Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Ordre et treillis_Avril 2020

Exercice 1 Montrer que dans une algèbre de Boole B on a les identités suivantes:

i) $\rceil 1 = 0, \rceil 0 = 1;$

ii) $\forall a \in B, \rceil\rceil a = a$

iii) $\forall a, b \in B : \rceil (a \vee b) = \rceil a \wedge \rceil b$ et $\rceil (a \wedge b) = \rceil a \vee \rceil b$

iv) $\forall a, b \in B, a \wedge b = \rceil (\rceil a \vee \rceil b)$ et $a \vee b = \rceil (\rceil a \wedge \rceil b)$

v) $\forall a, b \in B : a \wedge \rceil b = 0 \Longleftrightarrow a \leq b$ ou $a \leq b \overset{def}{=} a \vee b = b \Longleftrightarrow a \wedge b = a.$

Exercice 2 Soit S un ensemble ordonné. Montrer que $\sup \varnothing = \min S$ et $\inf \varnothing =$ maximum S. En particulier, le $\sup \varnothing$ existe si et seulement si S a le plus petit élément; de la même façon, l'$\inf \varnothing$ existe si et seulement si S a le plus grand élément.

Exercice 3 Soit $(B, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Boole, où $|B| \geq 2$. On définit deux nouveau opérations binaires $+$ et $\cdot$ sur B, par: $a + b = (a \wedge b\prime) \vee (a\prime \wedge b)$ et $a \cdot b = a \wedge b$, respectivement. Montrer que $(B, +, \cdot)$ est un anneau commutatif avec unité, dans lequel $a^2 = a$ pour tous les $a \in B$. Réciproquement, soit $(R, +, \cdot)$ un anneau de Boole. On définit deux opérations binaires nouvelles $\wedge$ et $\vee$ sur R, par: $a \wedge b = a \cdot b$ et $a \vee b = a + b + a \cdot b$. Montrer que $(R, \wedge, \vee)$ est une algèbre de Boole.

Exercice 4

1. Si a et b sont des éléments d'une algèbre de Boole B, de telle sorte que $(a \vee b\prime) \wedge (a\prime \vee b) = 1_B$,

montrer que $a = b$.

2. Soient a, b, et c des éléments d'une algèbre de Boole. Montrer que

$(a \wedge b) \vee (a\prime \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a\prime \wedge c)$.

3. Montrer que isomorphisme booléenne $\backsimeq$ est une relation d'équivalence sur chaque ensemble d'algèbres de Boole.

4. Soit $f : B \to C$ un isomorphisme booléen. Montrer que si a est un atome de B, alors

$f(a)$ est un atome de C.

Exercice 5 Soit $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ l'ensemble de tous les entiers positifs diviseurs de 30.

(a) Montrer que $(B, pgcd, ppcm)$ est une algèbre de Boole.

(b) Trouver une formule pour savoir comment calculer le complément d'un 'd'un élément $a \in B$.

Soit n un entier positif et B l'ensemble des diviseurs positifs de n.

(c) Montrer que (B, pgcd, ppcm) est une algèbre de Boole, si et seulement si n n'a pas de diviseur de la forme p^2, où p est un nombre premier. Quels sont les atomes de B?