UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Année universitaire : 2022/2023

1-ère année Informatique - Semestre 1
Examen Final en Analyse 1
Durée : 1 h 30 min

Questions de cours : (04 Pts)

1. Donner la définition formelle de : << la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π >> .
2. Donner la définition formelle de : << la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers π en 1 >> .
3. Énoncer le théorème de Rolle.
4. Énoncer la règle de l'Hospital.

Exercice 1 : (04 pts)

Soit A l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2}.x < \sqrt{4-2x}\}$

— Déterminer l'ensemble A.

— Déterminer, s'il existe l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, $\inf(A), \min(A), \sup(A)$ et $\max(A)$.

Exercice 2 : (06 Pts)

On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} , \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - v_n|$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
4. Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Exercice 3 : (06 Pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que f est continue sur D_f.
3. Montrer que f est dérivable sur D_f.
4. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $2f'(c) = f(2) - f(0)$.
   - Déterminer toutes les valeurs possible de c.

Corrigé de l'examen d'analyse 1

Questions de cours : (04 pts)

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ alors $|u_n - \pi| < \epsilon$. ... (0.5)
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, si $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - \pi| < \epsilon$. ... (0.5)
3. **Théorème de Rolle** : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que : ... (1.5)
   — f continue sur $[a,b]$;
   — f dérivable sur $]a,b[$;
   — $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. **Règle de l'Hospital** : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que ... (1.5)
   — $f(x_0) = g(x_0)$;
   — $\forall x \in I \setminus \{x_0\} : g'(x_0) \neq 0$.
   Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = l$

Exercice 1 : (04 pts)

— L'ensemble A : On remarque que :

$$\sqrt{2}.x < \sqrt{4-2x} \Leftrightarrow \sqrt{2}.x < \sqrt{2(2-x)} \Leftrightarrow x < \sqrt{2-x}\}$$

• Si $x \geq 0$ et $2 - x \geq 0$, donc $x \in [0,2]$ de plus $x^2 + x - 2 < 0$; $x \in]-2,1[\cap [0,2] = [0,1[$.
• Si $x < 0$; $x < \sqrt{2-x}$ est vérifier donc $x \in]-\infty, 0[$.
Par conséquent l'ensemble $A = [0,1[\cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1[$ ... (2)

— L'ensemble des majorants : $[1, +\infty[$. L'ensemble des minorants : n'existe pas.
$\sup(A) = 1$, $\max(A)$: n'existe pas $\inf(A), \min(A)$: n'existes pas. ... (2)

Exercice 2 : (06 pts

1. Pour découvrir laquelle est croissante et laquelle décroissante, on peut, par exemple commencer à calculer quelques termes de chacune.

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \sqrt{2} > u_0, \quad u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}} > u_1 \quad (\text{car } 2 < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{1+\sqrt{2}})$$
$$v_0 = 2, \quad v_1 = \sqrt{3} < v_0, \quad v_2 = \sqrt{1+\sqrt{3}} < \sqrt{3} \quad (\text{car } 1 + \sqrt{3} < 3 \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{3}} < \sqrt{3})$$

Donc on peut conjoncture que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

⋆ Montrons, par récurrence que (u_n) est croissante :
On a $u_1 - u_0 \geq 0$; on suppose que $u_{n+1} - u_n \geq 0$; alors

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1+u_{n+1}} - \sqrt{1+u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n}} \geq 0.$$

D'où (u_n) est croissante. ... (1)

⋆ (v_n) est décroissante de la même façon :
On a $v_1 - v_0 \leq 0$; on suppose que $v_{n+1} - v_n \leq 0$; alors

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \sqrt{1+v_{n+1}} - \sqrt{1+v_n} = \frac{v_{n+1} - u_n}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n}} \leq 0.$$

D'où (v_n) est décroissante. ... (1)

2.
$$|u_{n+1}-v_{n+1}| = |\sqrt{1+u_n}-\sqrt{1+v_n}| = \frac{|u_n-v_n|}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+v_n}}.$$
Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. Donc $\sqrt{1+u_n} \geq 1$ et $\sqrt{1+v_n} \geq 1$, d'où $\dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+v_n}} \leq \dfrac{1}{2}$

$$\text{Donc} \quad |u_{n+1}-v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n-v_n| \qquad ...(1)$$

3. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ |u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$

   Pour $n = 0$: $\quad |u_0 - v_0| = |1-2| = 1 \leq \dfrac{1}{2^0}$ vérifier.

   Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ et nous montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1}-v_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$?

   On a d'après la question précédente
$$|u_{n+1}-v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n-v_n| \leq \frac{1}{2}.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}. \qquad ...(1)$$

4. On a (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$. Donc les deux suites sont adjacentes. ... (1)
5. Dans les deux cas on a :
$$l = \sqrt{1+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0;\ \Delta = 5; \quad l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ...(0.75)$$
$$l_1 < 0,\ \text{impossible, donc } l = l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ...(0.25)$$

Exercice 3 (06 pts) :

1. $D_f = \mathbb{R}$. ... (0.5)
2. Pour $x < 1$, la fonction f est continue car f polynôme $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2)$.

   Pour $x \geq 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue, il reste

   Pour $x = 1$ on a $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x} = 1 = f(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3-x^2}{2} = 1 = f(1)$

   D'où f est continue sur D_f. ... $(1,5)$
3. On remarque pour $x \neq 1$, f est dérivable (comme précédent sur la continuité)

   — Pour $x < 1$: $\quad \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1} = -1$

   — Pour $x \geq 1$: $\quad \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = -1$

   D'où $f'_d(1) = f'_g(1)$. f est dérivable en 1, par conséquent f est dérivable sur D_f ... (1.5)
4. Théorème des accroissements finis (TAF) : si f fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

   On a f continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$ alors d'après le (TAF), il existe $c \in]0,2[$, tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c) = 2f'(c)$ ... (1)

   Les valeurs possible de c ... (1.5)

   $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = \dfrac{3}{2}$, donc $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\dfrac{1}{2}$.

   Alors

— Pour $0 < c \leq 1, \quad f'(c) = -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

— Pour $1 < c \leq 2, \quad f'(c) = -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$.
Puisque $-\sqrt{2} \notin]0, 2[$ alors $c = \sqrt{2}$.