Cours Ordres treillis

Master I, S2
Algèbre et Mathématiques Discrètes

Abelaziz AMROUNE et **Mourad** *YETTOU*

30 mars 2020

Table des matières

Introduction

Comme les choses de la vie se chevauchent les uns avec les autres, il est nécessaire de les classifier ou de les ordonner, pour simplifier leur étude et leur compréhension et le décèlement de leurs vérités. Pour cela les mathématiciens ont inventé deux concepts fondamentaux qui sont : la relation d'équivalence et la relation d'ordre.
Dans ce cours nous allons traiter le sujet des ensembles ordonnés ensuite on aborde les treillis, qui sont une classe particulière d'ensembles ordonnés et nous allons accentuer l'étude sur les treillis de Boole ou **algèbre de Boole** (cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien **Georges Boole** 1815-1864).

Les treillis de Boole sont la base de la logique classique (propositionnelle), d'où ils ont beaucoup d'utilisations, surtout dans le domaine d'électronique en particulier **les circuits électroniques intégrés** qui sont le cœur de toute machine électronique.
Ce cours est réparti en Cinque chapitres :
Dans le premier chapitre : nous allons étudier la notion de relations binaires sur un ensemble, en particulier les relations d'ordres.
Dans le deuxième chapitre on donne des généralités sur les treillis.
Le troisième chapitre on aborde les algèbres booléennes qui sont des treillis distributifs fermés et complémentés dotés d'une structure supplémentaire qui nous permet de définir une arithmétique sur cette structure.
Le quatrième concerne les treillis de Heyting qui sont le modèle algébrique de la logique intuitionniste.
En fin en cinquième chapitre on donne un aperçu sur les systèmes déductifs.

Chapitre 1

Notions de relations binaires sur un ensemble

À la base de la théorie des graphes, le concept de relations joue un rôle fondamental dans les domaines les plus variés. En informatique, il occupe une place prépondérante dans les questions structurations de bases de données.
Dans ce chapitre nous allons développer la notion de relations binaires sur un ensemble, en particulier les relations d'ordres.

1.1 Relations binaires sur un ensemble

De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble est une proposition qui lie entre eux certains éléments de cet ensemble.

1.1.1 Préliminaires

Définition 1.1 (Produit cartésien) *[28]*
Soient E et F des ensembles, on note $E \times F$ et on appelle ***Le produit cartésien*** *de E et F l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à E et la seconde à F :*
$E \times F = \{(x, y) : (x \in E) \wedge (y \in F)\}$.

Définition 1.2 (Relation binaire sur un ensemble) *[28]*
Soit E un ensemble quelconque, une ***relation binaire*** *$\Re$ sur E est une partie de E^2, c'est-à-dire*

$\Re = \{(a,b) : (a,b) \in E^2\}$. *Si $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E et $(a,b) \in \Re$, on dit que **a** est en relation avec **b** selon $\Re$ et on écrit $a\Re b$.*

Définition 1.3 (L'image directe et l'image réciproque) *[22]*
*Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E, et soit X, Y des parties de E. On appelle **image directe** de X par $\Re$, et on note $\Re(X)$, le sous-ensemble de E : $\Re(X) = \{y \in E \mid \exists x \in X : x\Re y\}$.*
*Cas particulier, si la partie $X = \{a\}$ (singleton) on note $\Re(X)$ par $\Re(a)$. On appelle **image réciproque** de Y par $\Re$, et on note $\Re^{-1}(Y)$, le sous-ensemble de E : $\Re^{-1}(Y) = \{x \in E \mid \exists z \in Y \ : \ x\Re z\}$.*
Cas particulier, si la partie $Y = \{b\}$ (singleton) on note $\Re^{-1}(Y)$ par $\Re^{-1}(b)$.

Exemple 1.1
Soient l'ensemble $E = \{1,2,3\}$ et $\Re = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}$ une relation binaire sur E.
$X_1 = \{1,3\}$, $X_2 = \{3\}, Y_1 = \{1,2\}$ et $Y_2 = \{2\}$ sont des parties de E.

- $\Re(X_1) = \{1,2\} = Y_1$ *et* $\Re(X_2) = \Re(3) = \{2\} = Y_2$.
- $\Re^{-1}(Y_1) = \{1,3\} = X_1$ *et* $\Re^{-1}(Y_2) = \Re^{-1}(2) = \{3\} = X_2$.

Théorème 1.1 *[3]*
Si $\Re$ et Σ sont des relations binaires sur un ensemble E tel que $\Re(a) = \Sigma(a)$ pour tout $a \in E$, alors $\Re = \Sigma$.

Preuve :
Si $a\Re b \Longleftrightarrow b \in \Re(a) \Longleftrightarrow b \in \Sigma(a) \Longleftrightarrow a\Sigma b$.

1.1.2 Propriétés des relations binaires sur un ensemble

Définition 1.4
Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E.

- *$\Re$ est dite **réflexive** si $(a,a) \in \Re$, pour tout $a \in E$.*
- *$\Re$ est dite **irréflexive** si $(a,a) \notin \Re$, pour tout $a \in E$.*
- *$\Re$ est dite **symétrique** si $(a,b) \in \Re \Longleftrightarrow (b,a) \in \Re$, pour tout $a, b \in E$.*
- *$\Re$ est dite **antisymétrique** si $(a,b) \in \Re$ et $(b,a) \in \Re \Longrightarrow a = b$ pour tout $a, b \in E$.*
- *$\Re$ est dite **transitive** si $(a,b) \in \Re$ et $(b,c) \in \Re \Longrightarrow (a,c) \in \Re$ pour tout $a, b, c \in E$.*

Exemple 1.2

1. *Pour n'importe quel ensemble E non vide, $\Delta = \{(a,a)\,|a \in E\}$ la relation **d'égalité** est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.*
2. *Sur $\mathbb{Z}$ la relation $<$ est irréflexive, antisymétrique et transitive.*
3. *Sur $\mathbb{N}^*$ la relation **divise** est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Théorème 1.2 *[3]*
Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- *Si $\forall a \in E : a \in \Re(a)$, alors $\Re$ est **réflexive**.*
- *Si $\forall a,b \in E : a \in \Re(b) \Longleftrightarrow b \in \Re(a)$, alors $\Re$ est **symétrique**.*
- *Si $\forall a,b \in E : a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(a) \Longrightarrow a = b$, alors $\Re$ est **antisymétrique**.*
- *Si $\forall a,b,c \in E : a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(c) \Longrightarrow a \in \Re(c)$, alors $\Re$ est **transitive**.*

1.2 Relations d'ordres

Cette section est une introduction à l'étude des ensembles partiellement ordonnés. Au tout début était l'ordre...ou l'ordre strict ! cette section commence par la définition de ses deux notions et du vocabulaire de base qui leur est associé, qui nous serviront par la suite.

1.2.1 Ensemble partiellement ordonné

Définition 1.5 (Ordre partiel)
*Une relation binaire $\leqslant$ sur un ensemble E est dite relation **d'ordre** (au bien **ordre partiel**) si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**. Dans ce cas le couple $(E, \leqslant)$ est dit **ensemble ordonné** (au bien **ensemble partiellement ordonné**, au tout simplement **poset**).*

Définition 1.6 (Ordre strict)
*Une relation binaire $<$ sur un ensemble E est dite **ordre strict** si elle est **irréflexive** et **transitive**. Dans ce cas le couple $(E, <)$ est dit **ensemble strictement ordonné**.*

Exemple 1.3

1. *La relation de divisibilité ($a\Re b \iff a|b$) est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$, donc le couple $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble partiellement ordonné.*

2. *Pour tout ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné, avec $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.*

Remarque 1.1 *[22]*

- *Si E n'est pas vide, un ordre strict n'est pas donc un ordre.*
- *Un ordre strict $<$ est nécessairement antisymétrique. En effet : si on imagine $((a < b)$ et $(b < a))$, avec $a \neq b$, la transitivité de $<$ entraîne $a < a$, ce qui est contredit l'irréflexivité de $<$.*

Définition 1.7 (La comparabilité) *[19]*
Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné et a, b des éléments de E.
*On dit que a et b sont comparables selon $\leqslant$ **si** $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.*
*On dit que a et b sont incomparables selon $\leqslant$ **si** $a \nleqslant b$ et $b \nleqslant a$.*

Définition 1.8 *[27]*
*Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit **linéairement ordonné** (au bien **totalement ordonné**, au tout simplement **chaîne**) si tous ses éléments sont comparables, et dans ce cas l'ordre $\leqslant$ est dit **linéaire** (au bien **total**).*

Exemple 1.4

1. *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leqslant$, sont des ensembles linéairement ordonnés (totalement ordonnés).*

2. *L'ensemble $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ des diviseurs de 8 muni de la relation divise $|$ est un ensemble linéairement ordonné.*

3. *La relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$, est un ordre généralement partiel, elle n'est un ordre total que si $|E| \leq 1$.*

Remarque 1.2 *[28]*

- *Si $\leqslant$ est un ordre partiel sur un ensemble E, l'ordre strict $<$ associé à $\leqslant$ est défini comme suit :*

$$a < b \Longleftrightarrow (a \leqslant b \ \ et \ \ a \neq b)$$

- *Si $<$ est un ordre strict sur un ensemble E, l'ordre partiel $\leqslant$ associé à $<$ est défini comme suit :*

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow (a < b \ \ ou \ \ a = b)$$

Définition 1.9 (Antichaîne) *[24]*

*Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit **antichaîne**, si tous ses éléments sont deux à deux incomparables.*

Remarque 1.3

- *Les seules ensembles ordonnés qui sont à la fois **chaîne** et **antichaîne** sont les singletons.*
- *Dans une chaîne : $a \nleqslant b$ équivaut à $b < a$.*

Théorème 1.3

Si $(E, \leqslant_E)$, $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés, alors $(E \times F, \leqslant_{E\times F})$ est aussi un ensemble ordonné tel que l'ordre $\leqslant_{E\times F}$ définie comme suit : $(a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 \leqslant_E a_2$ et $b_1 \leqslant_F b_2$.
*Cet ordre $\leqslant_{E\times F}$ est dit Ordre **produit classique**.*

Preuve :

On a : $[a \leqslant_E a \text{ et } b \leqslant_F b], \forall (a, b) \in E \times F \Longrightarrow [(a, b) \leqslant_{E\times F} (a, b)], \forall (a, b) \in E \times F$, donc $\leqslant_{E\times F}$ est **réflexive**.
Si :

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \text{ et } (a_2, b_2) \leqslant_{E\times F} (a_1, b_1) &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_2) \text{ et } (a_2 \leqslant_E a_1 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_1). \\
&\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } a_2 \leqslant_E a_1) \text{ et } (b_1 \leqslant_F b_2 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_1). \\
&\Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{, donc } \leqslant_{E\times F} \text{ est } \textbf{antisymétrique}.
\end{aligned}$$

Si :

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \text{ et } (a_2, b_2) \leqslant_{E\times F} (a_3, b_3) &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_2) \text{ et } (a_2 \leqslant_E a_3 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_3). \\
&\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } a_2 \leqslant_E a_3) \text{ et } (b_1 \leqslant_F b_2 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_3). \\
&\Longrightarrow (a_1 \leqslant_E a_3 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_3) \\
&\Longleftrightarrow (a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_3, b_3) \text{, donc } \leqslant_{E\times F} \text{ est } \textbf{transitive}.
\end{aligned}$$

Finalement $\leqslant_{E\times F}$ est un ordre partiel, donc $(E \times F, \leqslant_{E\times F})$ est un ensemble ordonné.

Définition 1.10 *[19]*

Si $(E, \leqslant_E)$ *et* $(F, \leqslant_F)$ *deux ensembles ordonnés, on peut définir sur* $E \times F$ *un ordre* $\preceq$ *définie comme suit :* $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Longleftrightarrow [a_1 <_E a_2$ *ou* $(a_1 = a_2$ *et* $b_1 <_F b_2)]$.

Cet ordre est dit ***ordre lexicographique*** *au bien* ***ordre de dictionnaire****.*

Remarque 1.4 *[3]*

Si $\leqslant_E$ *et* $\leqslant_F$ *sont des ordres linéaires sur* E *et* F *respectivement, alors*

- *l'ordre lexicographique* $\preceq$ *est aussi linéaire.*
- *Mais l'ordre produit classique* $\leqslant_{E\times F}$ *n'est pas forcement linéaire.*

Définition 1.11 (Ordre réciproque) *[4]*

Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble ordonné, on peut définir sur* E *une nouvelle relation, notée* $x \geqslant y$ *comme étant équivalente à* $y \leqslant x$*, on vérifie immédiatement que c'est aussi une relation d'ordre sur* E.

La relation $x \geqslant y$ *(*x *supérieure à* y*) est dite* ***la relation d'ordre réciproque*** *de* $x \leqslant y$

$(\geqslant = \leqslant^{-1} = \{(x, y) \in E^2 : y \leqslant x\})$*. On notera également :*

- $x \ngeqslant y$ *:* x *non supérieure à* y.
- $x > y$ *:* x *strictement supérieure à* y*, c'est-à-dire* $x \geqslant y$ *et* $x \neq y$.

Définition 1.12 (Ordre induit) *[5]*

Soient $(E, \leqslant)$ *un ensemble ordonné et* B *une partie de* E*, alors la relation* $\leqslant_B = \{(x, y) \in B^2 \mid x \leqslant y\}$ *sera appelée relation d'ordre induite par* $\leqslant$ *sur* B.

1.2.2 Morphismes d'ensembles ordonnés

Définition 1.13 (Morphisme d'ordres) *[21]*

Soient $(E, \leqslant_E)$ *et* $(F, \leqslant_F)$ *des ensembles ordonnes, une application* $f : E \longrightarrow F$ *sera dite* ***morphisme d'ordres*** *ou encoure une* ***application croissante****, si quels que soient* x, y *dans* E *:*

$x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \leqslant_F f(y)$.

On définira également :

Application décroissante : $x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \geqslant_F f(y)$ (c'est un morphisme en munissant F de l'ordre réciproque).

Application strictement croissante : $x <_E y \Longrightarrow f(x) <_F f(y)$.

Application strictement décroissante : $x <_E y \Longrightarrow f(x) >_F f(y)$.

Exemple 1.5

1. *L'application identique d'un ensemble ordonné est un morphisme d'ordre.*
2. *Soit* $f : (D(6), |) \longrightarrow (D(30), |)$ *une application définie comme suit :* $f(a) = a, \forall a \in D(6)$. *L'application* f *est un morphisme d'ordre.*

Remarque 1.5 *[4]*

1. *Une application constante est à la fois croissante et décroissante, mais la réciproque est inexacte, exemple :*
   Soit $E = \{2, 3, 4, 9\}$ *ordonné par divisibilité,* $F = \mathbb{N}$ *avec l'ordre naturel, on définit* f *par* $f(2) = f(4) = 1$ *et* $f(3) = f(9) = 2$, f *est croissante et décroissante mais n'est pas constante.*
2. *Une application croissante et injective est strictement croissante, mais une application strictement croissante n'est pas nécessairement injective, exemple : avec les mêmes ensembles que précédemment,* $f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = 2$, *et* $f(9) = 3$, f *est strictement croissante mais n'est pas injective, puisque* $f(3) = f(4)$ *mais* $3 \neq 4$.
3. *Si* f *est une bijection croissante, l'application réciproque* f^{-1} *n'est pas nécessairement croissante, exemple : l'application identique de* $(\mathbb{N}, |)$ *sur* $(\mathbb{N}, \leqslant)$ *est une bijection croissante, mais l'application réciproque n'est pas croissante, puisque* $2 \leqslant 3$ *mais* 2 *ne divise pas* 3.

Définition 1.14 (Isomorphisme d'ordres) *[7]*

Soient $(E, \leqslant_E)$ *et* $(F, \leqslant_F)$ *des ensembles ordonnés, une application* $f : E \longrightarrow F$ *sera dite un* ***isomorphisme d'ordres*** *si :*

1. $\forall x, y \in E : x \leqslant_E y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant_F f(y)$.
2. f *est bijective.*

Cela signifie donc que f *et* f^{-1} *sont toutes les deux croissantes, par suite étant injectives elles seront strictement croissantes.*

Exemple 1.6

1. *L'application identique d'un ensemble ordonné est un isomorphisme d'ordre.*
2. *Soit* $f : (D(6), |) \longrightarrow (D(30), |)$ *une application définie comme suit :* $f(a) = a, \forall a \in D(6)$. *L'application* f *est un morphisme d'ordre, mais n'est pas surjectif, donc n'est pas un isomorphisme d'ordre.*

Remarque 1.6

Si E est une chaîne, un isomorphisme peut être défini simplement comme une bijection croissante, car si $f(x) \leqslant_F f(y)$: $y \nless x$ (sinon $f(y) <_F f(x)$), donc $x \leqslant y$.

1.2.3 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Soit $(E, \leqslant_E)$ un ensemble ordonné, on peut définir, éventuellement, quatre types d'éléments jouant des rôles intéressants pour la relation d'ordre.

Définition 1.15 (Élément maximal et élément minimal) ***[27]***

- *Un élément k de E est dit **maximal** si pour tout $x \in E$: $k \nless x$ (ce qui signifie : ou bien $x \leqslant k$, ou bien x et k sont incomparables).*
- *Un élément k de E est dit **minimal** si pour tout $x \in E$: $k \ngtr x$ (ce qui signifie : ou bien $k \leqslant x$, ou bien x et k sont incomparables).*

Exemple 1.7

Dans l'ensemble $E = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ ordonné par divisibilité $12, 20$ et 25 sont des éléments maximaux, mais 2 et 5 sont des éléments minimaux.

Théorème 1.4 ***[7]***

Si $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini :

1. *Tout élément a de E est inférieur ou égal à un élément maximal.*
2. *Tout élément a de E est supérieure ou égal à un élément minimal.*

Preuve :

*Si a n'est pas **lui-même maximal**, il existe a_1 tel que : $a < a_1$ si a_1 n'est pas **maximal**, il existe a_2 tel que : $a_1 < a_2$, etc...*

*Comme E est fini, ce processus doit prendre fin en un élément **maximal** supérieur à a (même manière pour le résultat (2)).*

Définition 1.16 (Plus grand élément et plus petit élément) ***[19]***

- *On appelle **plus grand élément** (ou bien maximum) de E, tout élément **g** de E réalisant $\forall x \in E,\ \ x \leqslant g$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement **unique**, car s'il y en avait deux, g_1 et g_2, on aurait $g_1 \leqslant g_2$ et $g_2 \leqslant g_1$, donc $g_1 = g_2$.*

  On note $g = max(E)$.

- *On appelle **plus petit élément** (au bien minimum) de E, tout élément **p** de E réalisant $\forall x \in E,\ \ p \leqslant x$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement **unique**, car s'il y en avait deux, p_1 et p_2, on aurait $p_1 \leqslant p_2$ et $p_2 \leqslant p_1$, donc $p_1 = p_2$.*
  On note $p = min\,(E)$.

Exemple 1.8

1. *Dans l'exemple 1.7, E n'ayant pas ni plus grand élément et ni plus petit élément.*
2. *Dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 6\}$ ordonné par divisibilité, 1 est le **plus petit élément** de E, et 6 est le **plus grand élément** de E.*

Remarque 1.7 *[4]*

- *Si E a un plus grand élément (resp. un plus petit élément) α, α est aussi un élément maximal (resp. un élément minimal) et c'est le seul.*
- *Si E est une chaîne, les notions d'élément maximal et de plus grand élément (resp. d'élément minimal et de plus petit élément) se confondent.*

Définition 1.17 (Majorant et minorant)

Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

- *On dit que $k \in E$ est un **majorant** de A dans E, si $x \leqslant k$ pour tout $x \in A$. L'ensemble de tous les majorants de A se notera $Major\,(A)$, $Major\,(A) = \{z \in E : a \leqslant z, \forall a \in A\}$.*
- *On dit que $k \in E$ est un **minorant** de A dans E, si $k \leqslant x$ pour tout $x \in A$. L'ensemble de tous les minorants de A se notera $Minore\,(A)$, $Minore\,(A) = \{z \in E : z \leqslant a, \forall a \in A\}$.*

Exemple 1.9

Soient $A = \{2, 3, 4, 9\}$ et $(E, \leqslant_E) = (\mathbb{N}^*, |)$, 36 est un majorant de A, 72 est aussi, etc..
$Major\,(A) = \{36z, z \in \mathbb{N}^*\}$, 1 est le seul minorant de A, $Minore\,(A) = \{1\}$.

Remarque 1.8

- *Si β un majorant (resp. un minorant) de A appartient à A c'est alors le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de A.*
- *Une partie A qui possède au moins un majorant (resp. un minorant) dans E est dite majorée (resp. minorée).*

- *Dire que z de E n'est pas un majorant (resp. un minorant) de A signifié qu'il existe x de A avec $x \nleqslant z$ (resp. $z \nleqslant x$), il en résulte que la partie vide $\emptyset$ de E admet tout élément de E comme majorant (resp. comme minorant).*

Définition 1.18 (Borne supérieure et borne inférieur) *[5]*

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

- *On dit que $s \in E$ est une **borne supérieure** de A dans E si s est le plus petit majorant de A.*
  Alors tout simplement : $s = min\,(Major\,(A)) = min\{z \in E : \ a \leqslant z, \ \ \forall a \in A\}$.
  *Notons qu'un tel élément, s'il existe, est **unique**.*
  Si une partie A de E admet une borne supérieure s, celle-ci sera notée : $s = sup_E A$.
- *On dit que $i \in E$ est une **borne inférieure** de A dans E si i est le plus grand minorant de A.*
  Alors tout simplement : $i = max\,(Minore\,(A)) = max\{z \in E : \ z \leqslant a, \ \ \forall a \in A\}$.
  *Notons qu'un tel élément, s'il existe, est **unique**.*
  Si une partie A de E admet une borne inférieure i, celle-ci sera notée : $i = inf_E A$.

Exemple 1.10

Dans l'exemple 1.9, 36 est la borne supérieure de A ($sup_E A = 36$) et 1 est la borne inférieur de A ($inf_E A = 1$).

Remarque 1.9 *[4]*

- *Si $s = sup_E A$ (resp. $s = inf_E A$) existe et $s \in A$, alors s est **le plus grand élément** (resp. **le plus petit élément**) de A pour l'ordre induit, réciproquement, si A a un **plus grand élément** (resp. **un plus petit élément**) pour l'ordre induit, alors c'est aussi sa **borne supérieure** (resp. sa **borne inférieur**).*
- *L'ensemble **des majorants** (resp. **des minorants**) de $\emptyset$ dans E est E, donc dire que $sup_E(\emptyset)$ (resp. $inf_E(\emptyset)$) existe signifie que E possède **un plus petit élément** (resp. **un plus grand élément**).*

Proposition 1.1 *[22]*

Soit A une partie de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$, et soient a, b deux éléments de $\mathbb{R}$, alors on a :

1. $a = Sup_{\mathbb{R}}\,(A) \Longleftrightarrow [(\forall x \in A : x \leqslant a) \ \ et \ \ (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x)]$.
2. $b = Inf_{\mathbb{R}}\,(A) \Longleftrightarrow [(\forall x \in A : b \leqslant x) \ \ et \ \ (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon)]$.

Démonstration :

Supposons que $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$, et soit $\varepsilon > 0$. Puisque a est le plus petit des majorants de A, le réel $a - \varepsilon$ ne peut être majorant de A car : $(a - \varepsilon < a)$, donc il existe $x \in B$ tel que : $a - \varepsilon < x$.

Réciproquement, supposons a soit un majorant de A tel que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x$, alors : $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$.

En effet : supposons que a_0 soit un autre majorant de A.

Si $a_0 < a$, en posant $\varepsilon = a - a_0$, on aurait un réel $x \in A$ tel que : $a - \varepsilon = a_0 < x$, ce qui contredit le fait que a_0 majore A. Donc a est inférieur ou égal à tout majorant de A.

Finalement $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$ (même manière pour le résultat (2)).

Proposition 1.2 *[4]*

Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'ordres, si $A \subseteq E$ possède une borne supérieure s dans E, alors $f(A)$ possède une borne supérieure dans F qui est $f(s)$. Autrement dit : $f(sup_E A) = sup_F f(A)$. Résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration :

- Soit $y \in f(A)$, $y = f(x)$ avec $x \in A$, comme $x \leqslant s$, donc $y = f(x) \leqslant f(s)$, alors $f(s)$ est un majorant de $f(A)$.
- Soit m_0 un majorant de $f(A)$ dans F, il existe $m \in E$ unique tel que $m_0 = f(m)$.
  Pour tout $x \in A$: $f(x) \leqslant f(m) = m_0$, donc $x \leqslant m$, donc m est un majorant de A, donc $s \leqslant m$, d'où $f(s) \leqslant f(m) = m_0$.

Définition 1.19 (Diagramme de Hasse)

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ fini, peut être représenté par un diagramme ou la réflexivité et la transitivité sont implicites. Chaque élément de E est représenté par un point, un segment (arc) joignant deux points x et y représente $x \leqslant y$, on utilise le "haut" et le "bas" pour se passer d'un sens fléché.

***Le diagramme de Hasse** d'un ensemble ordonné fini s'obtient en procédant de proche en proche à partir des éléments maximaux et de leurs prédécesseurs immédiats. Pour dessiner un diagramme de Hasse :*

- *On représente les éléments de E par des points.*
- *Si un élément x est plus grand qu'un autre élément y selon $<$, on place la représentation de x plus haut que celle de y.*

– *Le fait que deux éléments sont en relation est représenté par un segment entre ses deux points.*

– *Pour ne pas changer le schéma, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement sa réduction réflexive transitive : d'une part si $x \leqslant y$, mais qu'il existe z différent de x et de y tel que $x \leqslant z$ et $z \leqslant y$, alors on ne trace pas le segment entre x et y, d'autre part on ne représente pas les boucles d'un élément vers lui-même.*

– *On veille autant que possible à ne pas croiser les segments.*

Exemple 1.11

Le schéma (c) dans la figure **??** *désigne le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné* $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.

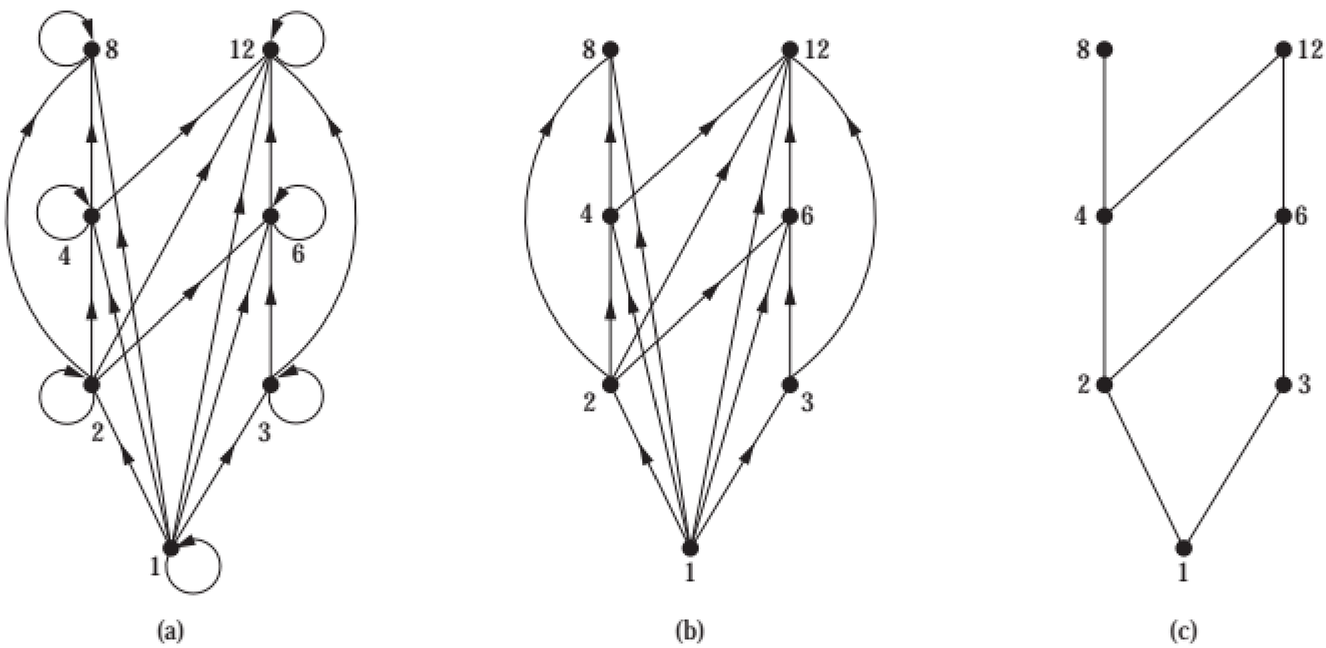

FIGURE 1.1 – Construction du diagramme de Hasse de $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$

Théorème 1.5 *[18]*

Tout ensemble ordonné fini possède un diagramme de Hasse.

Chapitre 2

Généralités sur les treillis distributifs

Les treillis constituent une catégorie très importante d'ensembles ordonnés, car ils font le lien entre l'étude des relations d'ordres et l'étude de certaines structures algébriques. Ils permettent, notamment, d'algébriser les différents calculs logiques, classiques ou non classiques. Ils interviennent également en topologie, en géométrie, en théorie des anneaux.

2.1 Notions sur les treillis

Dans cette section nous allons s'intéresser spécialement au cas d'une classe d'ordre (**Treillis**). Précédemment, on avait donc définit le treillis en général d'une manière ensembliste, sachant, qu'il existe une définition purement algébrique contenant quelques propriétés très importantes qu'on définira et qu'on démontrera par la suite :

2.1.1 Treillis d'ordre

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

Définition 2.1 (sup.demi-treillis) *[23]*
*E est dit **réticulé supérieurement**, ou encore est appelé un **sup.demi-treillis**, si toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de E possède une borne supérieure dans E, on notera : $sup\{x, y\} = x \vee y$, (qui pourra se lire : x ou y).*

Définition 2.2 (inf.demi-treillis) *[23]*
*E est dit **réticulé inférieurement**, ou encore est appelé un **inf.demi-treillis**, si toute paire $\{x, y\}$*

d'éléments de E possède une borne inférieure dans E, on notera : $inf\{x, y\} = x \wedge y$, (qui pourra se lire : x et y).

Définition 2.3 (Treillis) ***[17]***

*E est dit **réticulé**, ou encore est appelé un **treillis**, s'il est à la fois **réticulé supérieurement** et **inférieurement**, c'est-à-dire il est à la fois **sup.demi-treillis** et **inf.demi-treillis**.*

Exemple 2.1

1. *Pour tout ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis avec $A \vee B = A \cup B$ et $A \wedge B = A \cap B$ pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*
2. $(\mathbb{N}^*, |)$ *est un treillis avec $x \vee y = ppcm(x, y)$ et $x \wedge y = pgcd(x, y)$ pour tout $x, y \in N^*$.*
3. *Toute chaîne est un treillis avec $x \vee y = max(x, y)$ et $x \wedge y = min(x, y)$.*

Proposition 2.1 ***[2]***

*Dans un sup.demi-treillis $(E, \leqslant)$ la loi de composition interne $\vee$ est **idempotente** (c'est-à-dire : $x \vee x = x$), **commutative** (c'est-à-dire : $x \vee y = y \vee x$), **associative** (c'est-à-dire : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$).*

Démonstration :

- L'idempotence et la commutativité sont évidentes.
- Pour l'associativité : posons $s = x \vee (y \vee z)$, on a $x \leqslant s$ et $y \vee z \leqslant s$, donc $y \leqslant s$ et $z \leqslant s$, donc aussi $x \vee y \leqslant s$. Ainsi s est un majorant de $\{x \vee y, z\}$.
  Soit M un autre majorant de $\{x \vee y, z\}$, $x \vee y \leqslant M$, donc $x \leqslant M$ et $y \leqslant M$, et aussi $z \leqslant M$, donc $y \vee z \leqslant M$. Ainsi M est un majorant de $\{x, y \vee z\}$, donc $s \leqslant M$, il en résulte : $s = (x \vee y) \vee z$.

Remarque 2.1 ***[4]***

- *Cette proposition est évidemment valable pour un inf.demi-treillis avec la loi de composition interne $\wedge$.*
- *La démonstration précédente montre que $s = x \vee (y \vee z)$ n'est autre que $sup\{x, y, z\}$, on écrira alors simplement $x \vee y \vee z$ au lieu de $x \vee (y \vee z)$.*
- *Par une récurrence simple on en déduit, toute partie finie non vide d'un sup.demi-treillis possède une borne supérieure (remarque analogue pour un inf.demi-treillis).*

2.1.2 Treillis algébrique

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne que nous noterons $\vee$, on peut se demander s'il est possible de définir sur E une relation d'ordre $\leqslant$ qui en fasse un **sup.demi-treillis**, tel que $sup_E\{x, y\} = x \vee y$. L'étude précédente nous indique des conditions nécessaires :

- La loi $\vee$ doit être idempotente, commutative et associative.
- Si $x \leqslant y$, on aura $sup_E\{x, y\} = y$, soit $x \vee y = y$ et réciproquement.

Proposition 2.2 *[4]*
*Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\vee$, qui est **idempotente**, **commutative** et **associative**, alors il existe une unique relation d'ordre $\leqslant$ sur E telle que E soit un **sup.demi-treillis** et quels que soient x et y : $sup_E\{x, y\} = x \vee y$. (proposition analogue pour un **inf.demi-treillis**).*

Démonstration :
Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement définie par : $x \leqslant y$ si et seulement si $x \vee y = y$ (elle sera donc unique). Appelons $\Re$ la relation, $x\Re y$, définie par $x \vee y = y$.

- $\Re$ est réflexive : $x\Re x$ car $x \vee x = x$ (l'idempotence).
- $\Re$ est transitive : supposons $x\Re y$ et $y\Re z$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee z = z$, alors :
  $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$ donc $x\Re z$.
- $\Re$ est antisymétrique : supposons $x\Re y$ et $y\Re x$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee x = x$, d'après la commutativité il en résulte $x = y$.

$\Re$ est donc bien une relation d'ordre, nous la noterons maintenant $x \leqslant y$. $(E, \leqslant)$ est alors un **sup.demi-treillis**.
Soient x et y des éléments de E, $x \leqslant x \vee y$ car $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, de même $y \leqslant x \vee y$, donc $x \vee y$ est un majorant de $\{x, y\}$.
Soit M un autre majorant de $\{x, y\}$: $(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$.
Donc $x \vee y \leqslant M$, on a donc bien : $x \vee y = sup_E \{x, y\}$.

Remarque 2.2 *[4]*
Si $(E, \leqslant)$ est un treillis, il est muni de deux lois de composition internes $\vee$ et $\wedge$, chacune d'elles étant idempotente, commutative et associative.

Théorème 2.1 *[23]*

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, $\vee$ et $\wedge$, telles que : ces lois sont idempotentes, commutatives et associatives, et vérifient les lois d'absorption, c'est-à-dire quels que soit x et y : $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$.

Alors on peut définir sur E une seule relation d'ordre $\leqslant$ telle que $(E, \leqslant)$ soit un treillis, avec $inf_E\{x,y\} = x \wedge y$ et $sup_E\{x,y\} = x \vee y$. Cette relation d'ordre est définie par $x \vee y = y$ ou $x \wedge y = x$ qui sont des relations équivalentes.

Preuve :

D'après ce qui précède il suffit de montre que les deux relations suivantes sont équivalentes :

$x \leqslant_1 y$ définie par $x \vee y = y$

$x \leqslant_2 y$ définie par $x \wedge y = x$

Supposons $x \leqslant_1 y$, donc $x \vee y = y$ d'où $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ (loi d'absorption), donc $x \leqslant_2 y$.

Supposons $x \leqslant_2 y$, donc $x \wedge y = x$ d'où $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ (loi d'absorption), donc $x \leqslant_1 y$.

Proposition 2.3 *[3]*

Dans un treillis $(E, \leqslant)$:

- *Si $a \leqslant b$, alors pour tout $x \in E$: $a \wedge x \leqslant b \wedge x$ et $a \vee x \leqslant b \vee x$.*
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors : $a \wedge c \leqslant b \wedge d$ et $a \vee c \leqslant b \vee d$.*

Démonstration :

- Si $a \leqslant b$, donc $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$, alors :

  $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x$ donc $a \wedge x \leqslant b \wedge x$.

  $(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x$ donc $a \vee x \leqslant b \vee x$.

- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$:

  $a \wedge c \leqslant b \wedge c$ et $b \wedge c \leqslant b \wedge d$ donc $a \wedge c \leqslant b \wedge d$.

  $a \vee c \leqslant b \vee c$ et $b \vee c \leqslant b \vee d$ donc $a \vee c \leqslant b \vee d$.

2.1.3 Sous-treillis et morphismes

Définition 2.4 (sous-sup.demi-treillis) *[17]*

*Une partie A non vide d'un sup.demi-treillis E, est dite **sous-sup.demi-treillis** si on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

- *$sup_A\{x, y\}$ existe et égale à $x \vee y$, quels que soient x, y dans A.*
- *$x \vee y \in A$ quels que soient x, y dans A.*

*A est alors un **sup.demi-treillis** pour la structure induite (définition analogue pour un **sous-inf.demi-treillis**).*

Remarque 2.3 *[4]*

1. *Il est important que l'une ou l'autre ces conditions sont réalisée quels que soient x et y dans A.*
2. *Il est possible que A ne soit pas un sous-sup.demi-treillis de E, mais qu'il soit quand même un sup.demi-treillis pour la structure induite.*

Exemple 2.2
Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, $A = \{1, 3, 4, 24\}$ n'est pas un sous-sup.demi-treillis car $3 \vee 4 = 12 \notin A$. Mais A est quand même un sup.demi-treillis, car toutes les paires ont une borne supérieure dans A, en particulier $sup_A\{3, 4\} = 24$.

Définition 2.5 (Sous-treillis) *[24]*
*Une partie A non vide d'un treillis $(E, \leqslant)$ est dite un **sous-treillis** si elle est à la fois un **sous-sup.demi-treillis** et un **sous-inf.demi-treillis**, ceci équivaut à dire quels que soient x et y éléments de A : $x \vee y \in A$ et $x \wedge y \in A$.*
A est alors un treillis pour la structure induite, avec : $sup_A\{x, y\} = x \vee y$ et $inf_A\{x, y\} = x \wedge y$.

Exemple 2.3

1. *Nous considérons ici le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ et soit n un entier positive non nul fixé, nous désignons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positives de n, on a alors $D(n)$ est un sous-treillis de $\mathbb{N}^*$. En effet : si $x|n$ et $y|n$, alors $pgcd(x, y)|n$ et $ppcm(x, y)|n$, donc $x \vee y = ppcm(x, y) \in D(n)$ et $x \wedge y = pgcd(x, y) \in D(n)$ (voir **la figure 2.1**).*
2. *Soit E un espace topologique quelconque, on considère le treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, alors :*
   - *L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de E est un sous-treillis de $\mathcal{P}(E)$.*
   - *L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E est un sous-treillis de $\mathcal{P}(E)$.*

Considérons par exemple deux treillis E_1 et E_2, en tant qu'ensembles ordonnés on pourra parler de morphisme d'ordre, c'est-à-dire tout application croissante f de E_1 dans E_2, en

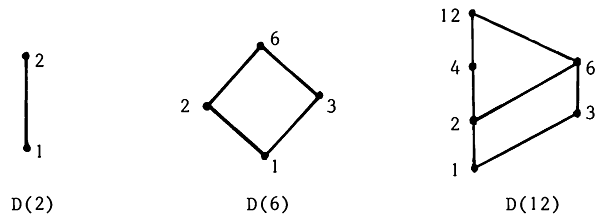

FIGURE 2.1

général une telle application ne conserve pas les bornes supérieures, par exemple : Pour $E_1 = (\mathbb{N}^*, |)$ et $E_2 = (\mathbb{N}^*, \leqslant)$, prenons f l'identité de $\mathbb{N}^*$, elle est croissante : si $x|y \Longrightarrow x \leqslant y$. Mais elle ne conserve pas les bornes supérieures, par exemple :
Dans E_1, $2 \vee 3 = 6$, mais dans E_2, $2 \vee 3 = 3$.

Définition 2.6 *[17]*
Un morphisme de sup.demi-treillis, ou encore un $\vee$-morphisme, est toute application f de E_1 dans E_2 vérifiant quels que soient les éléments x et y de E : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
On définira de façon analogue un morphisme d'inf.demi-treillis, ou encore un $\wedge$-morphisme par : $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Proposition 2.4 *[4]*
Un $\vee$-morphisme (resp. un $\wedge$-morphisme) est une application croissante.

Démonstration :
Pour un $\vee$-morphisme si $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \vee y = y \Longrightarrow f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(y) \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$. La notion de morphisme de demi-treillis est donc plus précise que celle de morphismes d'ordres.

Définition 2.7 ($\vee$-isomorphisme) *[4]*
On définira un $\vee$-isomorphisme (resp. un $\wedge$-isomorphisme) comme étant un morphisme bijectif de sup.demi-treillis (resp. comme un morphisme bijectif d'inf.demi-treillis).

Proposition 2.5 *[4]*
La notion d'isomorphisme d'ordre est la même que celle de $\vee$-isomorphisme (de $\wedge$-isomorphisme).

Démonstration :

- Soit f un $\vee$-isomorphisme de E_1 sur E_2, nous savons déjà que f est bijective et croissante, de plus : si $f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y) \Longrightarrow x \vee y = y \quad$ (car f est injective) $\Longrightarrow x \leqslant y$. Finalement f est bien un isomorphisme d'ordre.
- Soient f un isomorphisme d'ordre de E_1 sur E_2, et x, y deux éléments de E_1.

  On va montrer que : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(x)$, c'est-à-dire : f est un $\vee$-morphisme.

  On a : $\begin{cases} x \leqslant x \vee y \\ y \leqslant x \vee y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(x \vee y) \\ f(y) \leqslant f(x \vee y) \end{cases}$ (car f est croissante)

  Donc $f(x \vee y)$ est un majorant de $\{f(x), f(y)\}$.

  Soit M d'autre majorant de $\{f(x), f(y)\}$, et comme f surjective, alors $M = f(t)$ avec $t \in E_1$

  Donc $\begin{cases} f(x) \leqslant M \\ f(y) \leqslant M \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(t) \\ f(y) \leqslant f(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant t \\ y \leqslant t \end{cases}$ (car f un isomorphisme d'ordre) $\Longrightarrow$ $x \vee y \leqslant t$

  Donc on a : $x \vee y \leqslant t \Longrightarrow f(x \vee y) \leqslant f(t) = M$ (car f est croissante), alors $f(x \vee y)$ est le plus petit des majorant de $\{f(x), f(y)\}$, c'est-à-dire :$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

  Finalement f est un $\vee$-morphisme + bijective, donc f est un $\vee$-isomorphisme.

Remarque 2.4

Les notions de $\vee$-morphisme et de $\wedge$-morphisme ne sont pas en général équivalentes. Par exemple :
Soient E un espace topologique et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de E, considérons l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}$ (ordonnés par inclusion) définie par : $f(X) = \overline{X}$ ($\overline{X}$ est l'adhérence de X).
On a : $f(X \cup Y) = \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} = f(X) \cup f(Y)$, donc f est un $\vee$-morphisme. Mais en général : $f(X \cap Y) = \overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y} = f(X) \cap f(Y)$ donc f n'est pas forcement $\wedge$-morphisme.

Définition 2.8 (Morphisme de treillis) *[17]*

*On appelle **morphisme de treillis** toute application qui est à la fois un $\vee$-morphisme et un $\wedge$-morphisme. D'après l'étude précédant, un morphisme de treillis est a fortiori une application croissante.*

Définition 2.9 (Isomorphisme de treillis) *[17]*

On définira évidemment un isomorphisme de treillis comme étant un morphisme de treillis bijective.

Proposition 2.6 *[4]*
Si f est une application d'un treillis E_1 dans un treillis E_2 les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un isomorphisme de treillis.*
2. *f est un isomorphisme d'ordre.*
3. *f est un $\vee$-isomorphisme.*
4. *f est un $\wedge$-isomorphisme.*

Remarque 2.5 *[4]*
En pratique, il n'y a donc que vérifications à faire pour montrer que f est un isomorphisme de treillis : f est bijective et quels que soient x et y, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ ou bien $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

2.1.4 Filtres et idéaux dans un treillis

Dans ce paragraphe nous supposerons pour simplifier (bien que ce ne soit pas nécessaire pour les définitions) que tous les demi-treillis ou treillis considérés ont à la fois un plus petit élément (qui sera noté 0) et un plus grand élément (qui sera noté 1). On va étudier les filtres sur un inf.demi-treillis, soit $(E, \leqslant)$ un inf.demi-treillis.

Définition 2.10 (Filtre) *[2]*
On appelle filtre de E toute partie non vide F de E vérifiant :

1. *Si $x \in F$ et $x \leqslant y$, alors $y \in F$;*
2. *Si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.*

Remarque 2.6 *[4]*

- *La condition $2)$ montre qu'un filtre est un sous-inf.demi-treillis (mais la réciproque est in exacte).*
- *E est un filtre de E, il sera dit le filtre **impropre**, tout filtre F différent de E sera dit un filtre **propre**.*
- *Si $Card\,(E) \geq 2$, il y a au moins un filtre propre, par exemple $\{1\}$.*
- *D'après la condition $1)$ l'élément 1 appartient à tous les filtres.*

- *D'après la condition* 1) *un filtre F est propre si et seulement si $0 \notin F$.*
- *l'intersection d'une famille quelconque $(F_i)_I$ de filtres est encore un filtre.*
- *Soit α un élément fixé de E définissons l'ensemble $F_\alpha = \{x \in E : x \geqslant \alpha\}$, F_α est un filtre de E, dit le filtre engendré par α.*
- *$F_\alpha = E \vee \alpha = \{x \vee \alpha : x \in E\}$, en effet :*
  Si $x \in F_\alpha$, alors $x \geqslant \alpha$, donc $x = x \vee \alpha$, donc $x \in E \vee \alpha$.
  Si $y \in E \vee \alpha$, alors $y = x \vee \alpha$ avec $x \in E$, donc $y \geqslant \alpha$, donc $y \in F_\alpha$.

Définition 2.11 (Filtre principal) *[28]*
Un filtre F de E est dit principal, s'il existe un élément α de E tel que $F = F_\alpha$.

Définition 2.12 (Filtre engendré par une partie) *[28]*
Soit G une partie quelconque de E, le filtre engendré par G est l'intersection de tous les filtres contenant G, c'est-à-dire le plus petit filtre (au sens de l'inclusion) contenant G, il sera noté F_G et G sera dit un générateur de F_G. On peut caractériser F_G par :
$F_G = \{x \in E \mid \exists a_1, ..., a_n \in G, n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant a_1 \wedge ... \wedge a_n\}$.

Proposition 2.7 *[4]*
Tout filtre possédant un générateur fini est principal.
En particulier dans un inf.demi-treillis fini, tous les filtres sont principaux.

Démonstration :
Considérons F_G où G est un ensemble fini.
Si $G = \emptyset$, alors $F_G = \{1\} = F_1$.
Si $G = \{a_1, ..., a_q\}$ posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_q$, alors $F_G = F_a$ car :

- Si $x \in F_G$, $x \geqslant a_{i_1} \wedge ... \wedge a_{i_n} \geqslant a$, donc $x \in F_a$ ($F_G \subseteq F_a$)...........(1)
- Si $x \in F_a$, $x \geqslant a$, donc $x \in F_G$ ($F_a \subseteq F_G$)...........(2)
  Finalement de (1) et (2) on a légalité $F_G = F_a$.

Définition 2.13 *[4]*

- *Une partie G de E est dite $\wedge$-incompatible, si le filtre F_G est **impropre**, c'est-à-dire il existe un nombre fini d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$ tels que : $a_1 \wedge ... \wedge a_n = 0$.*

- *Une partie G de E qui engendre un filtre **propre** sera dite $\wedge$-compatible.*

Définition 2.14 (Ultrafiltre) *[16]*
*Un filtre propre F d'un inf.demi-treillis E est dit **maximal** (ou bien **ultrafiltre**) si pour tout filtre X de E, $F \subseteq X \subseteq E \Longrightarrow X = F$ ou $X = E$.*

Proposition 2.8 *[4]*
Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *F est un ultrafiltre.*
2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.*

Démonstration :

- Si F est un ultrafiltre, supposons qu'il existe $x \notin F$ tel que pour tout $y \in F$, $x \wedge y \neq 0$. Posons $G = F \cup \{x\}$, G est une partie $\wedge$-compatible, en effet : soient $a_1, ..., a_n$ des éléments de G et posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_n$.
  - Si tous les a_i appartiennent à F, alors $a \in F$ donc $a \neq 0$ (car F propre).
  - Si par exemple $a_1 = x$, donc $a = x \wedge y$ avec $y = a_2 \wedge ... \wedge \; a_n$, $y \in F$ donc $a \neq 0$.

  Par suite G engendre un filtre propre F_G, or $F \subsetneq G \subseteq F_G$ ce qui contredit la maximalité de F.
- Si on a l'assertion $2)$: Supposons qu'il existe un filtre propre F' tel que $F \subsetneq F'$, soit alors $x \in F'$ et $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$, or x et y appartiennent à F' on aurait donc $0 \in F'$ ce qui contredit le fait que F' soit propre.

Définition 2.15 (Idéal) *[2]*
La notion d'idéal est la même que celle de filtre mais en considérant l'ordre réciproque. On appelle idéal d'un sup.demi-treillis E toute partie non vide I de E vérifiant :

1. *Si $x \in I$ et $y \leqslant x$: alors $y \in I$;*
2. *Si $x \in I$ et $y \in I$: alors $x \vee y \in I$.*

Définition 2.16 *[28]*
*Un idéal propre I (c'est-à-dire $1 \notin I$) d'un sup.demi-treillis E est dit **maximal** si pour tout idéal Y de E, $I \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow Y = I$ ou $Y = E$.*

Remarque 2.7 *[4]*

Tout ce qui a été dit pour les filtres peut être transcrit immédiatement pour les idéaux, nous indiquons brièvement :

- *Un idéal est un sous-sup.demi-treillis.*
- *Un idéal I est dit propre si $I \neq E$, cela équivaut à : $1 \notin I$.*
- 0 *appartient à tous les idéaux de E, donc $\{0\}$ est le plus petit idéal de E.*
- *Si $a \in E$, $I_a = \{x \in E : x \leqslant a\}$ est un idéal, appelé l'idéal principal engendré par a.*
- *Si $G \subseteq E$, l'intersection I_G de tous les idéaux contenant G est un idéal appelé l'idéal engendré par G, c'est le plus petit idéal contenant G. Il peut également être défini comme l'ensemble des éléments x tels que : il existe un nombre fini d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$, tels que $x \leqslant a_1 \vee ... \vee a_n$.*
- *Une partie G de E est dite $\vee$-incompatible si elle engendre l'idéal impropre E, cela équivaut à dire : il existe un nombre fini d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$, tels que $a_1 \vee ... \vee a_n = 1$. Une partie qui n'est pas $\vee$-incompatible est dite $\vee$-compatible.*
- *On peut caractériser les idéaux maximaux par :*
  1. *I est un idéal maximal.*
  2. *Pour tout $x \notin I$, il existe $y \in I$ tel que $x \vee y = 1$.*

Dans un treillis nous aurons à la fois les notions de filtre et d'idéal, donc tout filtre (resp. tout idéal) est un sous-treillis. En effet, soit F un filtre, nous savons déjà que c'est un sous-inf.demi-treillis, mais c'est aussi un sous-sup.demi-treillis : si $x \in F$ et $y \in F$, $x \vee y \geqslant x$ donc $x \vee y \in F$.

Exemple 2.4

1. *Soit E un ensemble infini, l'ensemble des parties cofinies de E est un filtre de $\mathcal{P}(E)$ (nous appellerons partie cofinie de E toute partie dont le complémentaire est fini). L'ensemble des parties finies de E est un idéal de $\mathcal{P}(E)$.*
2. *Dans le treillis $D(60)$ tous les filtres et les idéaux sont principaux, sur **la figure 2.2** nous avons représenté le filtre principal $F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$ (en pointillés), et l'idéal principal $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ (en tirets).*

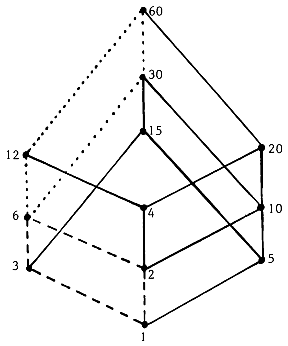

FIGURE 2.2 – Treillis $(D(60), |)$

2.2 Propriétés algébriques de quelques classes de treillis

Dans cette section nous allons étudier les classes de treillis distributifs, complémentés, modulaires, résiduels et booléens. Ce choix n'est pas arbitraire, mais bien réfléchi, car celles-ci sont les plus importantes, les plus intéressantes et les plus particulières dans le monde des treillis.

2.2.1 Treillis distributifs

Considérons un treillis quelconque $(E, \leqslant)$, il est muni des deux lois de composition internes $\wedge$ et $\vee$, on peut se demander si chacune de ces lois est distributive par rapport à l'autre, les conditions pour que ceci soit réalisé sont :
D.1) Quels que soient x, y, z : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
D.2) Quels que soient x, y, z : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Remarque 2.8 *[2]*
Les conditions D.1) et D.2) sont équivalentes. En effet : supposons D.1) soit vérifiée, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\ &= x \vee [z \wedge (x \vee y)] \quad \textit{(lois d'absorption)} \\ &= x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= x \vee (y \wedge z) \qquad \textit{(lois d'absorption)}\end{aligned}$$

Donc D.2) est aussi vérifiée. La réciproque se démontre de façon analogue.

Remarque 2.9 *[28]*

Dans tout treillis les deux conditions suivantes sont toujours vérifiées :

$D'.1)$ *Quels que soient* x, y, z *:* $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$D'.2)$ *Quels que soient* x, y, z *:* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

En effet :

$x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y)$ *et* $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge z)$, *donc* $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y)$ *et* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee z)$, *donc* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Il en résulte que les conditions D.$1)$ et D.$2)$ sont équivalentes à :

$D''.1)$ Quels que soient $x, y, z : x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$D''.2)$ Quels que soient $x, y, z : x \vee (y \wedge z) \geqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Finalement, en combinant les deux remarques précédentes les Quatre conditions $D.1, D.2, D''.1, D''.2$ sont équivalentes.

Définition 2.17 (Treillis distributif) *[4]*

Un treillis E est dit distributif si chacune des lois $\wedge$ et $\vee$ est distributive par rapport à l'autre, cela équivaut à dire que E vérifie l'une quelconque des quatre condition $D.1, D.2, D''.1, D''.2$

Exemple 2.5

1. *Pour tout ensemble E, le treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est distributif car on sait que chaque des lois $\cap$ et $\cup$ est distributive par rapport à l'autre.*
2. *Exemples de treillis non distributifs (voir **la figure 2.3**) :*

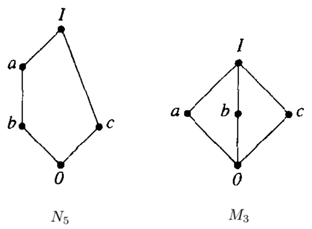

FIGURE 2.3

N_5 (un pentagone) n'est pas distributif car : $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$, mais $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$.

M_3 (un diamant) n'est pas distributif car : $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$, mais $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$.

Théorème 2.2 *[3]*

Un treillis E est non distributif si et seulement si il est contient un sous-treillis isomorphe à M_3 ou à N_5.

Proposition 2.9

Toute chaîne est un treillis distributif, avec $x \wedge y = min\,(x, y)$ et $x \vee y = max\,(x, y)$.

Démonstration :

Soient $(E, \leqslant)$ une chaîne et x, y, z sont des éléments de E, comme tous les éléments sont comparables on a : $x \wedge (y \vee z) = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant y \vee z\,; \\ y \vee z & si \quad y \vee z \leqslant x. \end{cases}$

1. Si $x \wedge (y \vee z) = x$: $x \wedge (y \vee z) = x \Longrightarrow x \leqslant y \vee z \Longrightarrow x \leqslant y$ ou $x \leqslant z$ (car E est une chaîne).
   - Si $x \leqslant y$: $x \leqslant y \Longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$.
   - Si $x \leqslant z$: $x \leqslant z \Longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge z) \vee x = x$.
2. Si $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z)$: $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z) \Longrightarrow (y \vee z) \leqslant x \Longrightarrow y \leqslant x$ et $z \leqslant x$.
   Donc $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee z$.

Proposition 2.10 *[4]*

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de l'ordre de divisibilité est un treillis distributif.

Démonstration :

Si $x \in \mathbb{N}^*$ et si P est un nombre premier on désignera par $V_p(x)$ l'exposant de P dans la décomposition de x en facteurs premiers : $x = \prod P^{V_p(x)}$, ce produit étant étendu à tous les nombres premiers, mais bien entendu il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls.
On sait que :

$$pgcd(x, y) = \prod P^{\,min(V_p(x), V_p(y))} \text{ et } ppcm(x, y) = \prod P^{\,max(V_p(x), V_p(y))}$$

Dans la chaîne naturelle $(\mathbb{N}, \leqslant)$ pour tout P :

$$min(V_p(x), max(V_p(y), V_p(z))) = max(min(V_p(x), V_p(y)), min(V_p(x), V_p(z))).$$

On a :

$$\begin{aligned} pgcd(x, ppcm(y,z)) &= \prod P^{\,min(V_p(x),V_p(ppcm(y,z)))} \\ &= \prod P^{\,min(V_p(x),V_p(\prod P^{\,max(V_p(y),V_p(z))}))} \\ &= \prod P^{\,min(V_p(x),max(V_p(y),V_p(z)))} \\ &= \prod P^{\,max(min(V_p(x),V_p(y)),min(V_p(x),V_p(z)))} \\ &= \prod P^{\,max(V_p(\prod P^{\,min(V_p(x),V_p(y))}),V_p(\prod P^{\,min(V_p(x),V_p(z))})} \\ &= \prod P^{\,max(V_p(pgcd(x,y)),V_p(pgcd(x,z)))} \\ &= ppcm(\ pgcd(x,y), pgcd(x,z)). \end{aligned}$$

Ce qui montre que le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ est distributif.

2.2.2 Treillis modulaires

Nous allons introduire une notion de treillis vérifiant une propriété plus faible que celle de la distributivité.

Définition 2.18 *[22]*
*Un treillis E est dit **modulaire** si $x \leqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, pour tout x, y, z dans E.*

Exemple 2.6

1. *Tout treillis distributif est modulaire. En effet, on a : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, comme $x \leqslant z$ donc $x \vee z = z$ et $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Mais la réciproque en général inexacte, par exemple : Le treillis $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ n'est pas distributif, mais modulaire.*
2. *Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est aussi modulaire.*
3. *Il existe des treillis non modulaires, par exemple, soit $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ ordonné par divisibilité. $2 \leqslant 4$, mais $2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2$ et $(2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4$ (voir **la figure suivante**).*

Théorème 2.3 (Caractérisation des treillis modulaires) *[22]*
*Pour qu'un treillis E soit modulaire **il faut et il suffit** qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :* $\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Longrightarrow$ *x et y sont égaux ou incomparables.*

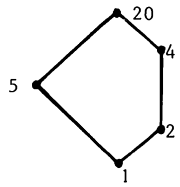

FIGURE 2.4

Théorème 2.4 *[28]*

Un treillis E est modulaire ***ssi*** *il ne contient pas un sous treillis isomorphe à N_5.*

Théorème 2.5 (Caractérisation des treillis distributifs) *[22]*

Pour qu'un treillis E soit distributif ***il faut et il suffit*** *qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :* $\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Longrightarrow x = y.$

2.2.3 Treillis complémentés

Considérons un treillis quelconque E et soit $[a, b]$ un intervalle de E ($[a, b] = \{x \in E \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$).

Définition 2.19 (Complémentation relative) *[28]*

Si $x \in [a, b]$ on appelle complément de x relativement à $[a, b]$ tout élément y (s'il existe) vérifiant : $x \wedge y = a$ *et* $x \vee y = b$.

Remarque 2.10 *[4]*

- *Si y est un complément de x relativement à $[a, b]$ on a aussi $y \in [a, b]$, car $y \geqslant x \wedge y = a$ et $y \leqslant x \vee y = b$, x est alors un complément de y relativement à $[a, b]$.*
- *b est le complément, unique, de a relativement à $[a, b]$.*
- *Un élément x n'a pas nécessairement de complément relatif, il peut également en avoir plusieurs, par exemple, soit le treillis $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ ordonné par divisibilité. Dans l'intervalle $[1, 4]$, 2 n'a pas de complément relatif. Dans l'intervalle $[1, 20]$, 5 a deux compléments relatifs sont 2 et 4 (voir* ***la figure 2.5****).*

Proposition 2.11 *[4]*

Soient $(E, \leqslant)$ un treillis et $[a, b]$ un intervalle de E et ***x*** *un élément de $[a, b]$:*

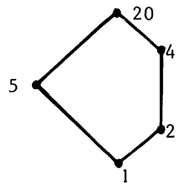

FIGURE 2.5

- *Si E est modulaire : les compléments relatifs, éventuels, de **x** sont incomparables entre eux.*
- *Si E est distributif : **x** a au plus un complément relatif.*

Démonstration :

Si y_1 et y_2 sont deux compléments relatifs de x on a : $x \wedge y_1 = a = x \wedge y_2$ et $x \vee y_1 = b = x \vee y_2$ ce qui dans le cas modulaire implique $y_1 = y_2$, ou y_1 et y_2 sont incomparables. Dans le cas distributif implique $y_1 = y_2$.

Définition 2.20 (Treillis relativement complémenté) *[4]*

*Un treillis est dit **relativement complimenté** si dans tout intervalle $[a, b]$, tout élément **x** possède au moins un complément relatif.*

Définition 2.21 (Treillis fermé)

Un treillis E est dit fermé (au borné) si il possède un plus petit élément (que l'on notera 0) et un plus grand élément (que l'on notera 1).

Exemple 2.7

1. *Tout treillis fini est fermé.*
2. *Le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ n'est pas fermé.*

Définition 2.22 *[28]*

Soit E un treillis fermé et a, b des éléments de E.

*On dit que b est **le complément** de a (au bien a et b sont **complémentés**) si $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$.*

Définition 2.23 (Treillis complémenté)

*Dans un treillis fermé E si tout élément a un complément, E est dit **complémenté**.*

Remarque 2.11 *[4]*

- *En général, l'existence aussi bien que l'unicité du complément ne soit pas assurées, exemples :*
  Dans une chaîne, un élément différent de 0 *et de* 1 *n'a jamais de complément.*
  Dans le treillis $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ *ordonné par divisibilité,* 5 *a pour compléments* 2 *et* 4*,* 2 *et* 4 *ont un seul complément* 5*,* 1 *et* 20 *sont compléments l'un de l'autre.*
- *D'une façon générale,* 0 *et* 1 *sont toujours compléments l'un de l'autre.*
- *Tout treillis relativement complémenté et ayant un plus petit élément et un plus grand élément est complémenté.*
- *Un treillis complémenté n'est pas nécessairement relativement complémenté, les exemples suivants sont des treillis ordonnés par divisibilité (voir* ***la figure 2.6****).*

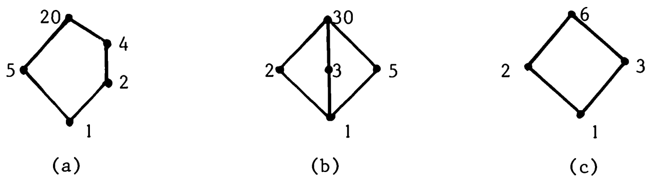

FIGURE 2.6

(a) Ce treillis est complémenté (sans unicité de complément), mais n'est pas relativement complémenté. Puisque dans l'intervalle $[2, 20]$*,* 4 *ne possède pas un complément relatif.*
(b) Ce treillis est à la fois complémenté et relativement complémenté (sans unicité des compléments).
(c) Ce treillis est à la fois complémenté et relativement complémenté (avec unicité des compléments)

- *Tout treillis* $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ *est complémenté, si* $X \subseteq E$ *son complément (unique) n'est autre que le complément de* X *:* $\complement X$ *.*

Proposition 2.12 ***[3]***
Dans un treillis distributif, tout élément a au plus un complément (résulte immédiatement de la ***proposition 2.11*** *sur les compléments relatifs).*

Proposition 2.13 ***[4]***
Si un treillis complémenté et modulaire (et a fortiori s'il est distributif), alors il est relativement complémenté.

Démonstration :

Soient $[a, b]$ un intervalle de E et $x \in [a, b]$, soit $x^{'}$ un complément de x.

Posons $y = (a \vee x^{'}) \wedge b$, alors :

$$y \wedge x = (a \vee x^{'}) \wedge b \wedge x = (a \vee x^{'}) \wedge x \ \ (\text{ car } x \leqslant b\ )$$
$$= a \vee (x^{'} \wedge x) \ \ (\text{ car } a \leqslant x \text{ et le treillis est supposé modulaire})$$
$$= a \vee 0 = a$$

$$y \vee x = x \vee ((a \vee x^{'}) \wedge b) = (x \vee a \vee x^{'}) \wedge b \ \ (\text{ car } x \leqslant b \text{ et le treillis est supposé modulaire})$$
$$= 1 \wedge b = b$$

Donc y est un complément de x relativement à $[a, b]$.

Considérons un treillis E (La définition est d'ailleurs valable pour un inf.demi-treillis) ayant un plus petit élément 0.

Définition 2.24 (Treillis $\wedge$-complémenté) ***[4]***

*On appelle $\wedge$-**complément** d'un élément x le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble $\{y \in E : x \wedge y = 0\}$. Un treillis est dit $\wedge$-**complémenté** si tous ses éléments possèdent un $\wedge$-complément (nécessairement unique).*

Exemple 2.8

Soit $\mathcal{O}$ le treillis des ouverts (ordonné par inclusion) d'un espace topologique quelconque. Ce treillis n'est pas, en général, complémenté, mais est $\wedge$-complémenté : si X un ouvert, il existe un plus grand ouvert disjoint avec X qui est $\complement\overline{X}$ (avec $\overline{X}$ est l'adhérence de X).

Remarque 2.12 ***[4]***

- *On pourrait, de façon analogue, définir un treillis $\vee$-**complémenté**.*
- *Un treillis complémenté n'est pas nécessairement $\wedge$-**complémenté**.*

Exemple 2.9 ***[4]***

*Le treillis $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ est complémenté, mais n'est pas $\wedge$-**complémenté**, par exemple $\{y \in E : y \wedge 2 = 1\} = \{1, 3, 5\}$ n'a pas de plus grand élément (voir **la figure 2.7**).*

Proposition 2.14 ***[4]***

Tout treillis distributif et complémenté est $\wedge$-complémenté.

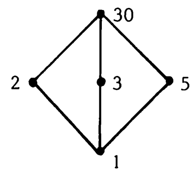

FIGURE 2.7

Démonstration :

Soit E un treillis distributif et complémenté, soient $x \in E$ et soit $x^{'}$ son complément (unique), on a $x \wedge x^{'} = 0$. Supposons $x \wedge y = 0$, alors :

$(y \wedge x^{'}) \wedge x = y \wedge (x^{'} \wedge x) = y \wedge 0 = 0 = y \wedge x.$

$(y \wedge x^{'}) \vee x = (y \vee x) \wedge (x^{'} \vee x) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x.$

D'après la caractérisation des treillis distributifs on en déduit : $y \wedge x^{'} = y$, donc $y \leqslant x^{'}$.Ainsi $x^{'}$ est le plus grand élément de $\{y : x \wedge y = 0\}$ c'est donc aussi le $\wedge$-complément de x.

2.2.4 Treillis résiduels

Définition 2.25 *[25]*

*Un **treillis résiduel** est une structure algébrique* $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ *de type* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

(RL1) $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est un treillis fermé.*

(RL2) $(L, *, 1)$ *est un monoïde commutative.*

(RL3) Les deux opérations $(*, \rightarrow)$ *sont adjointes, c'est-à-dire :* $x * y \leqslant z \Longleftrightarrow x \leqslant y \rightarrow z$ *, pour tout* $x, y, z \in L$.

Proposition 2.15

Soit $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ *un treillis résiduel, pour tout* $x, y \in L$ *:*

$x \rightarrow y = max\{z \in L : x * z \leqslant y\}.$

Démonstration :

Soit $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résiduel, donc les trois conditions (RL1),(RL2) et (RL3) sont vérifier.

On a : $x \rightarrow y \leqslant x \rightarrow y \Longleftrightarrow x * (x \rightarrow y) \leqslant y$ (de RL3), donc $x \rightarrow y \in \{z \in L : x * z \leqslant y\}$.

Soit $m \in \{z \in L : x * z \leqslant y\}$, donc $x * m \leqslant y \Longleftrightarrow m \leqslant x \to y$ (de RL3).

Finalement $x \to y = max\{z \in L : x * z \leqslant y\}$.

Exemple 2.10 *[26]*

1. *Si $I = [0,1]$, pour $x, y \in I$ on définit $x * y = min\{x, y\}$ et* $x \to y = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leqslant y\,; \\ y & sinon. \end{cases}$

   Alors $(I, max, min, *, \to, 0, 1)$ est un treillis résiduel.

2. *Si $I = [0,1]$, pour $x, y \in I$ on définit $x * y = x \cdot y$ par la multiplication usuel des réels et* $x \to y = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leqslant y\,; \\ \frac{y}{x} & sinon. \end{cases}$

   Alors $(I, max, min, *, \to, 0, 1)$ est un treillis résiduel.

Remarque 2.13 *[8]*

Dans un treillis résiduel $(L, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1)$, on a pour tout $x, y, z \in L$:

(R1) : $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \to y = 1$.

(R2) : $1 \to x = x$, $x \to 1 = 1$, $x \to x = 1$, $0 \to x = 1$, $x \to (y \to x) = 1$.

(R3) : $x \to (y \to z) = (x * y) \to z = y \to (x \to z)$.

Proposition 2.16

Un treillis $(L, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1)$ est dit treillis résiduel ***si et seulement si*** *il vérifie les trois conditions suivantes :*

1. $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est un treillis fermé.*
2. $(L, \to, 1)$ *vérifie :* $x = 1 \to x$ *et* $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.
3. *Les deux opérations $(*, \to)$ sont adjointes, c'est-à-dire :* $x * y \leqslant z \Longleftrightarrow x \leqslant y \to z$, *pour tout* $x, y, z \in L$.

Démonstration :

$(\Rightarrow)$ Les propriétés $1), 2)$ et $3)$ sont valables pour tout treillis résiduel.

$(\Leftarrow)$ Il suffit de monter que $(L, \wedge, 1)$ est un monoïde commutative.

Soient x, y, z, t des éléments de L, on a :

- $x * 1 \leqslant t$ ssi $x \leqslant 1 \to t$ ssi $x \leqslant t$ (de (2)).

  Donc comme $\begin{cases} x * 1 \leqslant x * 1 \\ x \leqslant x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x * 1 \leqslant x \\ x \leqslant x * 1 \end{cases} \Longrightarrow x * 1 = x.$

- $x * y \leqslant t$ ssi $x \leqslant y \to t$ ssi $1 \leqslant x \to (y \to t)$ ssi $1 \leqslant y \to (x \to t)$ (de (2)) ssi $y \leqslant x \to t$ ssi $y * x \leqslant t$. Donc comme $\begin{cases} x * y \leqslant x * y \\ y * x \leqslant y * x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x * y \leqslant y * x \\ y * x \leqslant x * y \end{cases} \Longrightarrow x * y = y * x.$
- $x * (y * z) \leqslant t$ ssi $y * z \leqslant x \to t$ ssi $y \leqslant z \to (x \to t)$ ssi $y \leqslant x \to (z \to t)$ (de (2)) ssi $x * y \leqslant z \to t$ ssi $(x * y) * z \leqslant t$. Donc comme $\begin{cases} x * (y * z) \leqslant x * (y * z) \\ (x * y) * z \leqslant (x * y) * z \end{cases} \Longrightarrow$ $\begin{cases} x * (y * z) \leqslant (x * y) * z \\ (x * y) * z \leqslant x * (y * z) \end{cases} \Longrightarrow x * (y * z) = (x * y) * z.$

Finalement $(L, \wedge, 1)$ est un monoïde commutative.

Théorème 2.6 *[25]*
Soit $W_k = \{0, 1, ..., k-1\}$ *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{N}$*, on définit pour tout* $x, y \in W_k$ *:*

$$x \wedge y = min\{x, y\}, x * y = \begin{cases} 0 & si \quad x + y \leqslant k-1; \\ (x+y) - (k-1) & si \quad x + y > k-1. \end{cases}$$

$$x \vee y = max\{x, y\},\ x \to y = \begin{cases} k-1 & si \quad x \leqslant y; \\ (k-1) - x + y & si \quad x > y. \end{cases}$$

La structure $(W_k, max, min, *, \to, 0, k-1)$ *est un treillis résiduel.*

Preuve :

- Clair que $(W_k, max, min, 0, k-1)$ est un treillis fermé (on a (RL1)).
- Comme $+$ est commutative et associative, alors $*$ est aussi commutative et associative, et $k-1$ sont élément neutre. Donc $(W_k, *, k-1)$ est un monoïde commutative (on a (RL2)).
- Soient $x, y, z \in W_k$ tel que $x * y \leqslant z$:
  Si $y \leqslant z$, donc $x \leqslant k-1 = y \to z$
  Si $y > z$:
  - Si $x * y = 0$, donc $x + y \leqslant k-1$, donc $x \leqslant (k-1) - y \leqslant (k-1) - y + z = y \to z$.
  - Si $x * y = (x+y) - (k-1)$, donc $x * y = (x+y) - (k-1) \leqslant z$, donc $x \leqslant (k-1) - y + z = y \to z$.

Réciproquement : Soit $x \leqslant y \to z$.

Si $x + y \leqslant k - 1$, donc $x * y = 0 \leqslant z$

Si $x + y > k - 1$:

- Si $y \leqslant z$, donc $x + y \leqslant x + z$, on obtient $k - 1 < x + y \leqslant x + z \leqslant (k-1) + z$, donc $x + y \leqslant (k-1) + z$, alors $x * y = x + y - (k-1) \leqslant z$.
- Si $y > z$, alors $x \leqslant y \to z = (k-1) - y + z$, alors $x * y = x + y - (k-1) \leqslant z$.

(on a (RL3))

Proposition 2.17 *[25]*

Soit Q_n l'ensemble de tous les nombres rationnels de l'intervalle $[1, n]$ et $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on définit pour tout $x, y \in Q_n$:

$$x \wedge y = min\{x, y\}, x * y = \begin{cases} 1 & si \quad xy \leqslant n\,; \\ \frac{xy}{n} & si \quad xy > n. \end{cases}$$

$$x \vee y = max\{x, y\}, x \to y = \begin{cases} n & si \quad x \leqslant y\,; \\ \frac{n}{x}y & si \quad x > y. \end{cases}$$

La structure $(Q_n, max, min, *, \to, 0, n)$ est un treillis résiduel.

Démonstration :

Il est clair que $(Q_n, max, min, 0, n)$ est un treillis fermé (on a (RL1)) et $(Q_n, *, n)$ est un monoïde commutative (on a (RL2)).

On va montrer la condition (RL3), soient $x, y, z \in Q_n$ et $x * y \leqslant z$:

Si $y \leqslant z$, donc $x \leqslant n = y \to z$.

Si $y > z$:

- Si $xy \leqslant n$, donc $x \leqslant \frac{n}{y} \leqslant \frac{n}{y}z = y \to z$.
- Si $xy > n$, donc $x * y = \frac{xy}{n} \leqslant z$, alors $x \leqslant \frac{n}{y}z = y \to z$.

Réciproquement, soit $x \leqslant y \to z$:

Si $xy \leqslant n$, donc $x * y = 1 \leqslant z$.

Si $xy > n$:

- Si $y \leqslant z$, donc $n < xy \leqslant xz$ et comme $\frac{x}{n} \leqslant 1$, donc $1 < \frac{xy}{n} \leqslant \frac{x}{n}z \leqslant z$, alors $x * y \leqslant z$.
- Si $y > z$, donc $x \leqslant y \to z = \frac{n}{y}z$ donc $\frac{xy}{n} \leqslant z$, par conséquent $x * y \leqslant z$.

Chapitre 3

Anneaux booléens

Cette section est une initiation à l'étude générale des anneaux booléens, cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien Georges Boole (1815-1864) pour formaliser les règles de la logique des propositions. Dans cette section on va développer la notion de treillis de Boole et quelques propriétés fondamentales. Le point de départ de cette section sera la notion de treillis distributif et complémenté.

3.1 Treillis de Boole et anneau booléen associé

Définition 3.1 (Treillis de Boole) *[23]*
On appelle treillis de Boole tout treillis fermé qui est à la fois distributif et complémenté.

Propriétés :[2]
Dans un treillis de Boole E on a :

- $0' = 1$, $1' = 0$ et pour tout x : $(x')' = x$.
- Quels que soient x et y : $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ et $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, ces deux égalités sont appelées lois de **De Morgan**, elles sont faciles à vérifier :
  $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0.$
  $(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (y' \vee 1) \wedge (x' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$
  Donc $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, d'où $(x' \wedge y')' = x \vee y$ et $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.
- Quels que soient x et y : $x' \vee y = 1 \iff x \leqslant y \iff x \wedge y' = 0.$

Remarque 3.1 *[4]*

Dans un treillis de Boole tout élément x de $[a, b]$ possède un complément relatif et un seul, qui est $y = (a \vee x') \wedge b$. Le complément x' d'un élément x est aussi son $\wedge$-complément, c'est-à-dire si $x \wedge y = 0$ et comme $x \wedge x' = 0$ alors $y \leqslant x'$.

Définition 3.2 (Addition) *[16]*

Dans un treillis de Boole on définit une nouvelle opération, dite addition par :
$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$.

Exemple 3.1 *[4]*

Tout treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis de Boole, cette opération est celle qu'on appelle souvent ***la différence symétrique****, notée $X + Y = X \triangle Y = (X \cap \complement Y) \cup (\complement X \cap Y)$.*

Remarque 3.2 *[16]*

- $(x + y)' = (x' \vee y) \wedge (x \vee y') = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$.
- *L'opération d'addition vérifie quelques propriétés, elle est commutative, associative et admet 0 comme élément neutre : $x + 0 = (x \vee 0) \wedge (x' \vee 1) = x \wedge 1 = x$. Tout élément est son propre opposé : $x + x = (x \vee x) \wedge (x' \vee x') = x \wedge x' = 0$.*
  $x + 1 = x'$ car $x + 1 = (x \vee 1) \wedge (x' \vee 0) = 1 \wedge x' = x'$, ou encore $x + x' = 1$.

Définition 3.3 (Anneau booléen) *[28]*

On appelle ***anneau booléen*** *tout anneau unitaire dont la multiplication est idempotente ($x^2 = x$).*

Théorème 3.1 *[28]*

Tout treillis de Boole est un anneau booléen pour les opérations :
$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ *et* $x \cdot y = x \wedge y$.

Preuve :

Soit E un treillis de Boole. D'après la remarque 3.2, $(E, +)$ est un groupe abélien.
Définissons la multiplication par : $xy = x \wedge y$ (on note, suivant l'usage, xy au lieu de $x \cdot y$).
Cette opération est commutative, associative et idempotente, 1 est l'élément neutre : $x \cdot 1 = x \wedge 1 = x$, elle est distributive par rapport à l'addition ($(x + y)z = xz + yz$).

Remarque 3.3 *[28]*

Dans un anneau booléen tout élément est son propre opposé (car $(x+x)^2 = x+x$ *soit* $x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x$*, or* $x^2 = x$ *donc* $x+x=0$ *), et la multiplication est commutative (car* $(x+y)^2 = x+y$ *soit* $x^2+xy+yx+y^2 = x+y$*, d'où* $xy+yx=0$ *et d'après ce qui précède :* $yx = xy$ *).*

Théorème 3.2 *[4]*

Tout anneau booléen est un treillis de Boole pour les opérations : $x \wedge y = x \cdot y = xy$ *et* $x \vee y = x+y+xy$

Démonstration :

- La loi $\wedge$ est commutative, associative et idempotente.
- La loi $\vee$ est commutative, associative $(x \vee y) \vee z = x+y+z+xy+yz+xz+xyz = x \vee (y \vee z)$ et idempotente $x \vee x = x+x+x^2 = x+x+x = x$.
- Les lois d'absorption sont vérifiées :
  $x \wedge (x \vee y) = x(x+y+xy) = x^2+xy+x^2y = x+xy+xy = x$.
  $x \vee (x \wedge y) = x+xy+x^2y = x+xy+xy = x$.
- Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$:
  $x \wedge (y \vee z) = x(y+z+yz) = xy+xz+xyz$.
  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy+xz+x^2yz = xy+xz+xyz$.
- Plus petit et plus grand éléments : Pour tout x :
  $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, donc $0 \leqslant x$.
  $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, donc $x \leqslant 1$.
- Complémentation : posons $x' = x+1$:
  $x \wedge x' = x(x+1) = x^2+x = x+x = 0$.
  $x \vee x' = x \vee (x+1) = x+x+1+x^2+x = x+x+1+x+x = 1$.

Soit E un treillis de Boole, nous lui avons associé l'anneau de Boole que nous noterons pour l'instant $A(E)$ en définissant les opérations : $x+y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ et $xy = x \wedge y$. Soit B un anneau booléen, nous lui avons associé le treillis de Boole que nous noterons pour l'instant $T(B)$ en définissant les opérations : $x \wedge y = xy$ et $x \vee y = x+y+xy$.

Proposition 3.1 *[4]*

$T(A(E)) = E$

Démonstration :

Notons $\triangledown$ et $\vartriangle$ les opérations dans $T(A(E))$: $x \vartriangle y = xy = x \wedge y$, il en résulte que la relation d'ordre est la même dans E et $T(A(E))$, il s'agit donc du même treillis.

Proposition 3.2 ***[4]***

$A(T(B)) = B$

Démonstration :

Notons $\oplus$ et $\otimes$ les opérations dans $A(T(B))$: $x \otimes y = x \wedge y = xy$ et

$$\begin{aligned} x \oplus y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y) &= [x(y+1)] \vee [(x+1)y] \\ &= x(y+1) + (x+1)y + xy(x+1)(y+1) \\ &= xy + x + xy + y + x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy \\ &= x + y \end{aligned}$$

Sur un ensemble E il est équivalent de définir : une structure de treillis de Boole $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ')$, et une structure d'anneau booléen $(E, +, \cdot, 0, 1)$. On parle souvent **d'algèbre de Boole** pour désigner l'ensemble de ces deux structures $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ', +, \cdot)$. Il sera utile de retenir le formulaire suivant qui permet les passages d'une structure à l'autre :

$$\begin{cases} xy = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y) \\ \qquad = (x \vee y) \wedge (x^{'} \vee y^{'}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy \\ x^{'} = x + 1 \end{cases}$$

Remarque 3.4 ***[16]***

- *Considérons une algèbre de Boole* $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ', +, \cdot)$ *:*
  1. *La relation d'ordre $x \leqslant y$ peut être exprimée de plusieurs façons équivalentes :*
     - *Par $xy = x$ (on utilisera de préférence la notation xy à $x \wedge y$).*
     - *Par $x \vee y = y$.*
     - *Par $x^{'} \vee y = 1$.*
     - *Par $xy^{'} = 0$.*
  2. *Nous savons que la relation d'ordre est compatible avec les opérations $\cdot$ et $\vee$: $x \leqslant y$ implique $xz \leqslant yz$ et $x \vee a \leqslant y \vee z$, mais il n'en pas de même pour l'addition, par exemple $0 < 1$ mais $0 + 1 = 1 > 1 + 1 = 0$.*

3. $x \leqslant y$ *équivaut à* $y' \leqslant x'$ *car :* $xy = x$ *équivaut à* $(xy)' = x'$*, soit* $x' \vee y' = x'$.

- *Le seul anneau booléen intègre est l'anneau à deux éléments* $\mathbb{U} = \{0, 1\}$*, ce n'est autre d'ailleurs que le corps* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple 3.2

Anneau des ofs d'un espace topologique : Dans un espace topologique X, on appelle ***of*** *toute partie qui est à la fois ouverte et fermée (en anglais :* ***clopen****). Tout espace topologique X possède au moins deux* ***ofs****, sont X et $\emptyset$, si l'espace est connexe ce sont d'ailleurs les seuls. L'ensemble $\mathcal{V}$ des ofs de X est un sous-treillis de $\mathcal{P}(X)$: si A et B sont des ofs, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des ofs.$\mathcal{V}$ est donc lui-même un treillis distributif avec un plus petit élément $\emptyset$ et un plus grand élément X, il est en outre complémenté car si A est un of, $\complement A$ est aussi un of.*

$\mathcal{V}$ est donc ***une algèbre de Boole*** *pour les opérations ensemblistes usuelles.*

Théorème 3.3 *[3]*

Le treillis $D(n)$, ordonné par divisibilité, est une algèbre de Boole ***si et seulement si*** *n n'est divisible par aucun carré de nombre premier (cela signifie que n est de la forme $p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$ où les p_i sont des nombres premiers distincts).*

Exemple 3.3

1. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ *et* $646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$*, donc* D_{210}*,* D_{66} *et* D_{646} *sont des anneaux booléennes.*
2. *On a représenté dans la figure 3.1 les trois anneaux booléens :* $D(2)$*,* $D(6)$ *et* $D(30)$*. Dans* $D(30)$ *on calcule, par exemple :* $5 + 2 = 10$, $6 \cdot 10 = 2$

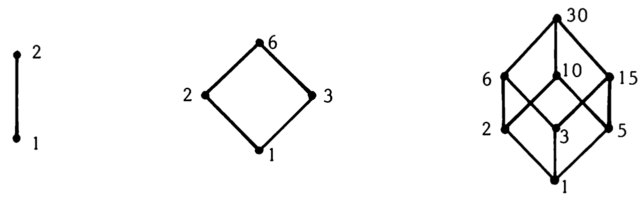

FIGURE 3.1

Exemple 3.4 *[26]*

Soit $(A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ *un anneau booléen et pour* $x, y \in A$ *on définit* $x * y = x \wedge y$ *et* $x \to y = x' \vee y$*, alors la structure* $(A, \vee, \wedge, *, \to 0, 1)$ *est un treillis résiduel.*

3.1.1 Sous-anneau booléen

Définition 3.4 *[27]*

*Dans une algèbre de Boole A, on appelle **sous-anneau booléen**, ou encoure **sous-algèbre de Boole** de A tout sous-anneau **unitaire** de A.*

Remarque 3.5 *[4]*

- *Un sous-anneau booléen B de A, muni de l'ordre induite, est un sous-treillis de A.*
- *Dans un anneau booléen A il y a au moins les deux sous-anneaux booléens $\mathbb{U}$ et A.*
- *L'intersection d'une famille quelconque de sous-anneau booléens de A est un sous-anneau booléen de A.*

Proposition 3.3

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- *B est un sous-anneau booléen.*
- *B est une partie non vide stable pour les opérations xy et x'.*
- *B est une partie non vide stable pour les opérations $x \vee y$ et x'.*

En pratique, on utilisera assez souvent la deuxième caractérisation.

Exemple 3.5

1. *L'ensemble $FC(E)$ des parties finis ou cofinies d'un ensemble E est un sous-treillis booléen de $\mathcal{P}(E)$. Plus généralement, si E est un ensemble infini de cardinal α et si β est un cardinal infini inférieur à α, l'ensemble des parties A telles que $card(A) \leqslant \beta$ ou $card(A^c) \leqslant \beta$ est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(E)$.*
2. *L'ensemble $\mathcal{V}$ des ofs d'un espace topologique X est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(X)$. Par contre, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts est bien un sous-treillis qui contient l'élément unité X, mais ce n'est pas en général un sous-anneau booléen, car il n'est pas stable pour la complémentation.*

3.1.2 Morphismes booléens

Définition 3.5 *[16]*

*Soient A et B deux anneaux booléens, une application $f : A \longrightarrow B$ est dite **morphisme booléen** si*

*f est un morphisme **unitaire d'anneaux**, c'est-à-dire : $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1) = 1$.*

Remarque 3.6 *[16]*

Un morphisme booléen préserve toutes les opérations d'algèbre booléenne $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, $f(x') = f(x)'$ et $f(0) = 0$, de plus il préserve l'ordre si $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (c'est-à-dire croissant).

Proposition 3.4 *[4]*

Si A et B sont deux algèbre booléennes et f une application de A dans B, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un morphisme booléen.*
2. *Quels que soient x, y dans A : $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(x') = f(x)'$.*
3. *Quels que soient x, y dans A : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et $f(x') = f(x)'$.*

En pratique, on utilisera assez souvent la caractérisation (2).

Exemple 3.6

1. *Si A un anneau booléen, l'application identique I_A de A est un morphisme booléen.*
2. *Si $A = \mathcal{P}(E)$ et x_0 est un élément fixé de E, l'application $f : A \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par*
   $f(X) = \begin{cases} 1 & si \;\; x_0 \in X \\ 0 & si \;\; x_0 \notin X \end{cases}$ *est un morphisme booléen.*

Si f est un morphisme booléen de A dans B on définira :

f est un **monomorphisme** booléen : si f est injective.

f est un **épimorphisme** booléen : si f est surjective.

f est un **isomorphisme** booléen : si f est bijective.

f est un **endomorphisme** booléen : si $A = B$ avec la même structure.

f est un **automorphisme** booléen : si f est un endomorphisme bijectif.

Remarque 3.7 *[4]*

Un morphisme booléen f de A dans B vérifie notamment $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, c'est donc aussi un morphisme de treillis, et a fortiori une application croissante. Mais un *morphisme de treillis entre deux algèbres booléennes n'est pas nécessairement un morphisme booléen (même s'il préserve 1), par exemples : soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X) = X \cup X_0$ où X_0 est une partie non vide fixée de E.*

$f(X \cup Y) = X \cup Y \cup X_0 = (X \cup X_0) \cup (Y \cup X_0) = f(X) \cup f(Y)$.

$f(X \cap Y) = (X \cap Y) \cup X_0 = (X \cup X_0) \cap (Y \cup X_0) = f(X) \cap f(Y)$, et $f(E) = E$.

Mais $f(\emptyset) = X_0$ et $f(\complement X) = \complement X \cup X_0 \neq \complement X \cap \complement X_0 = \complement f(X)$.

Proposition 3.5 *[4]*

*f est un morphisme booléen de A dans B **ssi** f est un morphisme de treillis avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.*

Démonstration :

($\Rightarrow$) déjà traiter.

($\Leftarrow$) Pour tout $x \in A$, $x \wedge x^{'} = 0$ donc $f(x \wedge x^{'}) = f(x) \wedge f(x^{'}) = f(0) = 0 = f(x) \wedge f(x)^{'}$.

$x \vee x^{'} = 1$ donc $f(x \vee x^{'}) = f(x) \vee f(x^{'}) = f(1) = 1 = f(x) \vee f(x)^{'}$.

Ce qui preuve $f(x^{'}) = f(x)^{'}$.

Proposition 3.6 *[4]*

Soient A et B deux anneaux booléennes, si f un morphisme de treillis surjective (épimorphisme) de A sur B, alors f est un morphisme booléen.

Démonstration :

Soit $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, dans $A : 0 \leqslant x \leqslant 1$, or f est croissante, donc $f(0) \leqslant f(x) = y \leqslant f(1)$ et ceci pur tout $y \in B$. Il en résulte $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on utilise alors le résultat du proposition 3.5.

Remarque 3.8 *[4]*

Soient A et B deux anneaux booléennes, Un morphisme injective de treillis de A dans B n'est pas nécessairement un morphisme booléen. Exemple : $D(6)$ est un sous-treillis de $D(30)$, l'injection canonique de $D(6)$ dans $D(30)$ est un morphisme de treillis, mais ce n'est pas un morphisme booléen, puisque $f(2') = f(3) = 3 \neq 10 = 3' = f(2)'$.

Proposition 3.7 *[4]*

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un isomorphisme booléen.*

2. *f est un isomorphisme de treillis.*

3. *f est un isomorphisme d'ordre.*

3.2 Filtres et idéaux dans un anneau booléen

Nous avons déjà introduit les notions de filtres et idéaux dans l'étude des treillis, tout ce qui a été dit reste a fortiori valable dans une algèbre de Boole A.

Définition 3.6 (Idéal d'anneau) *[7]*
Un idéal J d'un anneau commutatif A est toute partie non vide de A vérifiant :

$a)$ *J est un sous-groupe additif de A ;*

$b)$ *Si $x \in J$ et $\alpha \in A$, alors $\alpha x \in J$.*

Proposition 3.8 (Idéaux de treillis et idéaux d'anneaux) *[2]*
Dans une algèbre booléenne A les notions d'idéal au sens des treillis et idéal au sens des anneaux sont les mêmes.

Démonstration :

- Si J est un idéal au sens des treillis :
  $a)$ Soient $x, y \in J : x + y = (xy') \vee (x'y)$, $xy' \leqslant x$ donc $xy' \in J$, $x'y \leqslant y$ donc $x'y \in J$, donc $x + y \in J$, J est donc un sous-groupe additif de A.
  $b)$ Soient $x \in J$ et $\alpha \in A : \alpha x \leqslant x$ donc $\alpha x \in J$. Donc J est un idéal au sens des anneaux.
- Si J est un idéal au sens des anneaux :
  $a)$ Soient $x \in J$ et $y \leqslant x : y = xy$ donc $y \in J$.
  $b)$ Soient $x \in J$ et $y \in J : x \vee y = x + y + xy \in J$.

Remarque 3.9 *[4]*
Un idéal principal au sens des treillis est la même chose qu'un idéal principal au sens des anneaux.

Rappelons que si G est une partie d'un anneau booléen A, nous avons noté :

$$G^{'} = \{x^{'} \mid x \in G\} = \{x \in A \mid x^{'} \in G\}$$

Remarque 3.10

- *F est un filtre $\Longleftrightarrow F^{'}$ est un idéal.*
- *F est un filtre propre $\Longleftrightarrow F^{'}$ est un idéal propre.*
- *F est le filtre principal $A \vee \alpha \Longleftrightarrow F^{'}$ est l'idéal principal $A\alpha'$.*
- *F est le filtre engendré par $G \Longleftrightarrow F^{'}$ est l'idéal engendré par $G^{'}$.*

Soit A un anneau booléen, nous savons qu'il possède des ultrafiltres (c'est-à-dire des filtres propres maximaux), et que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre. La caractérisation des ultrafiltres que nous avons vue à propos des treillis va nous permettre d'obtenir les résultats suivants.

Proposition 3.9 ***[16]***
Si F est un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$a)$ *F est un ultrafiltre.*

$b)$ *Pour tout $x \notin F$, $x^{'} \in F$.*

Démonstration :
$a)$ implique $b)$: nous savons que si $x \notin F$ il existe $y \in F$ tel que $xy = 0$ d'où $y \leqslant x^{'}$, donc $x^{'} \in F$.
$b)$ implique $a)$: si $x \notin F$, il existe $x^{'} \in F$ tel que $xx^{'} = 0$, donc F est un ultrafiltre.

Proposition 3.10 ***[4]***
Pour qu'une partie F de A soit un ultrafiltre, ***il faut et il suffit que*** *sa fonction caractéristique δ_F soit un morphisme booléen de A dans l'anneau booléen $\mathbb{U} = \{0, 1\}$.*
Où $\delta_F : A \longrightarrow \mathbb{U}$ telle que pour tout x de A, $\delta_F(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in F. \\ 0 & si\ x \notin F. \end{cases}$

Démonstration :

- Si F est un ultrafiltre :
  - Si $\delta_F(xy) = 1$, $xy \in F$ or $x \geqslant xy$ et $y \geqslant xy$, donc $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$.
  - $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$: $x \in F$ et $y \in F$, donc $xy \in F$ donc $\delta_F(xy) = 1$.
    On en déduit : $\delta_F(xy) = \delta_F(x)\delta_F(y)$.

- $\delta_F(x) = 1$, $x \in F$ donc $x' \notin F$ (sinon $xx' = 0 \in F$), d'où $\delta_F(x') = 0$.
- $\delta_F(x') = 0$, $x' \notin F$ donc $x = (x')' \in F$, d'où $\delta_F(x) = 1$.

  On en déduit : $\delta_F(x') = (\delta_F(x))'$, donc δ_F est un morphisme booléen.

- Réciproquement, si δ_F est un morphisme booléen :
  - $\delta_F(1) = 1$, donc $1 \in F$.
  - $\delta_F(0) = 0$, donc $0 \notin F$.
  - Si $x \in F$ et $y \geqslant x$: $\delta_F(x) = 1$ et $\delta_F(y) \geqslant \delta_F(x)$, donc $\delta_F(y) = 1$, $y \in F$.
  - Si $x \in F$ et $y \in F$: $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$, $\delta_F(xy) = \delta_F(x)\delta_F(y) = 1$, $xy \in F$.
  - Si $x \notin F$: $\delta_F(x) = 0$ donc $(\delta_F(x))' = \delta_F(x') = 1$, $x^{'} \in F$.

    Il en résulte que F est un ultrafiltre.

Remarque 3.11

- *Ce résultat montre qu'il y a correspondance bijective entre les ultrafiltres de A et les morphismes booléens de A dans $\mathbb{U}$.*
- *Pour un ultrafiltre F on a donc :* $\begin{cases} x' \in F \Longleftrightarrow x \notin F \\ xy \in F \Longleftrightarrow x \in F \text{ et } y \in F \\ x \vee y \in F \Longleftrightarrow x \in F \text{ ou } y \in F \end{cases}$

Proposition 3.11 *[4]*

Tout filtre propre est égal à l'intersection de tous les ultrafiltres le contient.

En particulier, l'intersection de tous les ultrafiltres de A est $\{1\}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{U}_F$ la famille des ultrafiltres contenant F (F est un filtre propre).

- On a évidemment : $F \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$
- Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$, posons $G = F \cup \{x'\}$.

  Si G est $\wedge$-compatible, elle engendre un filtre propre F_G, lui-même contenu dans un ultrafiltre U_1, donc $U_1 \in \mathcal{U}_F$ et $x \in U_1$, de plus comme $G \subseteq F_G \subseteq U_1$, $x^{'} \in U_1$. On a $x, x' \in U_1$ et U_1 un ultrafiltre, ce qui est contradictoire. Donc G est $\wedge$-incompatible, alors il existe $y \in F$ tel que $yx' = 0$, donc $y \leqslant x$ et $y \in F$ d'où $x \in F$.

Remarque 3.12

Tout ce qui vient d'être dit pour les ultrafiltres peut être transcrit par dualité pour les idéaux maximaux grâce au résultat :

Proposition 3.12 *[16]*

Pour que I soit un idéal maximal ***il faut et il suffit que*** *$I^{'}$ soit un ultrafiltre.*
Dans ce cas : $I^{'} = \complement_A I$.

Démonstration :

- Si I est un idéal maximal, nous savons que $I^{'}$ est un filtre propre, soit F un autre filtre propre tel que $I^{'} \subseteq F$, alors $I \subseteq F^{'}$, donc $I = F^{'}$ (car I est un idéal maximal) et par suite $I^{'} = F$, donc $I^{'}$ est un ultrafiltre.
- La réciproque se démontre de façon analogue.
- En outre, si I est un idéal maximal :
  $x \notin I \Longleftrightarrow x^{'} \notin I^{'} \Longleftrightarrow x \in I^{'}$ car $I^{'}$ est un ultrafiltre. D'où $I^{'} = \complement_A I$.

Définition 3.7 *[28]*

Dans un anneau commutatif quelconque on définit un idéal ***premier*** *P (propre) par la condition :*
Quels que soient x, y : $xy \in P \Longrightarrow x \in P$ ou $y \in P$.

Proposition 3.13 *[7]*

Dans le cas d'un anneau booléen il y a équivalence entre les deux propriétés :

$a)$ *I est un idéal maximal.*

$b)$ *I est un idéal premier.*

Démonstration :

- Si I est un idéal maximal et si $xy \in I$, alors $x \in I$ ou $y \in I$, sinon $x \in \complement I$ et $y \in \complement I$ donc $xy \in \complement I$ ($\complement I$ est un ultrafiltre).
- Si I est un idéal premier : Soit $x \notin I$, comme $xx' = 0 \in I$, donc $x' \in I$, alors I est maximal.

Exemple 3.7

Soient l'anneau booléen $\mathcal{P}(E)$ où E est un espace topologique, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre de $\mathcal{P}(E)$. Ceci résulte immédiatement de la définition des voisinages. Rappelons que x est dit un point isolé si $\{x\}$ est un voisinage de x, on a alors le résultat suivant : pour que $\mathcal{V}(x)$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que x soit un point isolé. En effet :

- *Si x est isolé : si $A \notin \mathcal{V}(x)$, alors $x \notin A$, donc $x \in \complement A$, donc $\complement A \in \mathcal{V}(x)$.*
- *Si $\mathcal{V}(x)$ est un ultrafiltre : supposons $\{x\} \notin \mathcal{V}(x)$, alors $\complement\{x\} \in \mathcal{V}(x)$ ce qui est contradictoire.*

Dans ce cas $\mathcal{V}(x)$ est donc l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$.

Considérons deux anneaux booléens A et B et f un morphisme de A dans B.

Proposition 3.14 *[4]*

- *Si F est un filtre de B, alors $f^{-1}(F)$ est un filtre de A.*
- *Si I est un idéal de B, alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A.*

Démonstration :

Soit F un filtre de B : $f(1) = 1 \in F$, donc $1 \in f^{-1}(F)$.
Si $x \in f^{-1}(F)$ et $y \geqslant x$: $f(y) \geqslant f(x)$ et $f(x) \in F$, donc $y \in f^{-1}(F)$.
Si $x \in f^{-1}(F)$ et $y \in f^{-1}(F)$: $f(x) \in F$ et $f(y) \in F$, $f(xy) = f(x)f(y) \in F$, donc $xy \in f^{-1}(F)$.
Démonstration analogue pour un idéal.

Remarque 3.13 *[4]*

- *$f^{-1}(1)$ est un filtre de A.*
- *$f^{-1}(0)$ est un idéal de A, appelé* ***le noyau*** de *f et noté $ker(f)$ (comme dans tout anneau).*
- *Si F est un filtre propre, $f^{-1}(F)$ est aussi un filtre propre (de même pour un idéal), en effet si $0 \in f^{-1}(F)$, $f(0) = 0 \in F$.*
- *Si F est un ultrafiltre, $f^{-1}(F)$ est aussi un ultrafiltre (de même pour un idéal), en effet si $x \notin f^{-1}(F)$, $f(x) \notin F$, donc $(f(x))' = f(x') \in F$, $x' \in f^{-1}(F)$.*
- *En général, l'image directe d'un filtre (resp. d'un idéal) de A n'est pas un filtre (resp. un idéal) de B. Par exemple : soit $f : D(6) \longrightarrow D(30)$ un morphisme booléen définie par :*
  $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 15$ et $f(6) = 30$.
  On a $\{2, 6\}$ est un filtre de $D(6)$, mais $f(\{2, 6\}) = \{2, 30\}$ n'est pas un filtre de $D(30)$.

Proposition 3.15 *[4]*
Si f est un épimorphisme booléen de A sur B et si F est un filtre de A, alors $f(A)$ est un filtre de B. (on a la même résultat pour un idéal).

Démonstration :

- $1 \in F$, donc $f(1) = 1 \in f(F)$.
- Si $x \in f(F)$ et $y \geqslant x$: $x = f(x_1)$ et $y = f(y_1)$ avec $x_1 \in F$ et $y_1 \in A$
  $y = y \vee x = f(y_1) \vee f(x_1) = f(y_1 \vee x_1) \in f(F)$ car $y_1 \vee x_1 \geqslant x_1$.
- $x \in f(F)$ et $y \in f(F)$: $x = f(x_1)$ et $y = f(y_1)$ avec $x_1, y_1 \in F$, donc
  $xy = f(x_1)f(y_1) = f(x_1 y_1) \in F$ car $x_1 y_1 \in F$.

Finalement $f(F)$ est un filtre de B.

3.3 Théorème de Représentation de Stone

Soit A un anneau booléen, on désigne par X l'ensemble des ultrafiltres de A, cet ensemble est appelé **espace de Stone**. Soit δ l'application de A dans $\mathcal{P}(X)$ définie par :

$$\delta : A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$x \longmapsto \delta(x)$$
$$\delta(x) = \{U \in X : x \in U\}$$

Théorème 3.4 (Théorème de Stone) *[4]*
*Pour tout anneau booléen A, δ est un **monomorphisme** booléen de A dans $\mathcal{P}(X)$.*

Preuve :
Soit U un ultrafiltre de X.
$xy \in U \Longleftrightarrow x \in U$ et $y \in U$, on en déduit : $\delta(xy) = \delta(x) \cap \delta(y)$.
$x' \in U \Longleftrightarrow x \notin U$, on en déduit : $\delta(x') = \complement\delta(x)$.
Ce qui montre que δ est un morphisme booléen.
Si $\delta(x) = \delta(y)$: $\delta(x) + \delta(y) = \delta(x + y) = \emptyset$, ou encore $\delta((x + y)') = X$, donc $(x + y)'$ appartient à tout ultrafiltre de X, donc $(x + y)' = 1$, soit $x + y = 0$, donc $x = y$. Ce qui montre que δ est injective. A est donc **isomorphe** à $\delta(A)$ qui est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(X)$.
Nous appellerons δ (ou δ_A s'il faut préciser) **l'isomorphisme de Stone** relatif à A.

Remarque 3.14 *[4]*

Le théorème de Stone admet plusieurs versions qui sont équivalentes :

- *On prend X_1 l'ensemble des idéaux maximaux (ou premiers) de A et on définit δ_1 par :* $\delta_1(x) = \{I \in X_1 : x^{'} \in I\}$. *$\delta_1$ est aussi un monomorphisme booléen de A dans $\mathcal{P}(X_1)$.*
- *On prend X_2 l'ensemble des morphismes booléens de A dans $\mathbb{U}$ et on définit δ_2 par :* $\delta_2(x) = \{f \in X_2 : f(x) = 1\}$. *$\delta_2$ est aussi un monomorphisme booléen de A dans $\mathcal{P}(X_2)$.*

Proposition 3.16 *[4]*

*Si A est un anneau booléen **fini**, alors δ est surjective. Autrement dit, A est isomorphe à $\mathcal{P}(X)$.*

Démonstration :

Si A est fini, X est aussi un ensemble fini. Soit $Y \in \mathcal{P}(X)$, si $Y = \emptyset$ alors $Y = \delta(0)$.

Si $Y \neq \emptyset$, posons $Y = \{U_1, ..., U_k\}$ et soit $F = U_1 \cap ... \cap U_k$.

F est un filtre de A, il est donc principal, posons $F = F_\alpha = A \vee \alpha$.

- $\alpha \in F$, donc $\alpha \in U_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$: $Y \subseteq \delta(\alpha)$.
- Soit $U \in \delta(\alpha)$, donc $\alpha \in U$, donc $F \subseteq U$.

  Supposons $U \neq U_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, donc $U_i \nsubseteq U$ (car U_i est maximal), donc pour chaque i il existe $x_i \in U_i$ tel que $x_i \notin U$.

  Soit $x = x_1 \vee ... \vee x_k$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, $x \geqslant x_i$, donc $x \in U_i$, donc $x \in F$, donc $x \in U$ et comme U un ultrafiltre, donc l'un des $x_i \in U$, ce qui contredit le fait qu'aucun x_i n'appartienne à U.

  Alors U est l'un des U_i, d'où $\delta(\alpha) \subseteq Y$.

Ainsi, $Y = \delta(\alpha)$, donc δ est surjective.

Conclusion 3.1

1. *Le nombre d'éléments d'un anneau booléen fini A est de la forme 2^n, n est le nombre d'ultrafiltres de A. Exemples : $D(30)$ a 8 éléments, donc il contient 3 ultrafiltres car $8 = 2^3$; $D(210)$ a 16 élément, donc il contient 4 ultrafiltres car $16 = 2^4$.*
2. *Tout les anneaux booléens finis ayant le même nombre d'éléments, 2^n, sont isomorphe entre eux, et isomorphe à $\mathcal{P}(X)$ où X est un ensemble à n éléments.*
3. *Quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, il existe des anneaux booléens ayant 2^n éléments et possédant n ultrafiltres.*

Chapitre 4

Treillis de Heyting

4.1 Introduction

Entre 1900 et 1930 il y'avait une crise des Mathématiques due aux paradoxes de la théorie des ensembles. Choses qui ont conduit au refus des fondements de la logique classique. Du refus du principe du tiers exclus naisse la logique intuitionniste ou logique constructive.

Dans ce travail on traite le contre parts algébriques de la logique intuitionniste à savoir les algèbres implicative, les algèbres implicatives positives, algèbres de Heyting.

Enfin on 'a donné un théorème de représentation des algèbres de Heyting et ceci après avoir introduit la notion des systèmes déductif dans une algèbre implicative.

Cette structure algébrique (algèbres de Heyting) a été introduite en 1930 par le mathématicien néerlandais Arend Heyting comme modèle algébrique de la logique intuitionniste de Brouwer.

Dans cette logique la loi de non contradiction : $a \wedge \neg a = 0$ vérifiée, et c'est le plus grand élément de H qui satisfait cette propriété. En revanche, et c'est la différence essentielle entre la logique intuitionniste et la logique classique (Booléenne), il n'est pas vrai en général que $a \vee \neg a = 0$, comme nous allons voir plus loin.

Dans ce chapitre on va introduire la notion d'un Treillis de Heyting (ou algèbre de Heyting) ainsi que certaines de ses propriétés principales et quelques exemples d'applications.

4.2 Algèbre implicative

Définition 4.1 *Une algèbre* $(A, \to, 1)$ *du type (2,0), (c'est-à-dire un ensemble non vide* A *avec une opération binaire* $\to$ *et une constante* 1*) est dite une algèbre implicative s'il satisfait pour tout* $a, b, c \in A$ *aux axiomes suivants :*

i$_1$) $a \to a = 1$,

i$_2$) $a \to b = 1$ et $b \to a = 1$, alors $a = b$,

i$_3$) $a \to b = 1$ et $b \to c = 1$, alors $a \to c = 1$,

i$_4$) $a \to 1 = 1$.

Remarque 4.1 *Si on pose* $a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1$*,alors* $\leq$ *est une relation d'ordre. En effet :*
on a $a \to a = 1$*, donc* $a \leq a$*.*

Si $a \leq b$ *et* $b \leq a$*, alors on aura donc* $a \to b = 1$ *et* $b \to a = 1$*, par suite* $a = b$*.*

Si $a \leq b$ *et* $b \leq c$*, cela entraine* $a \to b = 1$ *et* $b \to c = 1$*, alors* $a \to c = 1$ *et donc* $a \leq c$*.*

L'élément 1 *est le plus grand élément de l'ensemble ordonné* $(A, \leq)$*.*

Exemple 4.1 *(algèbre implicative)*

Soit l'ensemble $L = \{0, a, b, c, 1\}$ muni de la relation d'ordre donnée par :

$0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, avec $x \wedge y = \min\{x, y\}, x \vee y = \max\{x, y\}$, et l'opération est donnée par :

pour tout $x, y \in L$, $x \to y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y; \\ y \text{ sinon.} \end{cases}$

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

,

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	b	c	1
b	b	b	b	c	1
c	c	c	c	c	1
1	1	1	1	1	1

, et

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

.

Alors il est facile de voir que $(L, \vee, \wedge, \to)$ est une algèbre implicative.

4.3 Algèbre implicative positive

Définition 4.2 *(algèbre implicative positive)*

Une algèbre implicative positive est une structure $(A, \to, 1)$ du type (2,0), ou A un ensemble non vide, $\to$ une opération binaire sur A, 1 un élément distingué de A. Vérifiant pour tout $a, b, c \in A$, vérifiant les axiomes :

P$_1$) $a \to (b \to a) = 1,$

P$_2$) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1,$

P$_3$) $a \to b = 1, b \to a = 1,$ alors $a = b,$

P$_4$) $a \to 1 = 1.$

Règle de Modus Ponens

Si $a = 1$ et $a \to b = 1,$ alors $b = 1,$ (règle de modus ponens) .

Proposition 4.1 *La règle de modus ponens est valable dans toute algèbre d'implicative positive.*

Démonstration :

En effet si $a \to b = 1$ et $a = 1$, alors par (P$_4$) $a \to 1 = 1$. Par conséquent, en utilisant (P$_3$), nous obtenons $b = 1$.

Exemple 4.2 *(algèbre implicative positive)*

1. *Toute chaine $\mathcal{C}$ avec un plus grand élément est une algèbre implicative positive, ou $\to$ est donnée par, pour tout $x, y \in \mathcal{C}$,*
$$x \to y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq y; \\ \\ y \text{ sinon.} \end{cases}$$
2. *Soit X un espace topologique, $\theta(X) = \{$ouverts de $X\}$, avec pour tout $A, B \in \theta(X)$, $A \to B = (\overset{\circ}{\widehat{B \cup CA}})$, et $1 = X$, est une algèbre implicative positive.*

Proposition 4.2 *Toute algèbre implicative positive est une algèbre implicative.(Pensr à l'inverse)*

Démonstration :

$P_4 \Longleftrightarrow i_4$ et $P_3 \Longleftrightarrow i_2$. Reste i_1 et i_3.

Pour cela considérons P_2 avec $\begin{cases} a &= & a \\ b &= & a \to a \\ c &= & a \end{cases}$

$(a \to ((a \to a) \to a)) \to ((a \to (a \to a)) \to (a \to a)) = 1$. D'aprés P_1 et en remplaçant b par $a \to a$ on obtient $(a \to ((a \to a) \to a)) = 1$, m.p donne $((a \to (a \to a)) \to (a \to a)) = 1$, et en appliquant m.p une deuxième fois on obtient $a \to a = 1,\ i.e.\ i_1$.

Pour touver i_3, supposons que $a \to b = 1$ et $b \to c = 1$, P_2 donne $(a \to 1) \to (1 \to (a \to c)) = 1$,m.p donne $1 \to (a \to c) = 1$, et en appliquant m.p une deuxième fois on obtient $a \to c = 1,\ i.e.\ i_3$.

Propriétés

Dans une algèbre implicative positive on a les propriétés suivantes :

1. $a \leq b \to a$.
2. $a \leq b \to c \Leftrightarrow b \leq a \to c$.
3. $a \leq (a \to b) \to b$.
4. $1 \to a = a$.
5. si $b \leq c$ alors $a \to b \leq a \to c$.
6. $a \leq b$ alors $b \to c \leq a \to c$.
7. $a \to (a \to b) = a \to b$.
8. $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

1. D'après p_1
2. Si $a \leq b \to c$, alors $a \to (b \to c) = 1,\ P_2$+ m.p donnent $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, donc $(a \to b) \leq (a \to c)$, mais d'prés P_1 on'a $b \leq (a \to b)$. Il en résulte que $b \leq (a \to c)$.
3. On'a $a \to b \leq a \to b$ d'aprés (2) $a \leq (a \to b) \to b$.
4. D'aprés (3) $1 \leq (1 \to a) \to a$, i.e. $1 = (1 \to a) \to a$, donc $(1 \to a) \leq a$, mais d'apré (1) $a \leq (1 \to a)$, ce qui donne $1 \to a = a$.
5. Si $b \leq c$ alors $b \to c = 1$, donc $a \to (b \to c) = a \to 1 = 1$, p_2 + (m.p) donnent $a \to b \leq a \to c$.

6. Si $a \leq b$, alors $a \to b = 1$, p_2 $(a \to (b \to c)) \to (1 \to (a \to c)) = 1$, i.e. $(a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$, donc $a \to (b \to c) \leq a \to c$, mais d'apré (1) $b \to c \leq a \to b \to c$, d'ou $b \to c \leq a \to c$.

7. Pour montrer $a \to (a \to b) = a \to b$, considérons P_2 i.e. $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$, avec $a = a,\ b = a,\ c = b$. On obtient $(a \to (a \to b)) \to ((a \to a) \to (a \to b)) = 1$ i.e, $(a \to (a \to b)) \to (1 \to (a \to b)) = 1$ ou encore $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = 1$, i.e, $a \to (a \to b) \leq (a \to b) \ldots. (1)$, mais nous avons $(a \to b) \leq a \to (a \to b) \ldots.. (2)$, 1 et 2 donnent $(a \to b) = a \to (a \to b)$.

Définition 4.3 *(Treillis de Heyting, pseudo-complémenté ou p-treillis).*

C'est un treillis $(E, \leq, \wedge, \vee)$ vérifiant (P) quels que soient a et b dans E l'ensemble

$$\{x \in E \,/\, x \wedge a \leq b\} \qquad \text{(bfp)}$$

possède un plus grand élément noté $a \to b$ c'est :

Le pseudo-complément de a par rapport à b :

$$\left\Vert \begin{array}{l} a \wedge (a \to b) \leq b \\ a \wedge x \leq b \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \leq a \to b.$$

Proposition 4.3 *Un treillis de Heyting E est toujours distributif*

Démonstration :

Montrons que pour tout $x, y, z \in E$, on a

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. D'une on a :

$$\begin{array}{ccc} y \leq (y \vee z) & & x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z). \\ \text{et} & \text{alors} & \text{et} \\ z \leq (y \vee z) & & x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z). \end{array}$$

Ainsi $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ $\qquad (1)$

Reste à montrer l'inégalité inverse, pour cela considérons en effet,

$F = \{t \in F / x \wedge t \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\}$.

Cet ensemble a un plus grand élément t_0

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in F, \\ z \in F, \end{array} \right. \text{alors} \left\{ \begin{array}{l} y \leq t_0 \\ z \leq t_0 \end{array} \right. \text{par conséquent } y \vee z \leq t_0$$

soit encore, $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. (2)

De (1) et (2) on obtient l'égalité.

Définition 4.4 *Pour qu'une algèbre* $(A, \vee, \rightarrow, 1)$ *implicative positive soit un P-treillis il faut et il suffit que* $(A, \rightarrow, 1)$ *soit un treillis implicatif positif et que les axiomes suivantes soient vérifies :*

$P_5)$ $a \rightarrow (b \vee a) = 1,$

$P_6)$ $b \rightarrow (b \vee a) = 1,$

$P_7)$ $(a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c) = 1,$

$P_8)$ $a \wedge b \rightarrow a = 1,$

$P_9)$ $a \wedge b = b = 1,$

$P_{10})$ $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow a \wedge b) = 1$

Définition 4.5 *(treillis pseudo-complémenté)*

C'est un treillis distributif <u>fermé</u> tel que pour tout a :

$\{x/a \wedge x = 0\}$ a un plus grand élément qu'on note a^*, a^* est dit pseudo complément de a et noté par : $a^* =\sim a$

Définition 4.6 *(algèbre pseudo-Booléenne ou algèbre de Heyting)*

Une algèbre de Heyting est un treillis de Heyting avec $\sim$ *(semi-négation) :*

$$\begin{cases} a \rightarrow\sim b = b \rightarrow\sim a, \\ \sim (a \rightarrow a) \leq b. \end{cases}$$

$\sim a = a \rightarrow\sim 1,$

$\sim 1 = 0.$

Propriétés des algèbres de Heyting

(1) Une algèbre de Heyting admet un plus petit élément 0, (donné par $0 =\sim 1$)

(2) $\sim 0 = 1$

(3) $\sim a = a \rightarrow 0$

(4) $a \leq\sim\sim a$

$\mathbf{L.M} \vdash A \rightarrow \sim\sim A$

ou $a \leq a^{**}$

(5) $a \rightarrow b \leq \sim b \rightarrow \sim a$

$L.M :\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

$a \leq b : a \rightarrow b = 1$

$\sim b \rightarrow \sim a = 1$

(6) $a \rightarrow b \leq \sim b \rightarrow \sim a$

$L.M :\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

$a \leq b : a \rightarrow b = 1$

$\sim b \rightarrow \sim a = 1$

(7) $a \leq b \Rightarrow \sim b \leq \sim a$

(8) Si $\sim a = 1$ alors $a = 0$

$\sim a = 1 \Rightarrow \sim\sim a = \sim 1 \overset{(1)}{=} 0$

$\Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a = 0$

Car $(4) \quad a \leq \sim\sim a = 0$

(9) $a \wedge \sim a = 0$

$a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$............ (14)

$a \wedge \sim a = a \wedge (a \rightarrow b) \leq 0$

$a \wedge a^{*} = 0 \qquad (a^{*} = \sim a)$

(10) $\sim a = \sim\sim\sim a$

$a \leq \sim\sim a \Rightarrow \sim\sim\sim \leq \sim a$........ (4)

$\sim a \leq \sim\sim a$............. (4) et (6)

(11) $\sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

(17) ...Treillis de Heyting

$(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \leq a \vee b \rightarrow c$

$c = 0$.... $(a \rightarrow 0) \wedge (b \rightarrow 0) \leq a \vee b \rightarrow 0$

$\sim a \wedge \sim b \leq \sim (a \vee b)$ .... (1)

$$\begin{cases} a \leq a \vee b \\ b \leq a \vee b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sim (a \vee b) \leq \sim a \\ \sim (a \vee b) \leq \sim b \end{cases}$$

$\sim (a \vee b) \leq \sim a \wedge \sim b$........ (2)

De (1)et$(2) \Rightarrow (10)$

4.4 Exemples d'applications

Exemple 4.3 *(treillis non distributif)*

— Les treillis M_3 et N_5 sont non distributifs.

Exemple 4.4 *(treillis pseudo complémenté)*

— Une algèbre de Boole est un treillis pseudo-complémenté avec x^* est le complément de x , $\forall x \in B$

Exemple 4.5 *(d'algèbre de Heyting)*

— Toute algèbre de Boole, muni de l'opération binaire $\rightarrow$:

$b \rightarrow a = \neg b \vee a$, est une algèbre de Heyting.

— Tout ensemble totalement ordonné fermé est une algèbre de Heyting, où :

$$p \rightarrow q = \begin{cases} q \text{ , si } p > q, \\ 1\text{, sinon.} \end{cases}$$

— Il existe des 'algèbres de Heyting qui ne sont pas des algèbres de Boole.
On peut par exemple prendre la chaine : $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ avec $\rightarrow$ définie comme ci-dessus, ce qui donne les opérations :

$a \wedge b$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

,

$a \vee b$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

,

$a \rightarrow b$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	0	1	1
1	0	1/2	1

.

Chapitre 5

Aperçu sur les systèmes déductifs

Treillis de Heyting Le but de ce chapitre est de mettre en évidence un certain nombre de propriétés des algèbres des logiques faibles pour aboutir, a un théorème de représentation pour les treillis de Heyting.

5.1 Préliminaires sur les filtres

Définition 5.1 *Dans un treillis quelconque T, un filtre F est dit :*

(a) **Premier** si : pour tout $a, b \in T$, $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ou $b \in F$

(b) **Irréductible** si : F est propre et s'il n'existe pas de filtres propres F_1, et F_2, tels que $F = F_1 \cap F_2$, avec $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$.

Proposition 5.1 *Dans un treillis quelconque tout filtre premier est irréductible.*

Démonstration :

Soit F un filtre premier

Supposons qu'il existe 2 filtres propres F_1 et F_2 tels que

$F = F_1 \cap F_2$ avec $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$

$F_1 \neq F$, alors il existe $a \in F_1$ et $a \notin F$

$F_2 \neq F$, alors il existe $b \in F_2$ et $b \notin F$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq a \vee b \text{ et } a \in F_1 \Rightarrow a \vee b \in F_1 \\ b \leq a \vee b \text{ et } b \in F_2 \Rightarrow a \vee b \in F_2 \end{array} \right. \Rightarrow a \vee b \in F_1 \cap F_2 = F$$

On a donc $a \vee b \in F$ avec $a \notin F$ et $b \notin F$. Ce qui contredit le fait que F soit premier.

F est donc irréductible.

Proposition 5.2 *Dans un treillis distributif T tout filtre irréductible est premier.*

Démonstration :

-Soit F filtre irréductible et supposons qu'il existe $a, b \in T$ vérifiant $a \vee b \in F$ avec $a \notin F$ et $b \notin F$.

Pour cela posons $F_1 = \{x \in T \ / \text{ il existe } y \in F \text{ tel que } a \wedge y \leq x\}$, et

$F_2 = \{x \in T \ / \text{ il existe } y \in F \text{ tel que } b \wedge y \leq x\}$

$F_1 \neq \emptyset$ car $a \wedge (a \vee b) = a \Rightarrow a \in F_1$

$F_2 \neq \emptyset$ car $b \wedge (a \vee b) = b \Rightarrow b \in F_2$

On'a $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$ car $(a \in F_1$ et $a \notin F)$ et $(b \in F_2$ et $b \notin F)$.

-Montrons que F_1 est un filtre propre

$x \in F_1$ et $x \leq z \Rightarrow$ il existe $y \in F$ tel que $a \wedge y \leq x \leq z \Rightarrow$ il existe $y \in F$ tel que $a \wedge y \leq z \Rightarrow z \in F_1$

$x \in F_1$ et $z \in F_1 \rightarrow$ il existe y et y_1 dans F tel que :

$a \wedge y \leq x$ et $a \wedge y_1 \leq z \Rightarrow a \wedge (y \wedge y_1) \leq x \wedge z$

Comme $y \wedge y_1 \in F$ on a : $x \wedge z \in F_1$

F_1 est donc un filtre propre car $b \notin F_1$.car s'il existe $y \in F$ tel que $a \wedge y \leq b$ on a :

$b \vee (a \wedge y) \leq (a \vee b) \wedge b \Rightarrow (a \vee b) \leq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow b \in F$(contradiction)

-De la même façon on montre que F_2 est un filtre propre.

Il est évident $a \vee b \in F_1$ et $a \vee b \in F_2$.

Etablissant à présent que $F = F_1 \cap F_2$

$x \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x \in F_1$ et $x \in F_2 \Rightarrow$il existe $y_1 \in F$ et $y_2 \in F$ tel que $a \wedge y_1 \leq x$ et $b \wedge y_2 \leq x$

$a \wedge y_1 \leq x$ et $b \wedge y_2 \leq x \Rightarrow (a \wedge y_1) \vee (b \wedge y_2) \leq x$

$(a \vee b) \wedge [(y_1 \vee b) \wedge ((a \wedge y_2) \vee y_1)] \leq x \Rightarrow (a \vee b) \wedge z \leq x$

$y \leq y \vee b$ et $y \in F \Rightarrow y \vee b \in F$

$y_1 \leq a \wedge y) \vee y_1$ et $y_1 \in F \Rightarrow (a \wedge y) \vee y_1 \in F,$

$z = (y \vee b) \wedge ((a \wedge y) \vee y_1) \in F.$

-Il vient que $t = (a \vee b) \wedge z \in F$

$t \leq x$ et $t \in F \Rightarrow x \in F$, donc $F_1 \cap F_2 \subseteq F$,

$x \in F \Rightarrow a \wedge x \leq x$ et $b \wedge x \leq x \Rightarrow x \in F_1$et $x \in F_2$,

alors $x \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow F \subseteq F_1 \cap F_2$

-Il vient donc que $F = F_1 \cap F_2$ avec $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$

Ce qui contredit l'irréductibilité de F.

F est donc premier.

5.2 Etude des systèmes déductifs dans des algèbres

implicatives positives

Dans toute cette partie on considère une algèbre implicative positive $(A, \rightarrow, 1)$. Et on donne les définitions suivantes :

Définition 5.2 *Un système déductif est toute partie D de A vérifiant :*

$$\begin{cases} 1 \in D; \\ \textit{Si } b \in D \textit{ et } b \rightarrow c \in D, \textit{ alors } c \in D, \ (\textit{règle de modus ponens}). \end{cases}$$

1. *Un système déductif est dit propre si $D \neq A$.*
2. *Un système déductif est dit irréductible si D est propre et s'il n'existe pas de systèmes déductifs propres D_1et D_2, tel que $D = D_1 \cap D_2$, avec $D \neq D_1$ et $D \neq D_2$.*

Proposition 5.3 *Soit D un système déductif propre, pour tout $a \in D$ il existe un système déductif irréductible D^* tel que $D \subset D^*$ et $a \notin D^*$.*

Démonstration :

Soit D la famille des systèmes déductifs propres D' tels que $D \subseteq D'$ et $a \notin D'$

$D \neq \emptyset$ car $D \in$

Soit $(D'_i)_{i \in I}$ une chaine. posons $D'_0 = \underset{i \in I}{\cup} D'_i$

D'_0 est un système déductif propre. En effet :

$1 \in D'_i$ pour tout $i \Rightarrow 1 \in \cup D'_i = D'_0$

$b \in D'_0$ et $b \rightarrow c \in D'_0 \Rightarrow$ il existe i, j tels que $b \in D'_i$ et $b \rightarrow c \in D'_j$

Comme $(D'_i)_i$ est une chaine, D'_i et D'_j sont comparables. supposons $D'_i \subseteq D'_j$ on a donc :

$b \in D'_j$ et $b \to c \in D'_j \Rightarrow c \in D'_j$ (modus ponens) $\Rightarrow c \in \underset{i\in I}{\cup} D'_i = D'_0$

$a \notin D'_i$ pour tout $i \Rightarrow a \notin D'_0 = \underset{i\in I}{\cup} D'_i$

D'_0 est un système déductif propre

D'_0 est donc un majorant de $(D'_i)_i$, D est donc un ensemble inductif. Il est donc un élément maximal D^*, tel que $D \subset D^*$ et $a \notin D^*$.

La maximalité de D^* montre que D^* est irréductible.

Proposition 5.4 *Soient $a \in A$ et D un système déductif, l'ensemble noté $\langle D, a\rangle$ défini par $\langle D, a\rangle = \{x \in A / a \to x \in A\}$*

est le plus petit système déductif contenant D et a

Démonstration :

$a \to a = 1 \in D \Rightarrow a \in \langle D, a\rangle$

Pour tout $x \in D$ on a :

$x \to (a \to x) = 1 \in D$

$x \to (a \to x) \in D$ et $x \in D \Rightarrow a \to x \in D \Rightarrow x \in \langle D, a\rangle \Rightarrow \langle D, a\rangle \supseteq D$

$\langle D, a\rangle$ est un système déductif. En effet :

$a \to 1 = 1 \in D \Rightarrow 1 \in \langle D, a\rangle$

$b \in \langle D, a\rangle$ et $b \to c \in \langle D, a\rangle \Rightarrow a \to b \in D$ et $a \to (b \to c) \in D$

of P_2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in D$

mp $(a \to b) \to (a \to c) \in D$

Comme $a \to b \in D$ il vient que $a \to c \in D$

D'ou $c \in \langle D, a\rangle$

$\langle D, a\rangle$ est donc un système déductif contenant D et a

Soit D_1 un autre système déductif contenant D et a

$x \in \langle D, a\rangle \Rightarrow a \to x \in D \subset D_1 \Rightarrow a \to x \in D_1$

$a \in D_1$et $a \to x \in D_1 \Rightarrow x \in D_1$ D'ou $\langle D, a\rangle \subseteq D_1$

$\langle D, a\rangle$ est par conséquent le plus petit système déductif contenant D et a.

Proposition 5.5 **(1)** *Pour tout $a \in A$, l'ensemble $D(a) = \{x \in A \ / \ a \leq x\}$ est le plus petit système déductif contenant a*

(2) *Si a et b sont deux éléments de A tels que $a \nleq b$ il existe un système déductif irréductible D tel que $a \in D$ et $b \notin D$*

Démonstration :

(1) $a \leq a \Rightarrow a \in D(a)$

$a \leq 1 \Rightarrow 1 \in D(a)$

$D(a) = \langle \{1\}, a \rangle$

$b \in D(a)$ et $b \to c \in D(a) \Rightarrow a \leq b$ et $a \leq b \to c$

$\Rightarrow a \leq b \wedge (b \to c) \leq c \Rightarrow a \leq c \Rightarrow c \in D(a)$

$D(a)$ est donc un système déductif contenant a

Soit D_2 un autre système déductif contenant a

$x \in D(a) \Rightarrow a \leq x \Rightarrow a \to x = 1 \Rightarrow a \to x \in D_2$

$a \in D_2$ et $a \to x \in D_2 \Rightarrow x \in D_2 \Rightarrow x \in D_2 \Rightarrow D(a) \subseteq D_2$

$D(a)$ est donc le plus petit système déductif contenant a

(2) Soit $(D_i)_{i \in I}$ la famille des systèmes déductifs contenant $D(a)$ et ne contenant pas b.

On montre comme dans (1) que cette famille est inductive et admet par conséquent un élément maximal D

D est irréductible car $D = D_1 \cap D_2$ implique :

$D(a) \subseteq D_1, D(a) \subseteq D_2$ et $(b \notin D_1$ ou $b \notin D_2)$ Ce qui compte tenu de la maximalité de D conduit à $D = D_1$ ou $D = D_2$.

Proposition 5.6 *(1) L'ensemble X des systèmes déductifs irréductibles n'est pas vide.*

(2) L'application σ de A dans $P(X)$ par :

$$\sigma(a) = \{D \in X / a \in D\} \tag{5.1}$$

vérifier $a \leq b \Leftrightarrow \sigma(a) \subset \sigma(b)$

Démonstration :

(1) Soit X l'ensemble des systèmes déductifs irréductibles. X n'est pas vide car il contient au moins A

Si $A = \{1\} \Rightarrow \{1\}$ est irréductible

$A \neq \{1\} \Rightarrow$ il existe $a \neq 1$ et D^* système déductif irréductible et $a \notin D^*$

(2) Soit $\sigma : A \to \wp(X)$ définie par

$$\sigma(a) = \{D \in X / a \in D\} \tag{5.2}$$

Montrons que $a \leq b \Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq \sigma(b)$

$a \leq b \Rightarrow a \to b = 1$

$D \in \sigma(a) \Rightarrow a \in D$ et $a \to b \to= 1 \in D \Rightarrow b \in D \Rightarrow D \in \sigma(a)$

$\Rightarrow \sigma(a) \subseteq \sigma(b)$

$\sigma(a) \subset \sigma(b) \Rightarrow D \in \sigma(a) \Rightarrow D \in \sigma(b) \Rightarrow (a \in D \Rightarrow b \in D)$

Pour tout D de $\sigma(a)$

Il vient donc que $b \in \bigcap_{a \in D \in X} D = D(a)$

$b \in D(a) \Rightarrow a \leq b$

Ainsi $a \leq b \Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq \sigma(b)$.

L'application σ est injective

Démonstration :

$\sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow \sigma(a) \subseteq \sigma(b)$ et $\sigma(b) \subseteq \sigma(a) \Rightarrow a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a = b$

5.3 Théorème de représentation pour les treillis de Heyting

Soit $(A, \wedge, \vee, \to, 1)$ un treillis de Heyting

Remarque 5.1 *Pour tout espace topologique X, le treillis des ouverts de X est un treillis de Heyting avec $M \to N = (\overset{\circ}{\widehat{N \cup CM}})$, $1 = X$.*

Proposition 5.7 *Dans un treillis de Heyting, on a l'équivalence suivante :*

$$\begin{cases} D \text{ est un système déductif.} \\ D \text{ est un filtre.} \end{cases}$$

Démonstration :

1. Soit D un système déductif, montrons que D est un filtre

(i) $a \in D$ et $a \leq b \Rightarrow b \in D$? on'a $a \in D$ et $a \rightarrow b = 1 \in D \overset{\text{cf mp}}{\Rightarrow} b \in D$

(ii) Soit $a \in D$ et $b \in D$

D'aprés une propriétie des treillis de Heyting, on a :

$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow a) \leq a \rightarrow (b \wedge a)$

$(a \rightarrow b) \wedge 1 \leq a \rightarrow (a \wedge b)$

$a \rightarrow b \leq a \rightarrow (a \wedge b)$

$a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge b)$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a \wedge b) = 1 \in D$

$(a \rightarrow b) \rightarrow a \wedge b \in D$ cf mp $(a \in D)$ ... (1)

$b \rightarrow (a \rightarrow b) = 1 \in D$ et $b \in D \Rightarrow a \rightarrow b \in D$...$(2)$

De (1) et (2) : $a \wedge b \in D$

D est donc un filtre

2. Soit D un filtre de D, on a : $1 \in D$

$a \in D$ et $a \rightarrow b \in D \Rightarrow a \wedge (a \rightarrow b) \in D$

Comme $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$, on a : $b \in D$

D est donc un système déductif

D'ou D est un système déductif $\Leftrightarrow$ D est un filtre.

L'application σ de A dans $P(X)$ définie par :

$$\sigma(a) = \{D \in X \diagup a \in D\}. \tag{5.3}$$

est un morphisme de treillis.

Démonstration :

Montrons que $\sigma(a \vee b) = \sigma(a) \cup \sigma(b)$ et $\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \cap \sigma(b)$

$$\begin{aligned}
\sigma(a \vee b) &= \{D \in X/a \vee b \in D\} \\
&= \{D \in X/a \in D \text{ ou } b \in D\} \\
&= \{D \in X/a \in D\} \cup \{D \in X/b \in D\} \\
&= \sigma(a) \cup \sigma(b)
\end{aligned}$$

D'ou :

$$\sigma(a \vee b) = \sigma(a) \cup \sigma(b) . \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(a \wedge b) &= \{D \in X / a \wedge b \in D\} \\
&= \{D \in X / a \in D \text{ et } b \in D\} \\
&= \{D \in X / a \in D\} \cap \{D \in X / b \in D\} \\
&= \sigma(a) \cap \sigma(b)
\end{aligned}$$

D'ou :

$$\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \cap \sigma(b) . \tag{5.5}$$

(1) On peut définir une topologie sur X (l'ensemble des systèmes déductifs irréductibles) en prenant comme ouverts la partie vide et toutes les réunions de parties de la forme $\sigma(a)$

(2) X est alors séparé au sens de Kolmogorov, c'est-à-dire : si D_1 et D_2sont deux systèmes déductifs irréductibles différents alors il existe un voisinage de l'un ne contenant pas l'autre.

Démonstration :

(1) Soit ζ la famille de toutes les réunions de parties de la forme $\sigma(a)$

-$\emptyset \in \zeta$

- $\sigma(1) = \{D \in X/1 \in D\} = X \Rightarrow X \in \zeta$

-Soit $(\cup \sigma(a_{ij}))_{i \in I}$ une famille d'éléments de ζ

$$\underset{j}{\cup} (\cup \sigma(a_{ij}))_{i \in I} = \underset{ij}{\cup} \sigma(a_{ij}) \in \zeta \tag{5.6}$$

-Il suffit que l'intersection de deux éléments de ζ est un éléments de ζ car on pourra en déduire que toute intersection finie d'éléments de ζ appartient à ζ.

$$(\cup \sigma(a_i))_{i \in I} \underset{j}{\cap} (\cup \sigma(b_j)) = \underset{ij}{\cup} (\sigma(a_i))_{i \in I} \cap (\sigma(b_j)) = \underset{ij}{\cup} \sigma(a_i \wedge b_j) \in \zeta \tag{5.7}$$

X est donc un espace topologique.

(2) $D_1 \neq D_2 \Rightarrow$il existe $a \in D_1$ et $a \notin D_2$

Il suffit de prendre le voisinage $\sigma(a)$ de D_1.On a bien $\sigma(a)$est un voisinage de D_1 et $D_2 \notin \sigma(a)$.

Proposition 5.8 (*Théorème de représentation*)

σ est un monomorphisme de treillis de Heyting de A dans le treillis des ouverts de X

Il suffit de montrer que :

$$\sigma\,(a \to b) = \sigma\,(a) \to \sigma\,(b) \tag{5.8}$$

$\sigma\,(a) \to \sigma\,(b) = Int\,[\sigma\,(b) \cup C\sigma\,(a)]$

-$D \in \sigma\,(a \to b) \Rightarrow a \to b \in D$

On a :

$a \in D$ ou $a \notin D \Rightarrow b \in D$ ou $a \notin D \Rightarrow D \in \sigma\,(b)$ ou $D \notin \sigma\,(a)$

$\Rightarrow D \in \sigma\,(a) \cup C\sigma\,(b) \Rightarrow \sigma(a \to b) \subseteq \sigma\,(b) \cup C\sigma\,(a)$

Comme $\sigma\,(a \to b)$ est un ouvert on a :

$$\sigma\,(a \to b) \subseteq Int\,(\sigma\,(b) \cup C\sigma\,(a)) = \sigma\,(a) \to \sigma\,(b) \tag{5.9}$$

$\Rightarrow \sigma\,(a \to b) \subseteq \sigma\,(a) \to \sigma\,(b)\,.$

Bibliographie

[1] A. AMROUNE et B. DAVVAZ, *Fuzzy ordered sets and duality for finite fuzzy distributive lattice*, Iranian journal of fuzzy systems Vol. 8, No. 5, (2011) pp. 1-12.

[2] B. A. DAVEY et H. A. PERIESTLEY, *Introduction to Lattices and order*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] BERNARD KOLMAN, ROBERT C. BUSBY et SHARON CULTER ROSS, *Discrete Mathematical Structures*, Fourth edition, Pearson education, 2001.

[4] DANIEL PONASSE et J. C. CARREGA, *Algèbre et Toboologie boléennes*, Masson, Paris, 1979.

[5] FRANCOIS ARNAULT, *Mathématique L3 Algèbre*, Pearson education, 2009.

[6] G. GRATZER, *General lattice theory*, Academic Press, INC, 1978.

[7] GARRETT BIRKHOFF, *Lattice theory*, American Mathematical Society, 1948.

[8] HIROKI TAKAMURA, *Semisimplicity, Amalgamation Property and Finite Embeddability Property of Residuated Lattices*, submitted.

[9] INHEUNG CHON, *Fuzzy Partial Order Relation and Fuzzy Lattice*, Korean J. Math. 17 (2009), No. 4, pp. 361-374.

[10] INHEUNG CHON, *Fuzzy Lattices as Fuzzy Relation*, Korean J. Math. 23 (2015), No. 4, pp. 557-569.

[11] IVAN MEZZOMO, B. C. BERDREGAL et R. H. N. SANTIAGO, *Kinds of ideals of fuzzy lattice*, Second Brasilian Congress on Fuzzy Systems, 2012, 657-671.

[12] IVAN MEZZOMO, *On Fuzzy Ideals and Fuzzy Filters of Fuzzy Lattices*, Phd thesis, Natal/RN, December 2013.

[13] IVAN MEZZOMO et BENJAMIN BEDREGAL, *Operations on Bounded Fuzzy Lattices*, IFSA World congress and NAFIPS Annual Meeting, 2013 joint, 151-156.

[14] IVAN MEZZOMO et BENJAMIN BEDREGAL, *α-Ideals of Fuzzy Lattices*, IFSA World congress and NAFIPS Annual Meeting, 2013 joint, 157-162.

[15] JACQUES VÉLU, *Méthodes Mathématiques pour l'informatique*, 5 édition, DUNOD Paris, 2013.

[16] JEAN-LOUIS KRIVINE, *Logique Mathématique*, Masson Paris, 1993.

[17] JUDITE CHAUVIN, *Le Treillis Cambrian*, Université du Québec à Montréal, Août 2010.

[18] KENNETH A ROOS, *Discrete Mathematics*, Third edition, Englewood cliffs, New Jersey 1992.

[19] KENNETH H ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, Seventh edition, Mcgra-Whill, 2012.

[20] LOUIS FRÉCON, *Éléments de Mathématiques discrètes*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[21] MAURICE POUZET, *Théorie de l'ordre : une introduction*, Août 2004.

[22] MICHEL MARCHAND, *Outils Mathématiques pour l'informatique*, 2ème édition, DBS Sciences.

[23] MR BALHADJ Abdelaziz, *Génération de Treillis et propriétés algébriques* Mémoire de Magistère, Université : Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 03/11/2011.

[24] NATHALIE CASPARD, *Ensembles Ordonnes finis : concepts, résultats*, Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[25] RAJAB ALI BORZOOEI, *Fundamental residuated Lattices*, Quasigroups and Related Systems 22, 2014, 179-192.

[26] RALUCA CRETAN et ANTOANETA JEFLEA, *On the lattice of congruence filters of a residuated lattice*, Annals of University of Craiova, Math. Sci. Ser. Volume 33, 2006, 174-188.

[27] SEYMOUR LIPSCHUTZ, *Discrete Mathematics*, Third edition, Mcgra-Whill, 2007.

[28] STEVEN ROMAN, *Lattices and Ordred Sets*, Springer, 2008.