Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Département de génie civil
Année Universitaire 2022-2023

Matière : Probabilités-Statistiques

Corrigé type de l'examen final

Exercice n°1 : (8 points)

Le tableau suivant donne la répartition des notes obtenues à un examen de mathématiques par 40 étudiants d'un groupe de 2^{ieme} génie civil :

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20]
Effectif n_i	3	8	11	14	4

1) Préciser la population statistique, sa taille, la variable et son type.

2) Tracer l'histogramme de cette distribution.

3) Compléter le tableau statistique suivant :

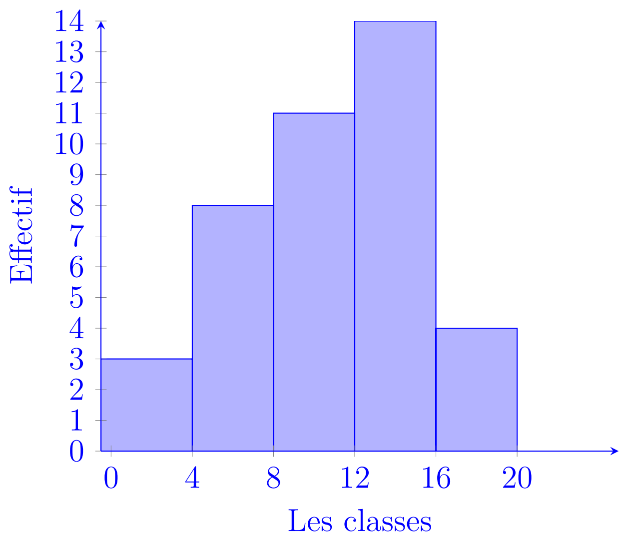
Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20]
Effectif	3	8	11	14	4
Effectifs cumulés croissants	...	...	...	...	...
Centre de classe c_i	...	...	...	...	...

4) Déterminer le mode, la médiane, la moyenne et l'écart type de la distribution .

Soluion de l'exercice n°1 :

1) La population statistique =les étudiants d'un groupe de 2^{ieme} génie civil. (0.25 point)
la taille=40 (0.25 point)
la variable= les notes obtenues à un examen. (0.25 point)
Le type = variable quantitative continue. (0.25 point)

2) L'histogramme des effectifs



(1.5 point)

Histogramme des effctifs illustrant les notes obtenues
à examen de mathématiques

3) Le tableau statistique :

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20]
Effectif n_i	3	8	11	14	4
Effectif cumulé croissant	3	11	22	36	40
Centre de Classe c_i	2	6	10	14	18

(1.25 point)

4) Le mode M_o =?

On observe que les classes ont même amplitude, $\mathrm{n_{max}} = 14$, alors le mode $M_o \in [12; 16[$

$$\begin{aligned} M_o &= 12 + \frac{(14-11)}{(14-11)+(14-4)} \times (16-12) \\ &= 12 + \frac{3}{13} \times 4 \\ &\backsimeq 12.92 \end{aligned}$$

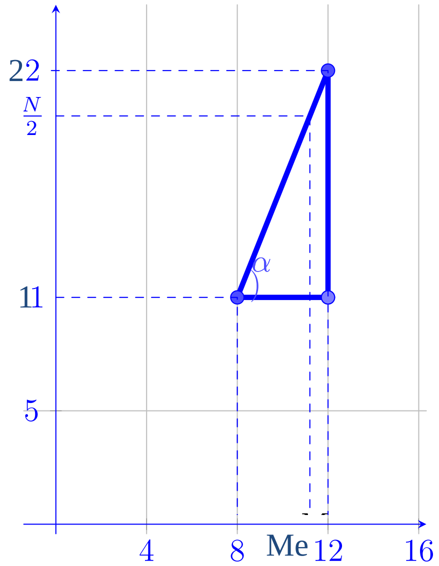
(1 point)

La médiane M_e =?

On a $\dfrac{N}{2} = 20$, donc $Me \in [8; 12[$,

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{22-11}{12-8} = \frac{20-11}{Me-8} \\ \Longrightarrow\ & 2.75 = \frac{9}{Me-8} \\ \Longrightarrow\ & Me \backsimeq 11.27 \end{aligned}$$

(1 point)



La moynne $\bar{x}$ = ?

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N}\sum n_i c_i \\ &= \frac{1}{40}(3\times 2 + 8\times 6 + 11\times 10 + 14\times 14 + 4\times 18) \\ &= 10.8 \end{aligned}$$

(1 point)

La variance v(X) =?

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{N}\sum n_i c_i^2 - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{40}\left(3\times 2^2 + 8\times 6^2 + 11\times 10^2 + 14\times 14^2 + 4\times 18^2\right) - 10.8^2 \\ &= 19.36 \end{aligned}$$

(1 point)

L'écart-type $\sigma_X = \sqrt{19.36} = 4.4$ (0.25 point)

Exercice n°2 (3 points)
Un carton contient 60 vaccins, dont 5 sont périmés. On sort du carton au hasard, en même temps 2 vaccins. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) aucun vaccin périmé ?

b) un vaccin périmé ?

c) au moins un vaccin périmé ?

d) au plus un vaccin périmé ?

Soluion de l'exercice n°2 :

On utilise pour le calcul les combinaisons, puisque l'ordre n'est pas important et pas de répétition.
Nombre de cas possibles :

$$|\Omega| = C_{60}^{2} = \frac{60!}{2!58!} = 1770 \qquad \text{(0.25 point)}$$

Soit "v "=" vaccin périmé" .

a) On cherche $P(0V)$

$$P(0V) = \frac{C_5^0 \times C_{55}^2}{C_{60}^2} = \frac{1485}{1770} \simeq 0.83898 = 83.898\% \qquad \text{(0.75 point)}$$

b) On cherche $P(1V)$

$$P(1V) = \frac{C_5^1 \times C_{55}^1}{C_{60}^2} = \frac{275}{1770} \simeq 0.15537 = 15.537\% \qquad \text{(0.75 point)}$$

c) On cherche $P(1V) + P(2V)$

$$P(1V) + P(2V) = 1 - P(0V) = 1 - 0.83898 = 0,16102 = 16.102\% \qquad \text{(0.75 point)}$$

d) On cherche $P(1V) + P(0V)$

$$P(1V) + P(0V) = 0.15537 + 0.83898 = 0,99435 = 99.435\% \qquad \text{(0.5 point)}$$

Exercice n°3 : (4 points)

1) Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; \frac{1}{6})$.

a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

b) Calculer $P(X = 0)$; $P(X \geq 1)$

2) Soient A et B deux évènements de l'univers Ω. Montrer que :
$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Soluion de l'exercice n°1 :

1) On a $X \curvearrowright \mathcal{B}(5; \frac{1}{6})$.

a) $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (0.75 point)

$V(X) = np(1-p) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ (0.75 point)

b) $P(X = k) = C_5^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$. Alors

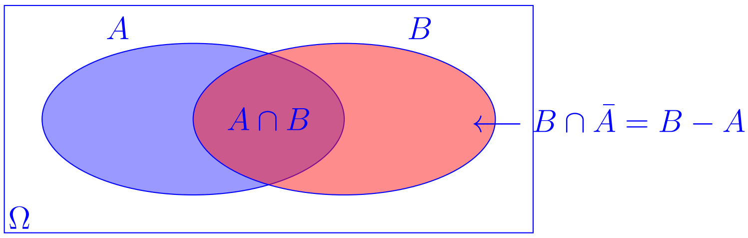
$P(X = 0) = C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq 0.401\,88$ (0.75 point)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.401\,88 \simeq 0.598\,12$ (0.75 point)

2) Soient $A, B \subset \Omega$. Montrer que :
$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

$B = (A \cap B) \cup \left(B \cap \bar{A}\right)$ et $\phi = (A \cap B) \cap \left(B \cap \bar{A}\right)$, donc (0.25 point)

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left((A \cap B) \cup \left(B \cap \bar{A}\right)\right) && \text{(0.25 point)} \\ &\Leftrightarrow P(B) = P(A \cap B) + P\left(B \cap \bar{A}\right) && \text{(0.25 point)} \\ &\Leftrightarrow P\left(B \cap \bar{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) && \text{(0.25 point)} \end{aligned}$$



<u>Exercice n°4</u> (5 points)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une densité de probabilité.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

3) Calculer $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3})$.

4) Calculer l'espérance $E(X)$.

<u>Soluion de l'exercice n°4 :</u>

1) La fonction f est une densité de probabilité attachée à la variable aléatoire X si :
i) pour $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 6x(1-x) \leq 6$, par suite $f(x) \geq 0$
pour $x \notin [0,1]$ on a $f(x) = 0$
donc $f(x) \geq 0$ (0.25 point)
ii)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} 6x(1-x)dx \\ &= 6\int_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx \\ &= \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^1 \\ &= 1 && \text{(1.25 point)} \end{aligned}$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.
2) La fonction de répartition de X, F_X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6\int_0^x \left(x - x^2\right) dx = 6\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = x^2(3-2x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{(1 point)}$$

3)

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3}\right) &= F_X(\frac{1}{3}) - F_X(\frac{1}{4}) \\
&= \left(\frac{1}{9} \times (3 - \frac{2}{3}) - (\frac{1}{16} \times (3 - \frac{1}{2})\right) \\
&= \frac{7}{27} - \frac{5}{32} \\
&\approx 0.103 \qquad \text{(1.25 point)}
\end{aligned}$$

4) L'espérance de X :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 6x^2(1-x)dx \\
&= \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \qquad \text{(1.25 point)}
\end{aligned}$$

Resp.Merini.a