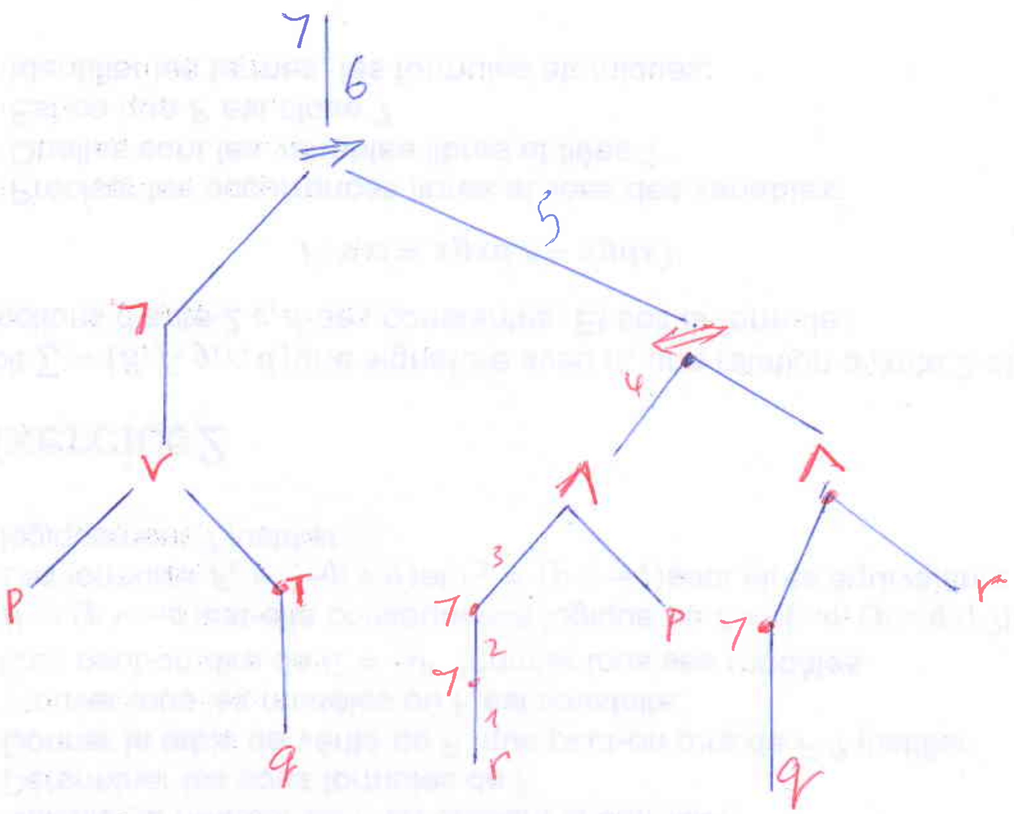
Corrigé type de l'examen
Logique mathématique

$$F = \neg\big(\neg(p \lor \neg q) \Rightarrow ((\neg\neg r \land p) \Leftrightarrow (\neg q \land r))\big)$$

1°) L'arbre de décomposition A_F :



2°) $h(F) = ?$

$F_0 = \{p, q, r\}$

$F_1 = F_0 \cup \{\neg q, \neg r\}$

$F_2 = F_1 \cup \{\neg\neg r, (\neg q \land r), (p \lor \neg q)\}$

$F_3 = F_2 \cup \{(\neg\neg r \land p), \neg(p \lor \neg q)\}$

$F_4 = F_3 \cup \{(\neg\neg r \land p) \Leftrightarrow (\neg q \land r)\}$

$F_5 = F_4 \cup \{\neg(p \lor \neg q) \Rightarrow ((\neg\neg r \land p) \Leftrightarrow (\neg q \land r))\}$

$F_6 = F_5 \cup \{F\}$

Donc $h(F) = 6$

3) Les sous-formules de F :

$sf(F) = \{p, q, r, \neg q, \neg r, \neg\neg r, (\neg q \wedge r), (p \vee \neg q), (\neg\neg r \wedge p)$,
$((\neg\neg r \wedge p) \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)), \neg(p \vee \neg q), (\neg(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg\neg r \wedge p) \Leftrightarrow (\neg q \wedge r), F\}$.

4) Table de vérité de F

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg\neg r$	$(p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee \neg q)$	$(\neg q \wedge r)$	$\neg\neg r \wedge p$	$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$	F
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

F est une anti-logie car $\bar{v}(F) = 0$ dans tous les modèles.

5) F est satisfaite dans tous les modèles

6) $G = \neg F$ est une tautologie, pas de modèles

7) $H = (p \vee \neg q)$, $T = \{\neg q, (p \vee q)\}$

Soit μ un modèle de T donc $\bar{v}(\neg q) = 1$ et $\bar{v}(p \vee q) = 1$

Par suite $v(q) = 0$ et $v(p) = 1$

On remplace dans H : $\bar{v}(H) = 1$

alors $T \models H$

8) $F_1 = (\neg p \vee q)$, $F_2 = (p \vee \neg q)$

$F_1 \not\sim F_2$ car si $v(p) = 1$, $v(q) = 0$

on a $\bar{v}(F_1) \neq \bar{v}(F_2)$

$0 \neq 1$

Exo 2:

1) Les occurrences libres et liées des variables

$\forall x (= \overset{\text{liée}}{x} g \overset{\text{liée}}{x} d\, x = \overset{\text{liée}}{x} g\, d \overset{\text{liée}}{x})$

2) Les variables liée : x,

3) F est close car il n'y a pas des variables libres

4) Les termes, x, gxd, gdx, $xgxd$, $xgdx$

5) Les formules : $= xgxd$, $= xgdx$

Exo 3: $T = \{ P_1, (P_1 \Rightarrow P_2), (P_3 \Rightarrow \neg P_2), (P_3 \vee \neg P_1) \}$

1) On montre par l'absurde.

On suppose que T est satisfaisable : $\exists \mu$ tel que,

$\bar{V}(P_1) = 1$, $\bar{V}(P_1 \Rightarrow P_2) = 1$ $\bar{V}(P_3 \Rightarrow \neg P_2) = 1$, $\bar{V}(P_3 \vee \neg P_1) = 1$

on trouve $1 = 0$ car tradiction

alors T est contradictoire

2) $T_1 = \{ \neg(P_1 \wedge P_4) ; (P_2 \wedge P_3), P_4 \}$

$T_2 = \{ P_4, P_2, P_3, (\neg P_1 \vee \neg P_4) \}$

$T_1 \Leftrightarrow T_2$

$(\Rightarrow)$ Soit μ un modèle de $T_1 \Rightarrow V(P_4) = 1$, $\bar{V}(P_2 \wedge P_3) = 1$

et $\bar{V}(\neg(P_1 \wedge P_4)) = 1$

$\bar{V}(\neg(P_1 \wedge P_4)) = 1 \Rightarrow \bar{V}(P_1 \wedge P_4) = 0$

$\bar{V}(P_1 \wedge P_4) = V(P_1) \cdot V(P_4) = 0$

$v(P_1) \circ 1 = 0 \Rightarrow v(P_1) = 1$

$\bar{v}(P_2 \wedge P_3) = 1 \Rightarrow v(P_2) = v(P_3) = 1$

donc $\mu : v(P_1) = 1,\ v(P_2) = 1,\ v(P_3) = 1,\ v(P_4) = 1$

on remplace dans T_2 donc

μ est un modèle de T_2

$\Leftarrow$ de même manière

alors $T_1 \Leftrightarrow T_2$

3) On montre que $T \models F$ / $(F = P_2 \Rightarrow P_3)$

Soit μ un modèle de T donc

$\bar{v}(\neg P_1 \Rightarrow P_4) = 1$; $\bar{v}(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_3) = 1$, $\bar{v}(\neg P_2 \Rightarrow P_1) = 1$ et $\bar{v}(\neg P_1) = 1$

$\Rightarrow \boxed{v(P_1) = 0}$,
$\begin{cases} \bar{v}(\neg P_2 \Rightarrow P_1) = 1 & \text{—— } 1 \\ \bar{v}(\neg P_1 \Rightarrow P_4) = 1 & \text{—— } 2 \\ \bar{v}(\neg P_2 \Rightarrow \neg P_3) = 1 & \text{—— } 3 \end{cases}$

de 2 ; $v(P_1) = 0 \Rightarrow \bar{v}(\neg P_1) = 1$ donc $\boxed{v(P_4) = 1}$

de 1 ; $\bar{v}(\neg P_2) = 0 \Rightarrow \boxed{v(P_2) = 1}$

de 3 ; $\bar{v}(P_2 \Rightarrow \neg P_3) = 0 \Rightarrow \bar{v}(\neg P_3) = 0 \Rightarrow \boxed{v(P_3) = 1}$

$\mu : v(P_1) = 0,\ v(P_2) = 1,\ v(P_3) = 1,\ v(P_4) = 1$

donc $\bar{v}(F) = 1$

alors $T \models F$