University de Msila
Faculté M.I
Département des Mathématqiues

TD2_Treillis et ordre

Exercice1.

1. Soit A un ensemble et P l'ensemble de tous ordres sur A. Pour $\rho, \sigma \in P$,

on définit $\rho \leq \sigma$ si $a\rho b$ implique $a\sigma b$ (pour tout $a, b \in A$). Montrer que $(P, \leq)$ Est un ensemble ordonné.

2. Trouvez un exemple d'un ordre dans lequel inf $\varnothing$ n'existe pas.

3. Soit T un ensemble non vide. Prouver ce qui suit :

a) Le plus petit ordre partiel sur T est l'égalité.

b) Les ordres partiels maximaux sur T sont les ordres totaux.

Exercice 2.

On considère un treillis L distributif et fermé (avec 0 et 1). On désigne par $C(L)$ le sous treillis booléen des éléments complémentés (ou chrysippiens) de L, si $x \in C(L)$ on note x' son complément.

1°/ Soit a un élément fixé de L, on définit la relation binaire dans L, notée $x \equiv y\,(a)$, par : $a \wedge x = a \wedge y$.

Montrer que c'est une relation d'équivalence compatible avec les lois $\wedge$ et $\vee$. On pourra définir le treillis quotient qui sera noté par $L\diagup a$.

2°/ On fixe maintenant $a \in C(L)$, pour tout élément x de L on notera $\bar{x}$ sa classe dans $L\diagup a$ et $\tilde{x}$ sa classe dans $L\diagup \grave{a}$.

Montrer que l'application θ définie par $\theta(x) = (\bar{x}, \tilde{x})$ est un isomorphisme du treillis L sur le treillis produit $L\diagup a \times L\diagup \grave{a}$.

Exercice 3. Les tables dites tables de Cayley définissent deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ sur l'ensemble $L = \{a, b, c, d, e, f\}$ de telle sorte que $(L, \wedge, \vee)$ est un treillis.

$\wedge$	a	b	c	d	e	f
a	a	f	c	a	a	f
b	f	b	c	b	b	f
c	c	c	c	c	c	c
d	a	b	c	d	e	f
e	a	b	c	e	e	f
f	f	f	c	f	f	f

$\vee$	a	b	c	d	e	f
a	a	e	a	d	e	a
b	e	b	b	d	e	b
c	a	b	c	d	e	f
d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	d	e	e
f	a	b	f	d	e	f

a). Donner le diagramme de Hasse pour L. Montrer que: **i).**$[(a \vee b) \wedge (a \vee c)] \vee [(a \vee b) \wedge (b \vee c)] = a \vee b$. **ii).** Est ce que ce résultat est valable pour tout treillis L et pour tous les $a, b, c \in L$? Montrer.

b). i). Montrer que L un treillis distributif. **ii).** Monter que $a \wedge b = a \wedge c$ et $a \vee b = a \vee c$. Alors $b = c$.

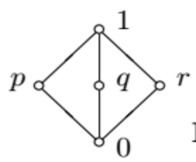
c). Déterminer tous les filtres de L. Préciser le nombre d'ultrafiltres

d).

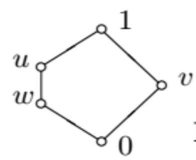
Exercice 4.

Un filtre F d'un treillis L est dit distributif s'il satisfait
$(\forall a, b, c \in L)\ a \vee b, a \vee c \in G \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \in G$.

(i) Trouver tous les filtres distributifs de $\mathbf{N_5}$(the pentagon) et $\mathbf{M_3}$(the diamond).



$\mathbf{M}_3$



$\mathbf{N}_5$

(ii) Démontrer que L est distributif si et seulement si chaque filtre de L est distributif.

(iii) Soit L un treillis et F un filtre dans L. Démontrer l'équivalence de :

(a) F est un filtre distributif;

(b) chaque idéal I qui est un élément maximal de l'ensemble $\{K \in I(L) | K \cap F = \emptyset\}$ est un idéal premier;

(c) si F est une intersection de filtres premiers, c'est-à-dire $F = \bigcap_{i \in I} Fi$ pour une famille $\{F_i\}_{i \in I}$ de filtres principaux.