Correction série d'exercices N°05.
Algèbre 1

Exercice 01 :

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P(X) = X^4 - 1, \quad Q(X) = X^2 - 1$$

☞ Déterminer le $\mathbf{ppcm(P,Q)}$.

2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$H(X) = X^2 - iX, \quad K(X) = X^2 + 1$$

☞ Déterminer le $\mathbf{ppcm(H,K)}$.

Correction exercice 1 :

1. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$:

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4 - 1 = \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 + 1\right) = (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right), \\ Q(X) &= X^2 - 1 = (X-1)(X+1). \end{aligned}$$

☞ Déterminer le $\mathbf{ppcm(P,Q)}$.

$$\mathbf{ppcm(P,Q)} = (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right).$$

2. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $H(X)$ et $K(X)$:

$$\begin{aligned} H(X) &= X^2 - iX = X(X-i) \\ K(X) &= X^2 + 1 = (X-i)(X+i). \end{aligned}$$

☞ Déterminer le $\mathbf{ppcm(H,K)}$.

$$\mathbf{ppcm(H,K)} = X(X-i)(X+i)$$

Exercice 02 :

Déterminer les $\mathbf{pgcd(P,Q)}$ suivants :

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$,
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$. (*)

Correction exercice 2 :

Pour trouver $\mathbf{pgcd(P,Q)}$ nous utilisons la division euclidienne entre P et Q. Le tableau suivant montre le dividende, le diviseur et le reste.

$P(X)$	$Q(X)$	$R(X)$
$X^4-3X^3+X^2+4$	X^3-3X^2+3X-2	$-2X^2+2X+4$
X^3-3X^2+3X-2	$-2X^2+2X+4$	$3X-6$
$-2X^2+2X+4$	$3X-6$	00

Donc, $\mathbf{pgcd(P,Q)} = 3X-6$

Exercice 03 :

Soit le polynôme $P(X)$ suivant :

$$P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$$

1. Montrer que le polynôme $P(X)$ admet trois racines dans $\mathbb{Z}$. Puis déterminer leurs valeurs.
2. Déduire la factorisation de $P(X)$.

Correction exercice 3 :

$$P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$$

1. Montrons que le polynôme $P(X)$ admet trois racines dans $\mathbb{Z}$. Puis déterminons leurs valeurs.
   On pose : $m \in \mathbb{Z}$, avec m est une racine de P.

$$\begin{aligned} P(m) = 0 &\Leftrightarrow m^3 + 2m^2 - m - 2 = 0, \\ &\Leftrightarrow m^3 + 2m^2 - m = 2, \\ &\Leftrightarrow m\left(m^2 + 2m - 1\right) = 2. \end{aligned}$$

   On a :

$$m/2 \Rightarrow m \in \mathcal{D}_2 = \{-1, -2, 1, 2\}.$$

   Alors,

$$P(-1) = P(-2) = P(1) = 0, \ et \ P(2) \neq 0.$$

   Finalement,

$$m \in \{-1, -2, 1\}$$

2. Déduire la factorisation de $P(X)$. Comme $-1, -2, 1$ sont trois racines de $P(x)$, on peut factoriser le polynôme b comme suit,

$$P(X) = (X+1)(X+2)(X-1).$$