Université Mohamed Boudiaf -M'sila-
Faculté de mathématiques et de l'informatique
Département de mathématiques
3ème année licence
Equation de la physique mathématique

TD 3: Méthode de séparation des variables.
Corrigé

Exercice 01

D'après le résultat du cours dans le cas des conditions aux limites du type Dérichlet avec $k = 17$ et $L = \pi$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(nx) e^{-17n^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{4}{\pi n}[-\cos(nx)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi n}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - (-1)^n).$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - (-1)^n) \sin(n\pi x/L) e^{-17n^2 t}$$

<u>**Explication**</u>

1) on cherche une solution de la forme

$$u(x,y) = X(x)T(t) \qquad (*)$$

substituant $(*)$ dans l'équation on obtient

$$T'X = 17TX'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{17T} = -\lambda, \ \lambda \in R$$

Alors les deux ODEs sont

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + 17\lambda T = 0 \end{cases}$$

En outre, on a :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \\ u(\pi,t) = 0 = X(\pi)T(t) \end{cases} \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$$

On obtient donc un problème à valeurs propres :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

En étudiant ce problème selon les valeurs de λ

<u>Cas 1</u> $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors la solution est donnée par

$$X(x) = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}$$

$$\begin{cases} X(0) = \alpha + \beta = 0 \\ X(\pi) = \alpha e^{\mu\pi} + \beta e^{-\mu\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha e^{\mu\pi} + \beta e^{-\mu\pi} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$
$$\Rightarrow X = 0$$
$$\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)}$$

<u>Cas 2</u> $\lambda = 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha x + \beta$

$$\begin{cases} X(0) = \beta = 0 \\ X(\pi) = \alpha\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$
$$\Rightarrow X = 0$$
$$\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)}$$

<u>Cas 3</u> $\lambda = \mu^2 > 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$

$$\begin{cases} X(0) = \alpha = 0 \\ X(\pi) = \beta\sin(\mu\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \sin(\mu\pi)) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu\pi = n\pi,\ n \in Z^* \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mu = n,\ n \in Z^*$$
$$\Rightarrow \mu = n,\ n \in N^* \text{ (car: } \sin(-x) = -\sin(x))$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2,\ n \in N^{\ *} \\ X_n(x) = \beta_n \sin(nx) \end{cases}$$

résolvant maintenant l'équation

$$T_n' + 17n^2 T_n = 0,\ n \in N$$

on trouve

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-17(n)^2 t},\ n \in N$$

d'où

$$u_n(x,t) = \beta_n \sin(nx)\gamma_n e^{-17(n)^2 t} = \delta_n \sin(nx) e^{-17n^2 t}$$

Par le principe de superposition, on obtient

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(nx) e^{-17n^2 t}$$

calculant δ_n, de la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(nx) e^{-17n^2 t}$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier impaire de la donnée initiale $f(x)$, où

$$\delta_n = \frac{2}{L}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(nx)dx = \frac{4}{\pi n}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - (-1)^n)$$

Exercice 02

1) on cherche une solution de la forme

$$u(x,y) = X(x)T(t) \qquad (*)$$

substituant $(*)$ dans (1) on obtient

$$T'X = kTX'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda,\ \lambda \in R$$

Alors les deux ODEs sont

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + k\lambda T = 0 \end{cases}$$

En outre, on a :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 = X'(0)T(t) \\ u_x(L,t) = 0 = X'(L)T(t) \end{cases} \Rightarrow X'(0) = X'(L) = 0$$

On obtient donc un problème à valeurs propres :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

En étudiant ce problème selon les valeurs de λ

<u>Cas 1</u> $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors la solution est donnée par

$$X(x) = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \mu(\alpha e^{\mu L} - \beta e^{-\mu L}) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \\ &\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)} \end{aligned}$$

<u>Cas 2</u> $\lambda = 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha x + \beta$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ X(x) = \beta \end{cases}$$

<u>Cas 3</u> $\lambda = \mu^2 > 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x),\ X'(x) = \mu(-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x))$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mu(\beta) = 0 \\ \mu(-\alpha\sin(\mu L)) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \sin(\mu L) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \mu L = n\pi,\ n \in Z^* \\ &\Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{L},\ n \in N^* \text{ (car: } \sin(-x) = -\sin(x)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2,\ n \in N \\ X_n(x) = \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) \end{cases}$$

résolvant maintenant l'équation

$$T_n' + k(\frac{n\pi}{L})^2 T_n = 0,\ n \in N$$

on trouve

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t},\ n \in N$$

d'où

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)\gamma_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} = \delta_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

Par le principe de superposition, on obtient

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} = \delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

calculant δ_n, de la condition initiale

$$u(x,0) = f(x) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier paire de la donnée initiale $f(x)$

2)

$$u(x,t) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \cos(nx) e^{-12(\frac{n\pi}{L})^2 t}$$

où

$$\begin{cases} \delta_0 = \frac{1}{L}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1+\sin^3 x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\sin(3x)+3\sin(x))dx = (\pi+4/3)/\pi \\ \delta_n = \frac{2}{L}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+\sin^3 x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-\sin(3x)+3\sin(x))\cos(nx)dx \\ \qquad = \dfrac{2(6(-1)^n+1)}{\pi(n^4-10n^2+9)} \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = \delta_0$

Exercice 03

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + hu, \ 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), \ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

où h est une constante réelle.

1) on cherche une solution de la forme

$$u(x,y) = X(x)T(t) \qquad (*)$$

substituant $(*)$ dans (1) on obtient

$$T'X = TX'' + hXT \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} - h = -\lambda, \ \lambda \in R$$

Alors les deux ODEs sont

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (\lambda - h)T = 0 \end{cases}$$

En outre, on a :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \\ u_x(\pi,t) = 0 = X'(\pi)T(t) \end{cases} \Rightarrow X(0) = X'(\pi) = 0$$

On obtient donc un problème à valeurs propres :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

En étudiant ce problème selon les valeurs de λ

<u>Cas 1</u> $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors la solution est donnée par

$$X(x) = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X(0) = \alpha + \beta = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \mu(\alpha e^{\mu\pi} - \beta e^{-\mu\pi}) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \\ &\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)} \end{aligned}$$

Cas 2 $\lambda = 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha x + \beta$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = \beta = 0 \\ X'(\pi) = \alpha = 0 \end{array} \right. \begin{array}{ll} \Rightarrow & \alpha = \beta = 0 \\ \Rightarrow & X = 0 \\ \Rightarrow & U = 0 \text{ (solution triviale)} \end{array}$$

Cas 3 $\lambda = \mu^2 > 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$, $X'(x) = \mu(-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x))$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \mu\beta\cos(\mu\pi) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \cos(\mu\pi) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mu\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2}\pi, \ n \in Z$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{2n+1}{2}, \ n \in N \text{ (car: } \cos(-x) = \cos(x))$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = (\frac{2n+1}{2})^2, \ n \in N \\ X_n(x) = \beta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x) \end{array} \right.$$

résolvant maintenant l'équation

$$T_n' + [(\frac{2n+1}{2})^2 - h]T_n = 0, \ n \in N$$

on trouve

$$T_n(t) = \gamma_n e^{[h-(\frac{2n+1}{2})^2]t}, \ n \in N$$

d'où

$$u_n(x,t) = \beta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x)\gamma_n e^{[h-(\frac{2n+1}{2})^2]t} = \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x)e^{[h-(\frac{2n+1}{2})^2]t}$$

Par le principe de superposition, on obtient

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x)e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x)e^{[h-(\frac{2n+1}{2})^2]t}$$

calculant δ_n, de la condition initiale

$$u(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}x)$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier impaire de la donnée initiale $f(x) = x(\pi - x)$, où

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(\frac{2n+1}{2}x)dx = \frac{2}{\pi(8n^3+12n^2+6n+1)}(-4\pi\cos(\pi n) - 8n\pi\cos(\pi n) + 16))$$

Exercice 04

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = x(2-x),\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) on cherche une solution de la forme

$$u(x,y) = X(x)T(t) \qquad (*)$$

substituant $(*)$ dans (1) on obtient

$$T'x = TX'' - XT \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 1 = -\lambda,\ \lambda \in R$$

Alors les deux ODEs sont

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (\lambda+1)T = 0 \end{cases}$$

En outre, on a :

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \\ u_x(1,t) = 0 = X'(1)T(t) \end{cases} \Rightarrow X(0) = X'(1) = 0$$

On obtient donc un problème à valeurs propres :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

En étudiant ce problème selon les valeurs de λ
<u>Cas 1</u> $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors la solution est donnée par

$$X(x) = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}$$

$$\begin{cases} X(0) = \alpha + \beta = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \mu(\alpha e^{\mu} - \beta e^{-\mu}) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$
$$\Rightarrow X = 0$$
$$\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)}$$

<u>Cas 2</u> $\lambda = 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha x + \beta$

$$\begin{cases} X(0) = \beta = 0 \\ X'(1) = \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$
$$\Rightarrow X = 0$$
$$\Rightarrow U = 0 \text{ (solution triviale)}$$

Cas 3 $\lambda = \mu^2 > 0$, alors la solution est donnée par $X(x) = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$, $X'(x) = \mu(-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x))$

$$\begin{cases} X(0) = \alpha = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \mu\beta\cos(\mu) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \cos(\mu) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mu = (2n+1)\frac{\pi}{2}\pi,\ n \in Z$$
$$\Rightarrow \mu = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in N \text{ (car: } \cos(-x) = \cos(x))$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_n = (\frac{2n+1}{2}\pi)^2,\ n \in N \\ X_n(x) = \beta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x) \end{cases}$$

résolvant maintenant l'équation

$$T_n' + [(\frac{2n+1}{2}\pi)^2 + 1]T_n = 0,\ n \in N$$

on trouve

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-[1+(\frac{2n+1}{2}\pi)^2]t},\ n \in N$$

d'où

$$u_n(x,t) = \beta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)\gamma_n e^{-[1+(\frac{2n+1}{2})^2]t} = \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)e^{-[1+(\frac{2n+1}{2}\pi)^2]t}$$

Par le principe de superposition, on obtient

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)e^{-[1+(\frac{2n+1}{2}\pi)^2]t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)e^{-[1+(\frac{2n+1}{2}\pi)^2]t}$$

calculant δ_n, de la condition initiale

$$u(x,0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n \sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier impaire de la donnée initiale $f(x) = x(\pi - x)$, où

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x(2-x)\sin(\frac{2n+1}{2}\pi x)dx = \frac{2}{\pi}(\cos(\pi(n+\frac{1}{2}))(\frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})} - \frac{2}{\pi^3(n+\frac{1}{2})^3}) + \frac{2}{\pi^3(n+\frac{1}{2})^3} - \frac{2\cos(\pi(n+\frac{1}{2}))}{\pi(n+\frac{1}{2})}$$