Université de M'sila
Faculté Des Mathématiques et de l'informatique
Département d'informatique

جامعة المسيلة
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
قسم الإعلام الآلي

Examen : Programmation Linéaire (PL) (Corrigé Type)

Durée: 1h30 - Documents interdits | **Année Universitaire : 2022 / 2023**

Date : 16/01/2023 (14 : 30 – 16 : 00) | **Niveau : L3 SI Semestre : 6**

Exercice 1 : (8 points / 40 minutes)

Un artisan fabrique des objets A et de objets B.

La réalisation d'un objet A, demande 30 DA de matière première et 125 DA de main d'œuvre. La réalisation des objets B demande 70 DA de matière première et 75 DA de mains d'œuvre. Les profits réalisés sont de 54 DA par objet A, et de 45 DA par objet B.

La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 560 DA. La dépense journalière en main d'œuvre ne doit pas dépasser 1 250 DA.

Q1) Identifier les variables de décision du problème. **(0.5 + 0.5 = 1 pt)**

- X1 : le nombre d'unités du premier objet A
- X2 : le nombre d'unités du deuxième objet B

Q2) Écrire le programme linéaire Primal (P) qui permet d'optimiser les profits. **(1 pt)**

Le programme linéaire qui modélise ce problème est :

$$\begin{cases} \max\ Z = 54x_1 + 45x_2 \\ 30x_1 + 70x_2 \leq 560 \\ 125x_1 + 75x_2 \leq 1250 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q3) Donner le dual (D) [forme canonique] du programme linéaire (P). **(1 pt)**

Forme canonique du dual

$$\begin{cases} \min\ W = 560y_1 + 1250y_2 \\ 30y_1 + 125y_2 \geq 54 \\ 70y_1 + 75y_2 \geq 45 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q4) Trouver la forme standard du programme dual (D) . **(0.5 + 0.5 = 1 pt)**

Forme standard du dual

$$\begin{cases} \min\ W = 560x_1 + 1250x_2 \\ 30y_1 + 125y_2 - e_1 = 54 \\ 70y_1 + 75y_2 - e_2 = 45 \\ y_1, y_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le M-problème auxiliaire associé au problème (II) s'écrit :

$$\begin{cases} \min\ W = 560x_1 + 1250x_2 + MA_1 + MA_2 \\ 30y_1 + 125y_2 - e_1 + A_1 = 54 \\ 70y_1 + 75y_2 - e_2 + A_2 = 45 \\ y_1, y_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q5) Trouver la solution du programme linéaire **Primal (P)** à partir de la solution de son **Dual (D)** en utilisant la méthode de **SIMPLEX** pour maximiser le bénéfice. **(1 × 4 pts)**

D'après la première et la deuxième contraintes :

$$A_1 = 54 - 30y_1 - 125y_2 + e_1$$

$$A_2 = 45 - 70y_1 - 75y_2 + e_2$$

D'où $\min\ W = 560y_1 + 1250y_2 + MA_1 + MA_2$

$$\min\ W = 560y_1 + 1250y_2 + M(54 - 30y_1 - 125y_2 + e_1) + M(45 - 70y_1 - 75y_2 + e_2)$$

$$\max\ Z = (560 - 100M)y_1 + (1250 - 200M)y_2 + Me_1 + Me_2 + 99M$$

$$\begin{cases} \min\ W = 560x_1 + 1250x_2 + MA_1 + MA_2 \\ 30y_1 + 125y_2 - e_1 + A_1 = 54 \\ 70y_1 + 75y_2 - e_2 + A_2 = 45 \\ y_1, y_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial : **(1 pt)**

	y_1	y_2	e_1	e_2	A_1	A_2	c_i	
A_1	**30**	**125**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**54**	**54/125=0.432**
A_2	**70**	**75**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**45**	**45/75=0.6**
$Min\ W - c_i$	**560 – 100M**	**1250 – 200M**	**M**	**M**	**0**	**0**	**– 99M**	

Itération 1 : **(1 pt)**

	y_1	y_2	e_1	e_2	A_1	A_2	c_i	
y_2	**30/125**	**1**	**-1/125**	**0**	**1/125**	**0**	**54/125**	**54/30**
A_2	**52**	**0**	**3/5**	**-1**	**-3/5**	**1**	**63/5**	**63/260**
$Min\ W - c_i$	**260 – 52M**	**0**	**M**	**M**	**-10 + 8M/5**	**0**	**-540 -63M/5**	

Itération 1 : **(1 pt)**

	y_1	y_2	e_1	e_2	A_1	A_2	c_i	
y_2	**0**	**1**	**-7/650**	**6/1300**	**7/650**	**-6/1300**	**81/250**	
y_1	**1**	**0**	**3/260**	**-1/52**	**-3/260**	**1/52**	**63/260**	
$Min\ W - c_i$	**0**	**0**	**7**	**5**	**-7+M**	**-5+M**	**- 603**	

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution $(y_1, y_2) = (\frac{63}{260}, \frac{81}{250})$ est optimale pour le problème dual (D), avec Min W $= 603$.

Donc on déduire que, la solution pour le problème Primal (P) est : $(x_1, x_2) = (7, 5)$ est optimale pour le problème Primal (P), avec Max Z $= 603$. (1 pt)

<u>Exercice 2 :</u> (6 points / 25 minutes)

On se donne le programme linéaire (P) suivant:

$$\begin{cases} \max z = \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ x_1 \ - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \leq 4 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

La solution proposée pour (P) est : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0, \frac{1}{2})$

<u>Questions</u>

Q1) Donner la forme standard du programme (P) et vérifiez que la solution proposée est réalisable. **(1 + 1 = 2 pts)**

La forme standard du programme (P) : (1 pt)

$$\begin{cases} \max z = \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ x_1 \ - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + e_1 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 + e_2 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 + e_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 + e_4 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + e_5 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 + e_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \geq 0 \end{cases}$$

Vérifier que la solution proposée est réalisable (1 pt)

En remplacer les valeurs de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, et\ x_6$ dans les contraintes:

$$\begin{cases} \max z = \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ -4 \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{7}{2} + \frac{1}{2} + e_1^* = 1 \\ \frac{5}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + e_2^* = 4 \\ -3 \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{7}{2} + \frac{1}{2} + e_3^* = 4 \\ 2 \times \frac{7}{2} - 5 \times \frac{1}{2} + e_4^* = 5 \\ \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + e_5^* = 7 \\ 2 \times \frac{5}{2} - \frac{7}{2} + 5 \times \frac{1}{2} + e_6^* = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*, e_6^* \geq 0 \end{cases} \quad ========> \quad \begin{cases} e_1^* = 0 \\ e_2^* = 0 \\ e_3^* = \frac{1}{2} \\ e_4^* = \frac{1}{2} \\ e_5^* = 0 \\ e_6^* = 1 \end{cases}$$

Donc $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*, e_6^* \geq 0$ ====> **la solution proposée est réalisable**

Q2) Ecrire le dual (D) du programme (P). **(1 pt)**

Ecrire le dual (D) du programme (P)

$$\begin{cases} \min w = \quad y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 5y_4 + 7y_5 + 5y_6 \\ y_1 + 5y_2 + 4y_3 - 2y_5 + 2y_6 \geq 4 \\ 3y_2 + 5y_3 - y_4 + y_5 - 3y_6 \geq 5 \\ -4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_5 + 2y_6 \geq 1 \\ 3y_1 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_6 \geq 3 \\ y_1 - 5y_2 - 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 4y_6 \geq -5 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 - 5y_4 + 2y_5 + 5y_6 \geq 8 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{cases}$$

Q3) Appliquer le théorème des écarts complémentaires pour vérifier l'optimalité de la solution proposée. **(1 + 1 + 1 = 3 pts)**

Vérifier l'optimalité de la solution proposée (1 pt)

D'après la question (1) on a :

$$\begin{cases} e_3^* = \frac{1}{2} > 0 \quad =====> \quad y_3 = 0 \\ e_4^* = \frac{1}{2} > 0 \quad =====> \quad y_4 = 0 \\ e_6^* = 1 > 0 \quad =====> \quad y_6 = 0 \end{cases} \qquad \dots.(I)$$

D'autre part les variables $x_3, x_4 \ et \ x_6$ sont strictement positives

$$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{2} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & -4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_5 + 2y_6 = 1 \\ x_4 = \frac{7}{2} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & 3y_1 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_6 = 3 \\ x_6 = \frac{1}{2} > 0 \xRightarrow{C.O.P.D} & y_1 + 3y_2 + y_3 - 5y_4 + 2y_5 + 5y_6 = 8 \end{cases} \quad \ldots .(II)$$

D'après (I) et (II) on obtient le système d'équation suivant : **(1 pt)**

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_5 + 2y_6 = 1 \\ 3y_1 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_6 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 - 5y_4 + 2y_5 + 5y_6 = 8 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_6 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} -4y_1 + y_2 + y_5 = 1 \\ 3y_1 + y_5 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_5 = 8 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_6 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \\ y_5 = \frac{3}{2} \\ y_6 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :$(y_1, y_2, y_3,, y_4, y_5,, y_6) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)$

Cette solution satisfait toutes les contrainte du problème dual. Elle est donc réalisable et par suite la solution primale proposée est optimale. (1 pt)

<u>Exercice 3 :</u> (6 points / 20 minutes)

Considérons le problème linéaire suivant : $\begin{cases} \max\ Z = -2x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ (I)

Q1) Écrire le problème **(I)** sous forme standard. **(1 + 1 = 2 pts)**

La forme standard associée au problème (I) est : **(1 pt)**

$$\begin{cases} \max\ Z = -2x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - e_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_2 \geq 0 \end{cases} \quad (II)$$

Le M-problème auxiliaire associé au problème (II) s'écrit : **(1 pt)**

$$\begin{cases} \max\ Z = -2x_1 - 4x_2 - MA_1 - MA_2 \\ 2x_1 - 2x_2 + A_1 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - e_2 + A_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases} \quad (III)$$

Q2) Résoudre par la méthode des variables artificielles (Big-M) le problème **(I)**. **(1+ 1 +1+1 = 4 pts)**

D'après la première et la deuxième contraintes :

$$A_1 = 4 - 2x_1 + 2x_2$$
$$A_2 = 6 - 4x_1 - 2x_2 + e_2$$

D'où

$$\max\ Z = -2x_1 - 4x_2 - M(4 - 2x_1 + 2x_2) - M(6 - 4x_1 - 2x_2 + e_2)$$
$$\max\ Z = (6M-2)x_1 - 4x_2 - Me_2 - 10M$$

Tableau initial : **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_2	A_1	A_2	c_i	
A_1	**2**	**-2**	**0**	**1**	**0**	**4**	**4/2 = 2**
A_2	**4**	**2**	**-1**	**0**	**1**	**6**	**6/4=3/2**
$Max\ Z - c_i$	**(6M-2)**	**-4**	**-M**	**0**	**0**	**10M**	

Itération 1 : **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_2	A_1	A_2	c_i	
A_1	**0**	**-3**	**1/2**	**1**	**-1/2**	**1**	**1/(1/2) = 2**
x_1	**1**	**1/2**	**-1/4**	**0**	**1/4**	**3/2**	**(3/2) /(-1/4) =-6**
$Max\ Z - c_i$	**0**	**-3(M+1)**	**½ (M-1)**	**0**	**-½ (3M-1)**	**M+3**	

Itération 2 : **(1 pt)**

	x_1	x_2	e_2	A_1		c_i	
e_2	**0**	**-6**	**1**	**2**		**2**	
x_1	**1**	**-1**	**0**	**1/2**		**2**	
$Max\ Z - c_i$	**0**	**-6**	**0**	**-(M-1)**		**4**	

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution $(x_1, x_2) = (2, 0)$ est optimale pour le problème (I), avec Max Z $= -4$. **(1 pt)**

Exercice Bonus : **(2 points / 5 minutes)**

Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_3 \leq 2 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Question : Écrire le problème **(1)** sous forme standard. **(0.5 + 0.5 + 1 = 2 pts)**

Comme la variable $x_1 \in \mathbb{R}$, alors on fait le changement de variable suivant : **(0.5 pt)**

$$x_1 = z_1 - z_2, et\ z_1 \geq 0\ , z_2 \geq 0$$

Le problème (1) s'écrit alors sous la forme **(0.5 pt)**

$$\begin{cases} \max\ Z = 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \\ z_1 - z_2 + 2x_2 \geq 10 \\ 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 = 7 \\ z_1 - z_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_3 \leq 2 \\ z_1, z_2, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Le problème standard associé au problème (2) est **(1 pt)**

$$\begin{cases} \max\ Z = 3z_1 - 3z_2 + x_2 - 2x_3 \\ z_1 - z_2 + 2x_2 - e_1 = 10 \\ 3z_1 - 3z_2 - x_2 + x_3 = 7 \\ z_1 - z_2 + 3x_3 + e_3 = 8 \\ x_3 + e_4 = 2 \\ z_1, z_2, x_2, x_3, e_1, e_3, e_4 \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Bon courage