Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Première année informatique
Semestre 1

Département de l'informatique
Le :11 Janvier 2023
Durée : 1^h :30 min.

Examen final.
Algèbre 1

Exercice 01 :

1. Soient P, Q deux propositions.
   (a) À l'aide de la table de vérité, vérifier que :
   $$(\overline{P \wedge \overline{Q}}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$$
2. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.
3. Soient A, B deux parties non vide d'un ensemble E.
   (a) Trouver l'expression de la différence symétrique $A\Delta B$.
   (b) Déduire l'expression de la différence symétrique $A\Delta B$, pour $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 02 :
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$, puis trouver l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$.

Exercice 03 :

1. Soit $G = \mathbb{R}$, on définit sur G la loi de composition interne $*$ définie par :
   $$\forall x, y \in G,\ x * y = x + y - \frac{1}{2}.$$
   (a) Montrer que $*$ est une loi commutative.
   (b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. Soit,
   $$\begin{aligned} f :&(G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ &x \longmapsto f(x) = 2x - 1. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que f est homomorphisme de groupe.
   (b) L'application f est-elle bijective ? justifier.
   (c) Déduire un autre nom pour l'application f.

Exercice 04 : On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, qui s'écrit,
$$P(X) = X^3 + 2X^2 + aX + b.$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette i comme racine dans $\mathbb{C}$.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
السنة الأولى اعلام آلي
السداسي الأول

قسم الإعلام الآلي
في : 2023/01/15
المدة: ساعة ونصف

الإمتحان النهائي
الجـــــبر ١

التمرين الأول:

(١). **لتكن** P، Q **قضيتين.**

ا. **بالإستعانة بجدول الحقيقة. تحقق أن :**

$$\overline{(P \wedge \overline{Q})} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$$

(٢). **برهن بالتراجع ان :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.

(٣). **لتكن** A, B **جزئين غير خاليين من المجموعة** E.

ا. **هات عبارة الفرق التناظري** $A\Delta B$.

ب. **استنتج الفرق التناظري** $A\Delta B$**، من أجل** $A \cap B = \emptyset$.

التمرين الثاني:

لتكن $\mathcal{R}$**، علاقة معرفة على** $\mathbb{R}^*$ **بـ :**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

(١). **برهن أن** $\mathcal{R}$ **هي علاقة تكافؤ.**

(٢). **حدد أصناف التكافؤ لـ:** $a \in \mathbb{R}^*$**، ثم أوجد مجموعة حاصل القسمة** $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$.

التمرين الثالث:

(١). **لتكن** $G = \mathbb{R}$**، نعرف على** G **علاقة تركيب داخلية** $*$ **كما يلي :**

$$\forall x, y \in G,\ x * y = x + y - \frac{1}{2}.$$

ا. **برهن ان** $*$ **هي علاقة تبديلية.**

ب. **برهن ان** $(G, *)$ **هي زمرة.**

(٢). **ليكن،**

$$\begin{aligned} f :&(G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ &x \longmapsto f(x) = 2x - 1. \end{aligned}$$

ا. **برهن أن** f **هو تشاكل لزمرة.**

ب. **التطبيق** f **تقابلي ؟. برر.**

ج. **استنتج اسم آخر للتطبيق** f.

التمرين الرابع: نعتبر كثير الحدود $P(X)$ **في** $\mathbb{R}[X]$**، الذي يكتب ،**

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + aX + b.$$

- **حدد قيمة** a **و** b **من أجل** $P(X)$ **يقبل** i **جذرا له في** $\mathbb{C}$.

Corrigé type d'examen final.
Algèbre 1

Correction de l'exercice 01 :

1. Soient P, Q deux propositions.

   (a) À l'aide de la table de vérité, montrer que : $(\overline{P \wedge \overline{Q}}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

P	Q	$\overline{P}$ (0.5)	$\overline{Q}$ (0.5)	$P \wedge \overline{Q}$ (0.5)	$\overline{P \wedge \overline{Q}}$ (0.5)	$\overline{P} \vee Q$ (0.5)	$(\overline{P \wedge \overline{Q}}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$ (0.5)
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

2. Par récurrence démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.
   Soit $P(n)$ la propriété : $2^n > n$.

   - Pour : $n = 1, 2^1 = 2 > 1$, c'est vraie. **0.5**
   - Supposons que, $P(n)$ est vraie.i.e : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.
   - Démontrons que, $P(n+1)$ est vraie.i.e : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n+1} > n+1$.

   Nous avons,
   $$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n, \quad \textbf{0.5}$$
   et on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2n > n+1$. Donc,
   $$2^{n+1} > n+1, \quad \textbf{0.5}$$
   $P(n+1)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3. Soient A, B deux parties non vide d'un ensemble E.

   (a) L'expression de la différence symétrique $A\Delta B$.
   $$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad \textbf{0.5}$$
   (b) Déduire l'expression de la différence symétrique $A\Delta B$, pour $A \cap B = \emptyset$.
   Si : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B = A,$ et $B - A = B)$. Donc,
   0.5
   $$A\Delta B = A \cup B \quad \textbf{0.5}$$

Correction de l'exercice 02 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (a) $\mathcal{R}$ est réflexive car,
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$
   ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive. **01**

(b) $\mathcal{R}$ est symétrique car on a,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y},\\ &\Leftrightarrow y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x},\\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x.\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique. **01**

(c) $\mathcal{R}$ est transitive car on a,

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \wedge y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z},\\ &\Rightarrow x - \frac{1}{x} + \cancel{y - \frac{1}{y}} = \cancel{y - \frac{1}{y}} + z - \frac{1}{z},\\ &\Rightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z},\\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z.\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive. **01**
De (a), (b) et (c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminons :

(a) La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$. Nous avons,

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}a\}$$

alors,

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}a &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}, \quad \textbf{0.5}\\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - a + \frac{1}{a} = 0,\\ &\Leftrightarrow \frac{ax^2 - (a^2-1)x - a}{ax} = 0, \text{et } ax \neq 0,\\ &\Leftrightarrow ax^2 - (a^2-1)x - a = 0. \quad \textbf{0.5}\end{aligned}$$

$\Delta = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = a^2 + 1.$ **0.5**

$$x = \frac{a^2 - 1 + a^2 + 1}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a, \quad \textbf{0.5}$$
$$\vee$$
$$x = \frac{a^2 - 1 - a^2 - 1}{2a} = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}. \quad \textbf{0.5}$$

Ainsi,

$$\dot{a} = \left\{a, -\frac{1}{a}\right\}$$

(b) L'ensemble quotient $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$ D'après les classes d'équivalence de a, $(a \in \mathbb{R}^*)$, par suite

$$\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}} = \left\{\left\{a, -\frac{1}{a}\right\},\ a \in \mathbb{R}^*\right\}. \quad \textbf{0.5}$$

Correction de l'exercice 03 :

1. Soit $G=\mathbb{R}$, la loi de composition interne $*$ définie sur G par :

$$\forall x,y\in G,\ x*y=x+y-\frac{1}{2}.$$

   (a) $*$ est une loi commutative. Nous avons,

$$\forall x,y\in G,\ x*y=x+y-\frac{1}{2}=y+x-\frac{1}{2}=y*x,$$

   d'où,

$$\forall x,y\in G,\ x*y=y*x.$$

   ce qui montre que $*$ est une loi commutative. **0.5**

   (b) $(G,*)$ est un groupe.

   i. $*$ est associative.

$$\forall x,y,z\in G,\ (x*y)*z=x*(y*z).$$

   A. $(x*y)*z=(x*y)+z-\frac{1}{2}=x+y-\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}=x+y+z-1.$ **0.5**

   B. $x*(y*z)=x+(y*z)-\frac{1}{2}=x+y+z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=x+y+z-1.$ **0.5**

   De A. et B., on déduit que $*$ est associative.

   ii. $*$ admet élément neutre. Soit e est un élément neutre de $*$ dans G, et comme la loi $*$ est commutative, on a :

$$\forall x\in G,\ x*e=e*x=x$$

$$x*e=x\Leftrightarrow \cancel{x}+e-\frac{1}{2}=\cancel{x}\Leftrightarrow e=\frac{1}{2}\in G.$$ **01**

   iii. $*$ admet un élément symétrique (Inverse). Soit $x\in G$, alors il existe un $x'\in G$ tel que :

$$x*x'=e=\frac{1}{2}.$$

$$x*x'=\frac{1}{2}\Rightarrow x+x'-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x\in G.$$ **01**

   De i., ii. et iii., on déduit que $(G,*)$ est un groupe.

2. Soit,

$$\begin{aligned} f:&(G,*)\longrightarrow(\mathbb{R},+)\\ &x\longmapsto f(x)=2x-1.\end{aligned}$$

   (a) Montrons que f est homomorphisme de groupe. Soit $x,y\in G$, alors

$$\begin{aligned} f(x*y)&=2(x*y)-1\\ &=2\left(x+y-\frac{1}{2}\right)-1\\ &=(2x-1)+(2y-1)\\ &=f(x)+f(y)\end{aligned}$$ **01**

   (b) L'application f est bijective, car

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists!x\in G,\ y=f(x).$$ **0.5**

   Pour tout $y\in\mathbb{R}$, l'équation $y=2x-1$ admet solution unique $x=\frac{y-1}{2}\in G$. **0.5**

   (c) Comme l'application f est homomorphisme et bijective alors f est isomorphisme.. **0.5**

Correction de l'exercice 04 : Soit le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=X^3+2X^2+aX+b.$$

✏ Déterminons les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette i comme racine dans $\mathbb{C}$.

0.5 **0.5**

$$\begin{aligned} P(i)=0&\Leftrightarrow i^3+2i^2+ai+b=0,\\ &\Leftrightarrow -i-2+ai+b=0,\\ &\Leftrightarrow (b-2)+(a-1)\,i=0.\end{aligned}$$ **0.5**

Donc,

$$b-2=0,\wedge\ a-1=0\Rightarrow\ a=1\wedge\ b=2.$$ **0.5**