

   Entre la position A et la position M : $E_T(M) - E_T(A) = 0$ $\Leftrightarrow$ $E_T(A) = E_T(M)$

   $$\Leftrightarrow \quad E_C(A) + E_P(A) = E_C(M) + E_P(M)$$

   <u>A la position A</u> : l'énergie cinétique : $E_C(A) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_A^2$

   l'énergie potentielle gravitationnelle: $E_P(A) = m\,g\,h_A = 0$ (puisque : $h_A = 0$) ;

   <u>A la position M</u> : l'énergie cinétique : $E_C(M) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_M^2$ (avec : $v_M = \left\|\vec{V}_M\right\|$) ;

   l'énergie potentielle gravitationnelle: $E_P(M) = m\,g\,h_M$

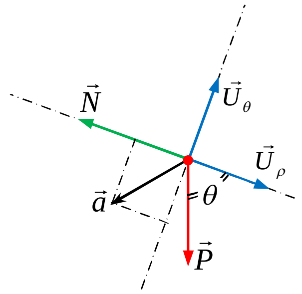
Avec : $h_M = R(1-\cos\theta) \Rightarrow E_P(M) = m\,g\,R(1-\cos\theta)$

Donc : $\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m v_A^2 = \frac{1}{2}m v_M^2 + m\,g\,R(1-\cos\theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}m v_M^2 = \frac{1}{2}m v_A^2 - m\,g\,R(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow$ la vitesse de la bille à la position M est : $v_M = \sqrt{v_A^2 - 2\,g\,R(1-\cos\theta)}$

3. En appliquant le P.F.D, à la position M : $\sum \vec{F}_{ext} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{P}+\vec{N} = m\cdot\vec{a}$

La projection sur la base polaire $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$, nous donne :



$$\begin{array}{l} \text{sur } \vec{U}_\rho \\ \text{sur } \vec{U}_\theta \end{array} \begin{cases} P\cos\theta - N = m\,a_\rho \text{ ....Eq(1)} \\ -P\sin\theta = m\,a_\theta \text{ ....Eq(2)} \end{cases}$$

En coordonnées polaires :

Le vecteur vitesse est : $\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{U}_\rho)}{dt} = R\,\dot{\theta}\,\vec{U}_\theta$ (avec : $v_M = \|\vec{V}_M\| = R\,\dot{\theta}$)

$\Rightarrow$ Le vecteur accélération est : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{U}_\rho + R\,\ddot{\theta}\,\vec{U}_\theta$

$\Rightarrow$ La composante radiale a_ρ égale : $a_\rho = -R\,\dot{\theta}^2 = -\frac{v_M^2}{R}$

Donc : Eq(1) $\Leftrightarrow -N = -m\frac{v_M^2}{R} - m\,g\cos\theta$

$$= -\frac{m\,v_A^2}{R} + 2\,m\,g\,(1-\cos\theta) - m\,g\cos\theta$$

$$= -m\,g\left[\frac{v_A^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta\right]$$

$\Rightarrow$ l'expression de la réaction normale $\vec{N}$ est : $\vec{N} = -N\,\vec{U}_\rho = -m\,g\left[\frac{v_A^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta\right]\vec{U}_\rho$

4. La bille quitte la surface du demi-cercle $\Leftrightarrow$ la réaction normale $\vec{N}$ est nulle ou $N = 0$

$\Rightarrow$ au point D : $m\,g\left[\frac{v_A^2}{g\,R} - 2 + 3\cos\theta_D\right] = 0 \Leftrightarrow v_A^2 = g\,R(2 - 3\cos\theta_D)$

Avec : $\cos\theta_D = \frac{R-h_D}{R} = 1 - \frac{h_D}{R}$ (d'après le résultat de $h_M = R(1-\cos\theta_M)$)

$\Rightarrow v_A^2 = g\,R\left(-1 + 3\frac{h_D}{R}\right)$

Pour : $h_D = \frac{5\,R}{3}$, la vitesse initiale v_A doit être : $v_A = 2\sqrt{g\,R}$

SUJET 3

Exercice 1

Dans un repère orthonormé R$(O,\ x\,y)$, un point matériel M , de masse $m = 5$ g, se déplace sous l'effet d'une seule force constante $\vec{F}$. A l'instant t, le vecteur vitesse de M est donné par :

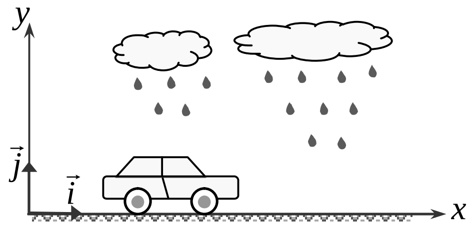
$$\vec{V}(t) = 2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}$$

Supposons que le point M est démarré son mouvement, à l'instant $t = 0$ s, à partir du point O.

1. Déterminer le vecteur position $\vec{r}(t)$, et montrer que la trajectoire de M a une forme parabolique .
2. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$, et calculer son module .
3. En appliquant la 2ème loi de Newton, déterminer l'expression de la force $\vec{F}$.
4. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail effectué par $\vec{F}$ entre les deux instants $t_0 = 0$ s et $t_1 = 2$ s .

Exercice 2

Le passager d'une voiture observe que les gouttes de pluie font un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale lorsque la voiture roule sur une route droite à une vitesse de $10\sqrt{3}\ \text{m.s}^{-1}$.

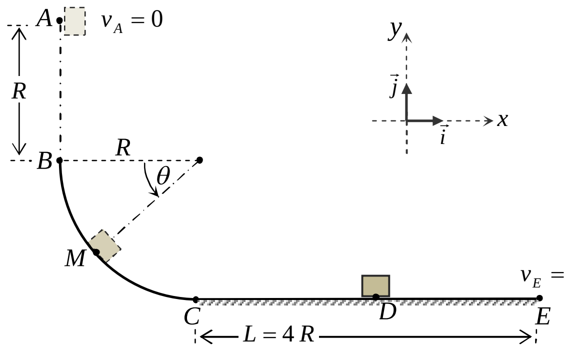


Supposons que la pluie tombe verticalement, calculer sa vitesse (vecteur et module):

1. par rapport au sol .
2. par rapport à la voiture en mouvement .

Exercice 3

A l'instant $t = 0$ s , un corps ponctuel, de masse m, est libéré du repos au point A, et se déplace le long du chemin $ABCE$ (figure ci-contre).



Entre les points A et B, le corps est en chute libre, puis se déplace sans frottement le long d'un quart de cercle BC de rayon R .

1. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique :
   a) Déterminer en fonction de g , R et θ , la vitesse du corps à la position M .
   b) En déduire la vitesse du corps au point C .
2. Sur la piste horizontale CE , de longueur L , le corps est soumis à une force de frottement $\vec{f}_c$ qui le fait s'arrêter au point E .
   a) Représenter en position D, les forces agissant sur le corps.
   b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de $\vec{f}_c$.
   c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$, calculer le coefficient de frottement cinétique entre le corps et la piste CE .

SUJET 3 – Corrigé

Exercice 1

La vitesse du point M est : $\vec{V}(t) = 2\,\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$

1. Le vecteur position est : $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$

Nous avons : $\vec{V}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x = 2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y = 2\,t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 2\,t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

L'intégration $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_0=0}^{x(t)} \mathrm{d}x = \int_{t_0=0}^{t} 2\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow x(t) = 2\,t$

et $\displaystyle\int_{y_0=0}^{y(t)} \mathrm{d}y = \int_{t_0=0}^{t} 2\,t\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow y(t) = t^2$

Alors : $\vec{r}(t) = 2\,t\;\vec{i} + t^2\;\vec{j}$

Donc, l'équation de la trajectoire est : $t = \dfrac{x}{2} \Rightarrow y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ (l'équation d'une parabole)

2. Le vecteur accélération est : $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{j}$

$$= 2\;\vec{j}$$

Le module de $\vec{a}$ est : $\|\vec{a}\| = 2\ \mathrm{m.s^{-2}}$

3. D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$

$$= (5\times 10^{-3} \times 2)\;\vec{j} \quad = 10^{-2}\;\vec{j}$$

4. Le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$

Entre les instants $t_0 = 0$ s et $t_1 = 2$ s : $\Rightarrow \Delta E_C = E_C(\text{à } t_0) - E_C(\text{à } t_1) = W(\vec{F})$

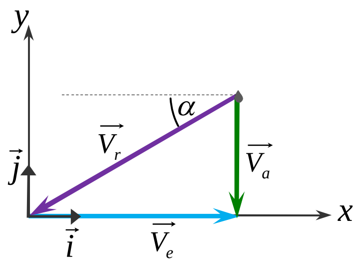
Avec : $E_C = \dfrac{1}{2} m\,v^2$

Et : $v = \left\|\vec{V}(t)\right\| = 2\sqrt{1+t^2} \quad \Rightarrow E_C = 2\,m\,(1+t^2)$

Alors, Le travail effectué par $\vec{F}$ est : $W(\vec{F}) = 2\,m\,(1+t_1^2) - 2\,m\,(1+t_0^2) = 8\,m$

$$= (8\times 5\times 10^{-3}) \; = 4\times 10^{-2} \quad \mathrm{J}$$

Exercice 2



- La vitesse de la pluie par rapport au sol $\equiv \vec{V}_a$
- La vitesse de la pluie par rapport à la voiture $\equiv \vec{V}_r$
- La vitesse de la voiture en mouvement $\equiv \vec{V}_e = 10\sqrt{3}\cdot\vec{i}$

La loi de composition des vitesses : $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

1. La vitesse de la pluie par rapport au sol :

Nous avons : $tan(\alpha) = \dfrac{V_a}{V_e} \Rightarrow V_a = V_e\, tan(\alpha) = V_e\, tan(30°)$

$$= 10\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

Alors, $\vec{V}_a = -V_a\,\vec{j} = -10\,\vec{j}$

2. La vitesse de la pluie par rapport à la voiture en mouvement :

Nous avons : $V_r^2 = V_a^2 + V_e^2 \Rightarrow V_r = \sqrt{V_a^2 + V_e^2} = 10\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 20 \text{ m.s}^{-1}$

Alors, $\vec{V}_r = -V_r\left[cos(\alpha)\,\vec{i} + sin(\alpha)\,\vec{j}\right] = -10\left[\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right]$

Exercice 3

1. D'après le principe de conservation de l'énergie mécanique : $\Delta E_T = 0$

a) La vitesse du corps à la position M :

Entre la position A et la position M : $E_T(M) - E_T(A) = 0 \Leftrightarrow E_T(A) = E_T(M)$

Avec , $E_T(A) = E_C(A) + E_P(A) = \dfrac{1}{2} m v_A^2 + m\,g\,h_A$

$$= 0 + m\,g\,(2\,R) = 2\,m\,g\,R$$

Et : $E_T(M) = E_C(M) + E_P(M) = \dfrac{1}{2} m v_M^2 + m\,g\,h_M$

$$= \frac{1}{2} m v_M^2 + m\,g\,R\,(1 - sin\,\theta)$$

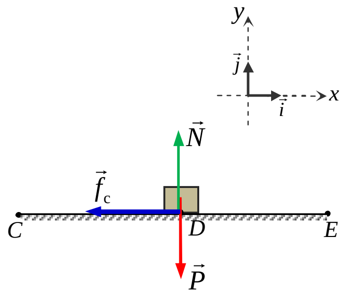
Donc : $\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} m v_M^2 = 2\,m\,g\,R - m\,g\,R\,(1 - sin\,\theta)\ \dfrac{1}{2} m v_M^2 = m\,g\,R\,(1 + sin\,\theta)$

$$\Rightarrow v_M = \sqrt{2\,g\,R\,(1 + sin\,\theta)}$$

b) La vitesse du corps au point C : $v_C = v_M\,(\text{à } \theta = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v_C = 2\sqrt{g\,R}$

2- Sur la piste horizontale CE :

a) Représentation des forces agissant sur le corps.



b) En appliquant le P.F.D : $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_c = m \cdot \vec{a}$$

Selon le repère mentionné, les forces s'écrivent :

$\vec{P} = -P\,\vec{j}$; $\vec{N} = N\,\vec{j}$ et $\vec{f}_c = -f_c\,\vec{i} = -\mu_c\,N\,\vec{i}$

La projection du P.F.D, nous donne : $N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m\,g$

Alors, la force de frottement est : $\vec{f}_c = -\mu_c\,m\,g\,\vec{i}$

c) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$:

le corps se déplace de C à E, donc : $E_C(E) - E_C(C) = W_{C\to E}(\vec{P}) + W_{C\to E}(\vec{N}) + W_{C\to E}(\vec{f}_c)$

Avec : $W_{C\to E}(\vec{P}) = 0$

$$W_{C\to E}(\vec{N}) = 0$$

$$W_{C\to E}(\vec{f}_c) = \int_C^E \vec{f}_c \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

$$= \vec{f}_c \bullet \overrightarrow{CE} \quad = -\mu_c\,m\,g\,L$$

Alors, $E_C(E) - E_C(C) = \frac{1}{2}m\cdot v_E^2 - \frac{1}{2}m\cdot v_C^2 = -\mu_c\,m\,g\,L$ (avec, $v_E = 0$),

Donc, $\mu_c = \frac{v_C^2}{2\,g\;L}$

$$= \frac{4\,g\,R}{8\,g\,R} \quad = 0{,}5$$