Exercices (Compléments)

Exercice 1 (méthode du simplexe)

On veut résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1) Construire une solution initiale admissible
2) Trouver la solution optimale par la méthode du simplexe.

Exercice 2

Soit le programme linéaire :

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 15 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \ge 1 \\ 4x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (P)$$

1) Mettre le programme linéaire sous forme canonique.
2) Mettre le programme linéaire sous forme standard.
3) Donner le dual (D) du programme linéaire (P).
4) Faire la résolution graphique du programme linéaire (P) pour déterminer sa solution optimale et sa valeur v(P).

Exercice 3 (non borne)

Résoudre par la méthode du simplexe les problèmes suivants :

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$
$$S.C \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 50 \\ x_1 + x_3 \le 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Exercice 4 (Problème)

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Min } Z = 8\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (P)$$

1) Ecrire le dual (D) de (P) . (On appellera y_1, y_2 les variables de (D))
2) Résoudre (D) par l'algorithme du simplexe.
3) A partir du dernier tableau du simplexe, déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Exprimer A^{-1} sous forme de produit de matrices de pivotage.
5) La solution $y_1 = 4$, $y_2 = 4$ est-elle une solution optimale de base de (D)? Justifier la réponse.
6) Montrer que : $\begin{cases} y_1 = 4\alpha + 2 \\ y_2 = -2\alpha + 5 \end{cases}$ où $0 \le \alpha \le 1$ Est solution optimale de (D).
7) Déduire les bases optimales ?
8) A partir du dernier tableau du simplexe, déduire la solution optimale de (P).
9) Le coefficient de x_1 dans la fonction objective est supposé β au lieu de 8. Pour quelles valeurs de β la base trouvée à la question (2) reste-elle optimale?