Université de Msila,
Faculté M.I
Département des Mathématiques

Ordre & treillis, Série N° $= 4$

Exercice 1

Soit L, M deux treillis et φ un morphisme de L dans M. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

(i) φ est un isomorphisme d'ordre.

(ii) φ est un isomorphisme de treillis.

Exercice 2

On considère une algèbre de Boole $\mathbb{B}$.

(I) Résoudre dans $\mathbb{B}$ l'équation $ax^2 + b = 0$.

(II) Désignons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de l'entier n.

a- Expliciter $D(210)$ et dire pourquoi il s'agit ici dune algèbre de Boole.

b- En déduire les solutions éventuelles de l'équation $21x + 7 = 0$.

Exercice 4

I. Soit $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ l'ensemble de tous les entiers positifs diviseurs de 30.

1. Montrer que $(B,\ pgcd,\ ppcm)$ est une algèbre de Boole.

2. Trouver une formule pour calculer le complément d'un élément $a \in B$.

II. Soit n un entier positif et B l'ensemble des diviseurs positifs de n.

1. Montrer que $(B, pgcd, ppcm)$ est une algèbre de Boole, si et seulement si n n'a pas de diviseur de la forme p^2, où p est un nombre premier.
2. Quels sont les atomes de B?

Exercice 5

Dans une algèbre booléenne A on considère le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ux + vy = w \end{cases} \quad (a, b, c, u, v, w \text{ sont des éléments fixés de } A).$$

On pose $\triangle = av + bu$ (déterminant du système).

Montrer que si $\triangle = 1$, le système (1) admet une solution unique (x, y) que l'on calculera.

Exercice 6

Soient A une algèbre booléenne et a, b deux éléments fixés de A. On considère l'équation dans A :

$$ax + b = 0 \qquad\qquad (1).$$

a) Montrer que l'équation (1) a des solutions si et seulement si $b < a$.

b) Si $b < a$, montrer qu'on a aussi $b < a + b + 1$ et que toutes les solutions de (1) sont données par : $b < x < a + b + 1$. Dans quel cas l'équation (1) admet-elle une solution unique ?

c) Dans $D(210)$ résoudre les équations :

$$\begin{aligned} 105x + 5 &= 0 \\ 21x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 7

Soit $\mathbf{B}$ une algèbre de Boole et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{B}$.

1. Montrer que tout anneau booléen est un treillis de Boole en définissant les opérations : ($x \wedge y = x \cdot y$ & $x \vee y = x + y + x \cdot y$).

2. Montrer que dans $\mathbf{B}$ la relation d'ordre $x \leq y$ peut être exprimée de plusieurs façons équivalentes :

   par $x \cdot y = x$, par $x \vee y = y$, par $x\prime \vee y = 1$, et par $x \cdot y\prime = 0$.

3. Nous savons que dans $\mathbf{B}$, la relation d'ordre est compatible avec les opérations $\cdot$ et $\vee$. Mais il n'en est pas de même pour l'addition, donner des exemples.

4. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{B}$. Montrer que tout élément x de $[a, b]$ possède un complément relatif et un seul dans $[a, b]$. Le calculé.